de ℓ correspondant à cette décomposition de k. Rappelons (par conséquence de ([7], 7.1.8, 7.4.8)) que $\bar{U}$ admet deux représentations simples ρ_+, ρ_- de plus haut poids, qui sont non-isomorphes si et seulement si $\ell+1 \neq 0$.

On note $\bar{U}^\wedge$ (resp. $A_1^\wedge$) l'ensemble des classes d'équivalences des représentations irréductibles de $\bar{U}$ (resp. A_1).

THEOREME. (<u>Block</u>) — L'<u>application</u> $\varphi_\ell : M \to \mathrm{Soc}_{\bar{U}} M$ <u>est une injection de</u> $A_1^\wedge$ <u>dans</u> $\bar{U}^\wedge$. <u>Si</u> $\ell+1 = 0$, φ_ℓ <u>est bijective</u>.

<u>Si</u> $\ell+1 \neq 0$, <u>on a</u>

$$\mathrm{Im}\ \varphi_\ell = \begin{cases} \bar{U}^\wedge - \{\rho_+\} : & \mathrm{Re}\,(\ell+1) > 0, \\ \bar{U}^\wedge - \{\rho_-\} : & \mathrm{Re}\,(\ell+1) < 0. \end{cases}$$

3.8. <u>Problèmes</u>.

1) On pose $B = k(x)\left[\frac{d}{dx}\right]$ et $A = k\left[x, \frac{d}{dx}\right]$ qui est une sous-algèbre de B. Soit M un B module simple. Montrer que $\mathrm{Soc}_A M \neq 0$.

2) Servir de (1) pour réduire la classification de $A^\wedge$ à celle de $B^\wedge$. (L'intérêt de ceci résulte du fait que B est un anneau principal).

3.9. <u>Quelques remarques générales.</u>

3.9.1. LEMME. – <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie complètement résoluble</u>. <u>Alors</u> $\mathrm{Kdim}\, U(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$.

On a vu (3.3.3) que $\mathrm{Kdim}\, U(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$. L'inégalité opposée est démontrée par recurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble il existe $0 \neq x \in \mathfrak{g}$ qui est semi-invariant pour l'action adjointe. C'est à dire kx est un idéal de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre quotient qui est complètement résoluble de dimension $\dim \mathfrak{g} - 1$. Alors $U(\mathfrak{g})x$ est un idéal de $U(\mathfrak{g})$ et si

$\pi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / \mathcal{U}(\mathfrak{g}) x$ est la projection canonique, alors $\operatorname{Im} \pi$ s'identifie à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)$ (isomorphisme d'algèbres). De cela il est claire que $\operatorname{Kdim}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g}) x =$

$= \operatorname{Kdim}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_1)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}_1) = \dim \mathfrak{g}_1$, par l'hypothèse d'induction. Comme x est régulier dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, un isomorphisme $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) x^n / \mathcal{U}(\mathfrak{g}) x^{n+1} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g}) x$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ modules. De la suite décroissante

$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{U}(\mathfrak{g}) x \supset \mathcal{U}(\mathfrak{g}) x^2 \supset \ldots$, il en résulte

que $\operatorname{Kdim}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \geq 1 + \dim \mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}$.

3.9.2. LEMME. — <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie et</u> $\underline{\mathfrak{b}}$ <u>une sous-algèbre de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Alors</u>

$$\operatorname{Kdim}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \geq \operatorname{Kdim}_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{b}).$$

Soient $I_1 \supsetneq I_2$ deux idéaux à gauche de $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$. Il suffit de démontrer que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) I_1 \supsetneq \mathcal{U}(\mathfrak{g}) I_2$.

Ceci est conséquence facile du Poincaré-Birkhoff-Witt qui entraîne que $U(\mathfrak{g})$ est libre comme $U(\underline{b})$ module à droite.

3.9.3. COROLLAIRE.— Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple déployée sur k et $\underline{b}$ une sous-algèbre de Borel. Alors $\operatorname{Kdim} U(\mathfrak{g}) \geq \dim \underline{b}$.

Comme $\underline{b}$ est complètement résoluble, ceci résulte de 3.9.1 et 3.9.2.

3.10. Problèmes

Soit $\mathfrak{g}$ et $\underline{b}$ comme dans 3.9.3. On note $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$.

1)** (Roos [42]). A-t-on $\operatorname{Kdim} U(\mathfrak{g}) = \dim \underline{b}$?

2)**. Soit $P \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$. Alors $d(U(\mathfrak{g})/P)$ est un entier pair ([16], 7.2). A-t-on $\operatorname{Kdim} U(\mathfrak{g})/P = \frac{1}{2} d(U(\mathfrak{g})/P)$?

3)**. Soit M un $U(\mathfrak{g})$ module de type fini. Supposons que $\operatorname{Ann}_{Z(\mathfrak{g})} M \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$. A-t-on

$$\operatorname{Kdim} M \leq \max_{L \text{ sous-quot. de } M} \left\{ d(L) - \frac{1}{2} d(U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} L) \right\} \quad ?$$

4)**. Soit M un A_n module de type fini. D'après Bernstein on a $\operatorname{Kdim} M \leq d(M) - n$ ([2], Chap. I). A-t-on égalité ? De même, a-t-on égalité dans 3)** ?

3.11. Modules de plus haut poids.

3.11.1. Désormais on suppose k algébriquement clos et $\mathfrak{g}$ semi-simple. Soient $\underline{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $R \subset \underline{h}^*$ l'ensemble des racines non-nulles, $R^+ \subset R$

un système de racines positives, B l'ensemble correspondante de racines simples, $s_\alpha \in \mathrm{Aut}\,\underline{h}^*$ la réflection associée à la racine α et W le groupe engendré par les $s_\alpha : \alpha \in B$ (groupe de Weyl). On fixe une base $\{X_\alpha\}_{\alpha\in R}$, $\{H_\alpha\}_{\alpha\in B}$ de Chevalley de $\underline{g}$ (avec $H_\alpha \in \underline{h}$ et $X_\alpha \in \underline{g}$ de poids α). On pose

$$\underline{n}^+ = \bigoplus_{\alpha\in R^+} k X_\alpha \quad , \quad \underline{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in R^+} k X_{-\alpha} .$$

Alors $\underline{b} := \underline{h} \oplus \underline{n}^+$ est une sous-algèbre de Borel.

3.11.2. Soit M un $U(\underline{g})$ module de type fini. Alors $\frac{1}{2} d(U(\underline{g})/\mathrm{Ann}\,M) \leq d(M) \leq d(U(\underline{g})/\mathrm{Ann}\,M)$ la première inégalité étant conséquence de 6.1.4 la deuxième étant élémentaire. Il en résulte qu'une réponse positive à 3.10.3 entraînera que pour tout $P \in \mathrm{Prim}\,U(\underline{g})$ on aurait $\mathrm{Kdim}(U(\underline{g})/P) \leq \frac{1}{2} d(U(\underline{g})/P)$. L'inégalité opposée est en principle plus facile. Cependant au présent il n'a été établie que pour P minimal ([37], Thm. 3) et pour quelques cas speciales où on peut appliquer le lemme de Quillen généralisé

([33], 1.2). Ce résultat entraîne que si A est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/P$ alors $K\dim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/P) \geq d_A(A)$. Dans les plupart des cas on peut démontrer ([30], I, 4.8) que $\mathrm{Fract}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/P)$ est un anneau de matrices sur un corps de Weyl d'indice $m := \frac{1}{2} d(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/P)$. Donc on pourrait espérer trouver une sous-algèbre commutative A de $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/P)$ telle que $d_A(A) = m$. D'autre part un résultat de Resco ([41], ; [34],) entraîne que $d_A(A) \leq m$ pour tout sous-algèbre commutative A d'un anneau de matrices sur un corps de Weyl d'indice m.

3.11.3. Soit $Z \in \mathrm{Max}\, Z(\mathfrak{g})$. Alors $P := \mathcal{U}(\mathfrak{g})Z \in \mathrm{Prim}\,\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ([7], 8.4.3, 8.4.4). On pose $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/P$, $n = \mathrm{card}\, R^+$. Comme pour $sl(2)$ (3.4.3) on peut construire plusieurs plongements de $\overline{\mathcal{U}}$ dans A_n satisfaisants même que $\mathrm{Fract}\,\overline{\mathcal{U}} = \mathrm{Fract}\, A_n$ ([19], 10.5). Dans ce cas on pourrait espérer que $M \mapsto \mathrm{Soc}_{\overline{\mathcal{U}}}(M)$ définit une application de $\hat{A}_n$ dans $\overline{\mathcal{U}}^\wedge$. Admettons cela a-t-on surjectivité ? Au moins pour les modules de plus haut poids ceci a une réponse positive dans un sens tout à fait analogue au résultat pour $sl(2)$ (3.7.5).

Ceci est démontré au-dessous.

3.11.4. Soit ρ la demi-somme des racines positives.

Pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$, on notera k_λ le $\underline{b}$ module de dimension 1 engendré par un vecteur 1_λ de poids $\lambda-\rho$, satisfaisant $X 1_\lambda = 0$, $\forall\ X \in \underline{n}^+$. On pose $M(\lambda) = U(\underline{g}) \otimes_{U(\underline{b})} k_\lambda$, qui est $U(\underline{n}^-)$ module libre de rang 1.

On pose $v_\lambda = 1 \otimes 1_\lambda$ qui s'appelle le générateur canonique de $M(\lambda)$.

Si M est un $\underline{h}$ module on note pour tout $\mu \in \underline{h}^*$ son sous-espace de poids μ par $M_\mu := \{ m \in M : Hm = (H,\mu)\, m,\ \forall H \in \underline{h} \}$. On voit que

$$M(\lambda) = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}B} M(\lambda)_{\lambda-\rho-\nu}$$

et que tout sous espace $M(\lambda)_{\lambda-\rho-\nu}$ est de dimension finie.

En particulier $M(\lambda)_{\lambda-\rho} = k v_{\lambda-\rho}$ et de cela il résulte que

$M(\lambda)$ admet un unique quotient simple qu'on désigne $L(\lambda)$.

De même il résulte qu'il existe un homomorphisme $\chi_\lambda : Z(\underline{g}) \to k$ tel que $z v_{\lambda-\rho} = \chi_\lambda(z) v_{\lambda-\rho}$, $\forall z \in Z(\underline{g})$. De ceci on a $zm = \chi_\lambda(z)m$, $\forall m \in M(\lambda)$.

THEOREME. — ([7], 7.4.7). <u>On a</u> $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ <u>si et seulement si</u> $\lambda' \in W\lambda$.

3.11.5. On désigne par $\underline{O}^{\underline{z}}$ ((ou simplement, $\underline{O}$)) la catégorie de tous les $U(\underline{g})$ modules M satisfaisants les conditions suivantes.

(i) $\dim M_\mu < \infty$, $\forall \mu \in \underline{h}^*$.

(ii) $\dim U(\underline{n}^+)m < \infty$, $\forall m \in M$.

(iii) $M = \bigoplus_{\mu \in \underline{h}^*} M_\mu$.

(iv) L'action de $Z(\underline{g})$ sur M est fini.

Il est facile à voir que $\underline{O}$ est fermée pour sous-quotients et sommes directes finies. Grâce à (i)-(iii), tout $L \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$

admet un vecteur de plus haut poids disons $\lambda-\rho$ de sorte que $L \cong L(\lambda)$ si L est simple.

THEOREME. — Soit $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$. Alors M est de longueur fini. Ses sous-quotients simples sont parmis les $L(\lambda) : \lambda \in \underline{h}^*$.

Grâce à la condition (iv) on peut supposer que M admet un caractère central χ. D'après 3.11.4 il existe au plus card W objets simple dans $\underline{O}$ admettant le caractère χ. Donc si M n'est pas de longueur fini il admet un nombre infini de sous-quotients simples 2 à 2 isomorphes (rappel que $U(\underline{g})$ est noethérienne).
Si ce module simple est $L(\lambda)$ on aurait que $\dim M_{\lambda-\rho} = \infty$, en contradiction avec (i).

3.11.6. Soit σ l'antiautomorphisme de $U(\underline{g})$ défini en posant $\sigma(X_\alpha) = X_{-\alpha}$, $\forall \alpha \in R$. Soit $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$. On considère M^* comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ module selon

$$(am, n) = (m, \sigma(a)n) \quad , \forall\ m \in M^*,\ n \in M,\ a \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

On désigne par $\delta(M)$ les éléments $\underline{h}$ finis de M^* qui est évidemment un sous-$\mathfrak{g}$ module. On désigne par $[M : L(\lambda)]$ la multiplicité de $L(\lambda)$ dans une suite de Jordan-Hölder de M. On remarque que $\sigma(z) = z, \forall z \in Z(\mathfrak{g})$ ou $z \in \mathcal{U}(\underline{h})$.

PROPOSITION. — Si $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$, alors

$$\delta(M) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O} \quad \text{et} \quad [M : L(\lambda)] = [\delta(M) : L(\lambda)], \ \forall\ \lambda \in \underline{h}^*.$$

Si $M = M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \dots \supsetneq M_{t+1} = 0$ est une filtration finie de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ modules tels que tout quotient admet un caractère central, alors $M^* = M_{t+1}^{\perp} \supset M_t^{\perp} \supset \dots \supset M_1^{\perp} = 0$, est une filtration ayant les même propriétés, d'où la condition (iv).

Soit $\mu \in \underline{h}^*$ et posons $J_\mu = \mathcal{U}(\underline{h})(H - (H,\mu)1)$. Comme $J_\mu + J_{\mu'} = (1)$ pour $\mu \neq \mu'$, il résulte que

$$(*) \qquad \delta(M) = \bigoplus_{\mu \in \underline{h}^*} \big(\delta(M)\big)_{\langle\mu\rangle} ,$$

où $\big(\delta(M)\big)_{\langle\mu\rangle} = \{ m \in \delta(M) : J_\mu^{\ell}\, m = 0 : \ell \text{ assez grand} \}$.

Encore $\big(\big(\delta(M)\big)_{\langle\mu\rangle}, M_{\mu'}\big)$ si $\mu \neq \mu'$ et vu de $(*)$ il résulte que $\big(\delta(M)\big)_{\langle\mu\rangle} = \delta(M)_\mu$, d'où la condition (iii). Enfin $\delta(M)_\mu$ s'identifié avec M_μ^* comme $\underline{h}$ module et en particulier

$$(**) \qquad \dim \delta(M)_\mu = \dim M_\mu .$$

D'après 3.11.5 l'ensemble des poids de M est contenu dans un réunion fini d'ensembles de la forme $\lambda - \mathbb{N}B : \lambda \in \underline{h}^*$. D'après $(**)$ on a de même pour $\delta(M)$. D'où la condition (ii) et par conséquence $\delta(M) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$. Il résulte de ([26],) que $\delta(L(\mu)) \cong L(\mu)$, $\forall \mu \in \underline{h}^*$ et puis la dernière assertion de la proposition résulte de (**) et .

3.11.7. COROLLAIRE. — Pour tout $\lambda \in \underline{h}^+$ on a

$$\mathrm{Soc}_{U(\underline{g})}\, \delta(M(\lambda)) \cong L(\lambda).$$

3.11.8. Nous allons poser sur $\delta(M(\lambda))$ une structure de A_n : $n = \mathrm{card}\, R^+$, module simple. Tout d'abord on remarque que $M(\lambda)$ s'identifie avec $S(\underline{n}^-) \otimes k_\lambda$ comme espace vectoriel. La multiplication à gauche de $a \in U(\underline{g})$ dans $U(\underline{g}) \otimes_{U(\underline{b})} k_\lambda$ se traduit comme transformation linéaire $\rho(a)$ sur $S(\underline{n}^-) \otimes k_\lambda$. On pose $x_\alpha = \mathrm{gr}\, X_\alpha$: $\alpha \in -R^+$, $y_\alpha = d/dx_\alpha$ et on désigne par A_n l'algèbre de Weyl engendrée par les x_α, y_α : $\alpha \in -R^+$. Un calcul montre ([19], 5.6) le

LEMME. — Pour tout $a \in U(\underline{g})$ on a

(i) $\rho(a) \in A_n$.

(ii) $\rho(H) \in \sum_{\alpha \in -R^+} k x_\alpha y_\alpha$.

3.11.9. Soit $a \mapsto \check{a}$ l'antiautomorphisme de A_n défini par $\check{x}_\alpha = -x_\alpha$, $\check{y}_\alpha = -y_\alpha$. Grâce à 3.11.8(i) on voit que $M(\lambda)$ admet la structure d'un A_n module simple, c'est à dire $k[x_\alpha : \alpha \in -R^+]$ où x_α agit par multiplication et y_α par différentiation. On considère $M(\lambda)^*$ comme A_n module selon $(am, n) = (m, \check{a}n)$, $\forall\, m \in M(\lambda)^*$, $n \in M(\lambda)$, $a \in A_n$. Comme ad $x_\alpha y_\alpha$ est une dérivation localement semi-simple de A_n, il résulte de 3.11.8(ii) que $\delta(M(\lambda))$ est un sous-A_n module de $M(\lambda)^*$. Comme la dualité $m \times n \mapsto (m,n)$ de $\delta(M(\lambda))_\mu \times M(\lambda)_\mu \to k$ est non-dégénerée pour tout $\mu \in \underline{h}^*$ il en résulte que $\delta(M(\lambda))$ est simple (comme A_n module).

3.12. <u>Problèmes</u>. (Notation 3.11).

1)* Vérifier les assertions de 3.11.8.

2) Montrer que $\delta(M(\lambda))$ est isomorphe comme A_n module à $k[y_\alpha : \alpha \in -R^+]$ où y_α agit par multiplication et x_α par $-d/dy_\alpha$.

3) Soit M un $U(\mathfrak{g})$ module de type fini. Montrer que $M \in \operatorname{Ob} \underline{O}$ si les conditions (ii), (iii) de 3.11.5 sont satisfaits.

4) Montrer que le foncteur $\delta : M \to \delta(M)$ sur $\underline{O}$ est exact.

5)* Soit $Z \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$ et $P = U(\mathfrak{g})Z$ (qui est un idéal primitif minimal). Montrer que $\operatorname{Kdim}(U(\mathfrak{g})/P) + \operatorname{rang} \mathfrak{g} \leq \operatorname{Kdim} U(\mathfrak{g})$. (<u>Remarque</u>. D'après Levasseur ([37], Thm. 3) on a $\operatorname{card} R^+ \leq \operatorname{Kdim} U(\mathfrak{g})/P$. Donc une réponse positive à 3.10.1 donnera égalité).

LEÇON 4. — La localisation des modules et le foncteur de Enright [21].

4.1. La localisation des modules.

4.1.1. Si A est un anneau on désigne par $\underline{M}_A$ la catégorie de tous les A modules. Soit S un ensemble de Ore à gauche d'éléments réguliers de A. Rappelons qu'il existe un sur-anneau $S^{-1}A$ de A (1.1.4) où tous éléments de A sont rendus inversibles. On définit un foncteur S^{-1} de $\underline{M}_A$ dans $\underline{M}_{S^{-1}A}$ en posant $S^{-1}M = S^{-1}A \otimes_A M$. On désigne par $M \to S^{-1}M$ l'homomorphisme canonique $m \mapsto 1 \otimes m$ de M dans $S^{-1}M$. Un sous-module N de $M \in \underline{M}_A$ est dite essentiel si $N \cap M' = 0$ implique $M' = 0$ pour tout sous-module M' de M.

LEMME. —

(i) $\operatorname{Ker}(M \to S^{-1}M) = \{m \in M : \exists s \in S \text{ avec } sm = 0\}$.

(ii) $\operatorname{Im}(M \to S^{-1}M)$ est <u>essentiel dans</u> $S^{-1}M$.

(iii) <u>Le foncteur</u> S^{-1} <u>est exact</u>.

(i) et (ii) sont des conséquences immédiates de la définition de $S^{-1}M$. Comme le produit tensoriel est exact à droite, il suffit de montrer que la suite exacte $0 \to N \to M$ implique une suite exacte $0 \to S^{-1}N \to S^{-1}M$. D'après (i) on a

$N \cap \mathrm{Ker}(M \to S^{-1}M) = \mathrm{Ker}(N \to S^{-1}N)$ et vu de ceci, (iii) résulte de (ii).

4.1.2. Soient $M \in \underline{M}_A$ et L un sous-module de M.

LEMME. —

(i) $S^{-1}L \cap M$ <u>est un sous-module de</u> M <u>contenant</u> L.

(ii) $S^{-1}L \cap M = L \iff \mathrm{Ker}\left(M/L \to S^{-1}(M/L)\right) = 0$.

(i). On a $A(S^{-1}L \cap M) \subset AS^{-1}L \cap M \subset$ $\subset S^{-1}AL \cap M = S^{-1}L \cap M$. (ii) résulte de 4.1.1(i).

4.1.3. Soit I un idéal de A avec $I \cap S = \emptyset$. Alors $S^{-1}I$ est un idéal à gauche de $S^{-1}A$ et c'est un idéal bilatère si et seulement si $IS^{-1} \subset S^{-1}I$. Dans ce cas il résulte de 4.1.2 (ii) que les éléments de S sont réguliers dans A/I si et seulement si $S^{-1}I \cap A = I$.

LEMME. — <u>Soit</u> $M \in \underline{M}_A$ <u>et posons</u> $I = \operatorname{Ann} M$.

(i) $\operatorname{Ker}(M \to S^{-1}M) = 0 \Rightarrow I \cap S = \phi$ <u>et</u> $S^{-1}I \cap A = I$.

(ii) <u>Si</u> $\operatorname{Ker}(M \to S^{-1}M) = 0$, <u>alors</u> $I = \operatorname{Ann}_A S^{-1}M$ <u>si et seulement si</u> $IS^{-1} \subset S^{-1}I$.

(i). L'hypothèse entraîne que $\operatorname{Ker}(A/I \to S^{-1}(A/I)) = 0$ et puis (i) résulte de 4.1.2 (ii).

((ii) $\Rightarrow$) résulte du fait que $\operatorname{Ann}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = S^{-1}(\operatorname{Ann}_A S^{-1}M)$ est bilatère dans $S^{-1}A$. Pour ((ii) $\Leftarrow$) on remarque que

$IS^{-1}M \subset S^{-1}IM = 0$.

4.2. <u>Problèmes</u>.

1) Soit S une partie multiplicative de A tel que tout endomorphisme $\operatorname{ad} s : A \to A$ est localement nilpotent.

Montrer que S est Ore dans A et que $S^{-1}I = IS^{-1}$ pour tout idéal de A.

2)* Soit A un anneau noethérien à gauche. Soient S un ensemble de ore à gauche de A et P un idéal premier de A tel que $S \cap P = \phi$. Montrer que $S^{-1}P \cap A = P$. Supposons de plus que A est noethérien à droite. Montrer que les éléments de S sont réguliers dans A/P. En déduire que $PS^{-1} \cap A = P$ et puis que $PS^{-1} \subset S^{-1}P$.

4.3. <u>La catégorie $\underline{O}$ pour</u> $sl(2)$.

4.3.1. Désormais on désigne par $\underline{s}$ l'algèbre de Lie de base $\{e, f, h\}$ introduit en 3.4.1. Dans la notation de 3.11.1 on peut choisir $\underline{h} = kh$, puis $X_\alpha = e$, $X_{-\alpha} = f$, $\underline{n}^+ = ke$, $\underline{n}^- = kf$. Nous allons classer les modules dans la catégorie $\underline{O}$ de $sl(2)$ (voir 3.11.5 pour la définition de $\underline{O}$)

4.3.2. (Notation 3.11.1, 3.11.4). On a $B = \{\alpha\}$ et donc $\rho = \frac{1}{2}\alpha$. Les vecteurs propres de $\underline{h}$ dans $M(\lambda)$ sont intégrales ssi $2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$ où $(\ ,\ )$ est le produit scalaire de Cartan. On pose $P(R) = \{\lambda \in \underline{h}^* : 2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}\}$.

On désigne par $\underline{O}_\chi$ la sous-catégorie de $\underline{O}$ des objets annulés par une puissance de $Q_\chi \in \operatorname{Max} Z(\underline{s})$. Vu de 3.11.5 tout $M \in \operatorname{Ob} \underline{O}$ est somme directe finie d'objets appartenants aux $\underline{O}_\chi : Q_\chi \in \operatorname{Max} Z(\underline{s})$.

LEMME. — Pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$, les objets simples dans $\underline{O}_{\chi_\lambda}$ (notation 3.11.4) sont $L(\lambda)$ et $L(-\lambda)$.

Ceci résulte 3.11.4, 3.11.5.

4.3.3. En prenant une base de l'espace de plus haut poids on voit que $\operatorname{Ext}(L(\lambda),L(\lambda)) = 0$.

LEMME. — Si $\lambda \notin P(R) - \{0\}$, tout $M \in \operatorname{Ob} \underline{O}_{\chi_\lambda}$ indécomposable est simple.

En effet si $\lambda \notin P(R) - \{0\}$, alors $2\lambda \notin \mathbb{Z}B$ et il résulte que $\mathrm{Ext}\big(L(\lambda), L(-\lambda)\big) = 0$.

4.3.4. LEMME. — Si $\lambda \in P(R) - \{0\}$ on a

$\dim \mathrm{Ext}\big(L(\lambda), L(-\lambda)\big) = 1$.

Comme $\delta(L(\lambda)) \cong L(\lambda)$ on a tout d'abord

$$(*) \qquad \mathrm{Ext}\big(L(\lambda), L(-\lambda)\big) \cong \mathrm{Ext}\big(L(-\lambda), L(\lambda)\big).$$

Supposons désormais que $(\lambda, \alpha) > 0$. Alors $M(\lambda)$ est indécomposable. C'est une extension de $L(-\lambda) \cong M(-\lambda)$ par $L(\lambda)$. Donc $\dim \mathrm{Ext}\big(L(\lambda), L(-\lambda)\big) \geq 1$. Soit $Q(\lambda)$ un quotient de $M(\lambda)$. Si $M \in \mathrm{Ob}\, \underline{O}_{\chi_\lambda}$ et si $M \xrightarrow{\varphi} Q(\lambda)$ est surjectif, alors tout $v \in \varphi^{-1}(Q(\lambda)_{\lambda-\rho})$ est un vecteur de plus haut poids. Il en résulte que $M(\lambda)$ est projectif dans $\underline{O}$. D'autre part grâce à $(*)$ on a $\dim_k\big(\mathrm{Ext}\,(M(-\lambda), L(\lambda))\big) \geq 1$, donc $M(-\lambda)$ n'est pas projectif.

Soit E un $\mathfrak{s}$ module de dimension finie. On note $e_t : t \in \mathbb{Z}$ un vecteur non-nul (si l'on existe) de poids $(\alpha/2)t$ dans E. Si $\dim E = \ell + 1 : \ell \in \mathbb{N}$ alors

$\{e_t \; : \; t = \ell, \ell-2, \ldots, -\ell\}$ est une base de E.

Soit $\mu \in \underline{h}^*$ et considérons $M(\mu) \otimes E$ comme $U(\underline{s})$ module pour l'action diagonale. Rappelons que v_μ est le générateur canonique de poids $\mu - \rho$ de $M(\mu)$ et posons

$M_s = U(\underline{g})\left(v_\mu \otimes e_{2s-\ell}\right) \; : \; s = 0, 1, 2, \ldots, \ell$. Un calcul facile montre que $M_0 = M(\mu) \otimes E$ et que

$M_s / M_{s+1} \cong M\left(\mu + (s - \ell/2)\alpha\right)$. (voir [7], 7.6.14, pour le résultat correspondant pour $\underline{s}$ semisimple quelconque).

Prenons $\lambda = \mu$. Comme $\dim E < \infty$, le foncteur $M \mapsto E \otimes M$ sur $\underline{O}$ est exact et donc $M(\lambda) \otimes E$ est projectif.

Par hypothèse $\lambda = \ell(\alpha/2) \; : \; \ell \in \mathbb{N}^+$. Soit $\dim E \geq \ell + 1$.

Alors la composante de $M(\lambda) \otimes E$ dans O_{χ_λ} est d'après 3.11.4 une extension $T(\lambda)$ du module projectif $M(\lambda)$ par $M(-\lambda)$.

Comme $M(-\lambda)$ n'est pas projectif cette extension est non-triviale.

Le sous-module $M(\lambda)$ de $T(\lambda)$ est lui-même une extension de

$M(-\lambda)$ par $L(\lambda)$. Il en résulte que $\delta(T(\lambda)) \cong T(\lambda)$ et donc $T(\lambda)$ est injectif dans $\underline{O}$. On a aussi vu que $\mathrm{Hom}\,(T(\lambda), L(\lambda)) = 0$. De la suite courte exacte

$$(**) \qquad 0 \to M(\lambda) \to T(\lambda) \to M(-\lambda) \to 0$$

on a la suite longue exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(M(-\lambda), L(\lambda)) \to \mathrm{Hom}\,(T(\lambda), L(\lambda)) \to \mathrm{Hom}\,(M(\lambda), L(\lambda)) \to$$
$$\to \quad \mathrm{Ext}(M(-\lambda), L(\lambda)) \to \mathrm{Ext}\,(T(\lambda), L(\lambda)) \to$$

Tenant compte des observations precedentes on trouve

$$\mathrm{Ext}\,(L(-\lambda), L(\lambda)) \cong \mathrm{Hom}(M(\lambda), L(\lambda)),$$

d'où l'assertion du lemme.

4.3.5. Posons $P(R)^{++} = \{\lambda \in P(R) : (\lambda, \alpha) \geqslant 0\}$.

COROLLAIRE. — <u>Soit</u> $\lambda \in P(R)^{+} - \{0\}$. Tout $M \in \underline{O}_{\chi_\lambda}$ <u>indécomposable</u> <u>est isomorphe</u> <u>à un des modules</u> <u>dans l'ensemble</u> $\{L(-\lambda), L(\lambda), M(\lambda), \delta M(\lambda), T(\lambda)\}$.

<u>Les seuls modules projectifs dans</u> $\underline{O}$ <u>sont</u> $M(\lambda)$ <u>et</u> $T(\lambda)$.

4.3.6. On s'interesse guère au cas $\lambda \notin P(R)$. On pose donc $\underline{Q}$ la sous-catégorie de $\underline{O}$ de tous les objets admettant que des poids dans $P(R)$. Si $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}$ et E est un $\underline{s}$ module de dimension finie, alors $E \otimes M \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}$ et le foncteur $M \mapsto E \otimes M$ est exact sur $\underline{Q}$. Si $\lambda \in P(R)^+$, on pose $P(\lambda) = M(\lambda)$, $I(\lambda) = \delta M(\lambda)$, $E(\lambda) = L(\lambda)$, $V(\lambda) = L(-\lambda)$ ce que nous permet de laisser tomber λ. Si $\lambda = 0$, tous ces modules sont simples et isomorphes, et $T(0) \cong M(0) \oplus M(0)$.

4.3.7. On désigne par $\underline{Q}_+$ (resp. $\underline{Q}_-$) la catégorie de tous les objets somme directe des $P(\lambda)$ (resp. $V(\lambda)$) et de $T(\lambda)$: $\lambda \in P(R)^+$.

LEMME. — Soit E un $\underline{s}$ module de dimension finie.

(i). Si $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}_+$, alors $E \otimes M \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}_+$.

(ii). Si $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}_-$, alors $E \otimes M \in \mathrm{Ob}\,\underline{Q}_-$.

(i). Rappelons que $\underline{\underline{O}}_+$ est exactement l'ensemble des objets projectifs dans $\underline{\underline{O}}$. Comme $M \mapsto E \otimes M$ est exact on trouve (i).

(ii). Soit $\lambda \in P(R)^+ - \{0\}$. On a vu dans la démonstration de 4.3.4 que $M(-\lambda) \otimes E$ est somme directe de modules $M(\mu), M(-\mu), T(\mu) : \mu \in P(R)^+$. On a $\delta(M(-\lambda)) \cong M(-\lambda)$, $\delta E \cong E$, d'où $\delta(M(-\lambda) \otimes E) = M(-\lambda) \otimes E$. D'autre part $\delta(M(\mu)) \not\cong M(\mu)$ si $\mu \in P(R)^+ - \{0\}$, d'où (ii).

4.4. Problèmes.

1)*. Soit $\underline{s}$ semi-simple quelconque. Montrer que pour tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$, $\lambda \in \underline{h}^*$ on a

$$\mathrm{Ext}^*(M(\lambda), M) \cong H^*(\underline{n}^+, M)_{\lambda - \rho}.$$

En déduire 4.3.4.

2). Montrer 4.3.7 par des calculs bêtes.

4.5. Le foncteur de Enright.

On se place toujours dans les hypothèses de 4.3.

4.5.1. On pose $S = \{f^\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$. C'est un ensemble de Ore pour $U(\underline{s})$. Si M est un $U(\underline{s})$ module on désigne par $C(M)$ le plus grand sous module de $S^{-1}M$ dans lequel l'action de e est localement nilpotent.

LEMME. — *Si* $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$, *alors* $C(M) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$.

Verifions les conditions de 3.11.5. Alors (iii) est claire et (ii) résulte de la construction. De 4.1.1, et 4.1.3 et 4.2.1 on trouve $\mathrm{Ann}\, C(M) \supset \mathrm{Ann}\, M$, d'où (iv). Il en résulte que tout sous $U(\underline{s})$ de type fini de $C(M)$ est dans la categorie $\underline{O}$. D'autre part 4.1.1 entraîne que $\mathrm{Soc}_{U(\underline{s})}\, C(M) = \mathrm{Soc}_{U(\underline{s})}\left(\mathrm{Im}\left(M \to S^{-1}M\right)\right) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$. Vu de 3.11.5 on trouve $C(M) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$.

4.5.2. Le foncteur $M \longmapsto C(M)$ sur $\mathrm{Ob}\,\underline{O}$ s'appelle le foncteur de Enright. Tandis que $M \mapsto S^{-1}M$ est exacte on verra que C n'est que exacte à gauche.

4.5.3. Avec le cas d'une algèbre de Lie semi-simple quelconque en vue on dira que $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$ est α-libre (α-fini) si $\mathrm{Ker}\,(M \mapsto S^{-1}M) = 0$ (resp. $\mathrm{Ker}\,(M \mapsto S^{-1}M) = M$). C'est claire que $\mathrm{Im}\,(M \mapsto S^{-1}M)$ (resp. $C(M) / \mathrm{Im}(M \mapsto S^{-1}M)$) est toujours α-libre (resp. α-fini).

4.5.4. (Notation 4.3.6). C'est claire que $\underline{Q}$ et son complement dans $\underline{O}$ sont stable sous le foncteur C. (De même pour le foncteur $M \mapsto E \otimes M$, $\dim E < \infty$).

LEMME.— Si $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O} - \mathrm{Ob}\,\underline{Q}$ alors $C(M) \cong M$.

Ceci résulte de 4.3.3, 4.5.1 et 4.5.3.

4.5.5. (Notation 4.3.4, 4.3.6).

LEMME. <u>Pour tout</u> $\lambda \in P(R)^+ \setminus \{0\}$ <u>on a</u>

(i) $C(P(\lambda)) \cong P(\lambda)$.

(ii) $C(V(\lambda)) \cong P(\lambda)$.

(iii) $C(I(\lambda)) \cong P(\lambda)$.

(iv) $C(T(\lambda)) \cong T(\lambda)$.

(v) $C(E(\lambda)) \cong 0$.

On se permet de laisser tomber λ. On rappel que $\dim E < \infty$, donc $S^{-1}E = 0$, d'où (v) et de même $S^{-1}P \cong S^{-1}V \cong S^{-1}I$. Il en résulte que $C(P) \cong C(V) \cong C(I)$. Comme P est α-libre, on a $P \hookrightarrow C(P)$ et de 4.1.1 on a $\operatorname{Soc} C(P) = \operatorname{Soc} P \cong V$. De 4.1.3 (ii) et 4.2.1 on a $\operatorname{Ann} C(P) = \operatorname{Ann} P$ et donc $C(P) \in \operatorname{Ob} \underline{O}_{\chi_\lambda}$. Comme $C(P)/P$ est α-fini il en résulte que $C(P)/P$ est somme directe de n copies de E. Grâce à 4.3.4 on voit que P admet aucun extension non-triviale par E. Donc $C(P) = P$.

Il reste à démontrer (iv). Comme T est α-libre, on a $T \hookrightarrow C(T)$ et $\mathrm{Soc}\, C(T) = \mathrm{Soc}\, T \cong V$. En particulier $C(T)$ est indécomposable et comme T est injectif on trouve $T = C(T)$.

4.5.6. Le foncteur C est evidemment exacte à gauche, mais la comparaison de 4.5.5 (iv) avec 4.5.5 (i),(ii) montre que c'est pas exacte. Malgré cela on peut comme même faire des calculs precises de $C(M)$: $M \in \mathrm{Ob}\, \underline{O}$ (pour $\underline{s}$ semi-simple quelconque). Un outil essentiel est le resultat suivant (dû à Enright).

PROPOSITION — <u>Pour tout</u> $M \in \mathrm{Ob}\, \underline{O}$ <u>et tout module de dimension finie on a</u>

$$C(M \otimes E) \cong E \otimes C(M).$$

Il suffit de prendre M indécomposable. Si $M \notin \operatorname{Ob} \underline{Q}$, l'assertion résulte de 4.5.4. Si $M \in \operatorname{Ob} \underline{Q}$ l'assertion résulte de 4.3.5, 4.3.7 et 4.5.5.

4.6. Problèmes.

1) Montrer 4.5.5 et 4.5.6 par des calculs bêtes.

2 Vérifier la table suivante, où $P = P(\lambda)$ etc.

	P	I	V	E	T
Projectif	oui	non	non	non	oui
injectif	non	oui	non	non	oui
fini	non	non	non	oui	non
f-libre	oui	non	oui	non	oui
forme-non-dégénérée	non	non	oui	oui	oui

4.7. Le foncteur de Enright (cas général)

Dans cette section on suppose que $\mathfrak{g}$ est semi-simple quelconque et on garde la notation de 3.11.1, 3.11.4. On fixe $\alpha \in B$ et avec $e = X_\alpha$, $h = H_\alpha$, $f = X_{-\alpha}$, $s = kX_\alpha + kH_\alpha + kX_{-\alpha}$.

On désigne par C_α le foncteur C défini dans 4.5.1. On remarque que $S := \{f^\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble de Ore dans $U(\mathfrak{g})$, et $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} e$ est nilpotente.

Alors si M est un $U(\mathfrak{g})$ module, $C_\alpha(M)$ est un sous $U(\mathfrak{g})$ module de $S^{-1}M$.

4.7.1. Soit $\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}$ la catégorie des $U(\underline{s})$ modules qui sont sommes directes arbitraires des objets de $\underline{O}^{\underline{s}}$.

LEMME. — Soit $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}^{\mathfrak{g}}$.

(i) Considéré comme $U(\underline{s})$ module, on a $M \in \mathrm{Ob}\,\hat{\underline{O}}^{s}$.

(ii) $C_\alpha(M) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}^{\mathfrak{g}}$.

(i). C'est claire que les conditions (ii) et (iii) de 3.11.5 par rapport à $\underline{s}$ sont satisfaits pour M. D'après 3.12.3 il en résulte que tout $U(\underline{s})$ sous-module de M de type fini est un objet de $\underline{O}^{\underline{s}}$. D'où (i).

(ii) Tenant compte du fait que $\alpha \in B$ (qui entraîne $[\mathfrak{f}, X_\beta] = 0, \forall \beta \in B$) il résulte que $C_\alpha(M)$ satisfait à la propriété (ii) de 3.11.5. La propriété (iii) est claire. Il en résulte de 3.12.3 que tout $U(\mathfrak{g})$ sous-module de $C_\alpha(M)$ de type fini est un objet de $\underline{O}^{\mathfrak{g}}$. D'autre part 4.1.1 entraîne que $\mathrm{Soc}_{U(\mathfrak{g})}\, C_\alpha(M) = \mathrm{Soc}_{U(\mathfrak{g})}\left(\mathrm{Im}(M \to S^{-1}M)\right) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}^{\mathfrak{g}}$.

Vu de 3.11.5 ceci entraîne que $C_\alpha(M) \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}^{\mathfrak{g}}$.

4.7.2. On appel $C_\alpha : M \mapsto C_\alpha(M)$ le foncteur de Enright par rapport à la racine simple α. Par conséquence directe de 4.5.6 on a

PROPOSITION. — *Pour tout* $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}^{\mathfrak{g}}$ *et tout* $U(\underline{s})$ *module* E *de dimension finie on a*

$$C_\alpha(M \otimes E) \cong E \otimes C_\alpha(M).$$

4.7.3. On pose $\mathfrak{p}_\alpha = \underline{b} \oplus k X_{-\alpha}$. C'est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. On pose $\underline{m}_\alpha$ (resp. $\underline{r}_\alpha$) son composant nilpotent (resp. réductive). On pose $\underline{m}_\alpha^- = \sigma(\underline{m}_\alpha)$ (notation 3.11.6) et $\underline{s}_\alpha = [\underline{r}_\alpha, \underline{r}_\alpha]$ qui est isomorphe à $sl(2)$. On a $\underline{r}_\alpha = \underline{h} + \underline{s}_\alpha$. Souvent on laisse tomber α. Pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$ on désigne encore par k_λ la restriction de k_λ (notation 3.11.4) à $\underline{b}_\alpha := k X_\alpha \oplus \underline{h}$ et on pose $M_{\underline{r}}(\lambda) := U(\underline{r}) \otimes_{U(\underline{b}_\alpha)} k_\lambda$. Tandis que

$M_{\underline{r}}(\lambda)$ est de plus haut poids $\lambda-\rho$ et ρ est défini que dans $\mathfrak{g}$, ceci à peut d'importance parce que $(\alpha, \rho - \alpha/2) = 0$. On a l'isomorphe de $\underline{s}$ modules

$$(*) \qquad M(\lambda) \cong U(\underline{m}^-) \otimes M_{\underline{r}}(\lambda),$$

où $U(\underline{m}^-)$ est considéré comme $\underline{s}$ module pour l'action adjointe de $\underline{s}$ (et il est donc somme directe de modules de dimension finie).

PROPOSITION. — Pour tout $\lambda \in \underline{h}^*$ on a

$$C_\alpha M(\lambda) \cong \begin{cases} M(s_\alpha \lambda) : \dfrac{2(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{N}^-. \\ M(\lambda) : \text{sinon}. \end{cases}$$

D'après 4.7.2 et $(*)$ on a

$$C_\alpha(M(\lambda)) \cong C_\alpha\left(U(\underline{m}^-) \otimes M_{\underline{r}}(\lambda)\right)$$

$$\cong U(\underline{m}^-) \otimes C_\alpha(M_{\underline{r}}(\lambda)).$$

L'assertion donc résulte de 4.5.4 et 4.5.5.

4.7.4. On désigne par $\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}_{+}$ (resp. $\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}_{-}$) la sous-catégorie de $\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}$ qui sont des sommes directes arbitraires des objets $P(\mu)$, $T(\mu)$ (resp. $V(\mu)$, $T(\mu)$) : $\mu \in \underline{h}^*$.

LEMME. — *Pour tout* $\lambda \in \underline{h}^*$ *on a*

(i) $M(\lambda) \in \mathrm{Ob}(\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}_{+})$ *si* $\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{N}^+$,

et $M(\lambda) \in \mathrm{Ob}(\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}_{-})$ *sinon*.

(ii) $L(\lambda)$ *est* α-*fini* *si* $\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{N}^+$,

et $L(\lambda) \in \mathrm{Ob}(\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}_{-})$ *sinon*.

(i). Ceci résulte de (*) de 4.7.3 et 4.3.7.

(ii). Si $2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{N}^+$ il résulte de 4.7.3 que $L(\lambda)$ est un quotient de $C_\alpha(M(s_\alpha\lambda))/M(s_\alpha\lambda)$ donc α-finie. Au cas contraire il résulte de (i) que (comme $\underline{s}$ module) $L(\lambda)$ est un quotient d'un objet de $\hat{\underline{O}}^{\underline{s}}_{-}$. Il est donc somme directe d'un objet de $\hat{\underline{O}}^{s}_{-}$ et des $I(\mu)$: $\mu \in \underline{h}^*$. Comme $\mathrm{Ker}\left(I(\mu) \to S^{-1}I(\mu)\right) \cong E(\mu) \neq 0$, alors si $L(\lambda) \notin \mathrm{Ob}\,\hat{\underline{O}}^{s}_{-}$ on aurait $\mathrm{Ker}\left(L(\lambda) \mapsto S^{-1}L(\lambda)\right) \neq 0$. Comme S est Ore dans $U(\underline{g})$ ce noyau est un sous-module de $L(\lambda)$ donc $L(\lambda)$ tout entier. Comme $L(\lambda)$ n'est pas α-fini ceci est impossible, d'où (ii).

4.7.5. Pour pouvoir calculer $C_\alpha(L(\lambda))$ nous allons introduire un nouveau foncteur D_α. Soit $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}^*$. On désigne par N le plus grand $U(\underline{s})$ sous-module de M qui soit α-fini. On a $N = \mathrm{Ker}\left(M \mapsto S^{-1}M\right)$, de sorte que N est un sous $U(\underline{g})$ module de M et que l'application $M/N \to S^{-1}(M/N)$ est injective. On désigne par $D_\alpha(M)$ le plus petit $U(\underline{s})$ sous-module de M/N tel que $(M/N)/D_\alpha(M)$ soit α-fini. C'est encore un $U(\underline{g})$ sous-module de M/N (parce que $\mathrm{ad}_{\underline{g}}\, f$ est nilpotente) et c'est même le plus petit sous-module de M/N tel que $S^{-1}(D_\alpha(M)) = S^{-1}(M/N)$.

Comme pour C_α on peut calculer $D_\alpha(M)$ par décomposition de M en somme directe de $W(\underline{s})$ modules indecomposables donc dans $\mathrm{Ob}\,\underline{O}^s$. Dans la notation de 4.5.4 et 4.5.5 on laissant tomber λ on a

LEMME. —

(i) <u>Si</u> $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}^s \setminus \mathrm{Ob}\,\underline{Q}^s$, <u>alors</u> $D_\alpha(M) = M$.

(ii) <u>Sinon on a</u>, $D_\alpha(P) = V$, $D_\alpha(V) = V$,

$D_\alpha(I) = V$, $D_\alpha(T) = T$, $D_\alpha(E) = 0$.

4.7.6. On désigne par $\overline{M(\lambda)}$ le plus grand sous module de $M(\lambda)$. On a donc une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \overline{M(\lambda)} \to M(\lambda) \to L(\lambda) \to 0.$$

LEMME. — <u>Pour tout</u> $\lambda \in \underline{h}^*$ <u>on a</u>

(i) $C_\alpha(L(\lambda)) \cong L(\lambda)$ <u>si</u> $\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \notin \mathbb{N}^+ \cup \mathbb{N}^-$.

(ii) $C_\alpha(L(\lambda)) = 0$ si $\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{N}^+$.

(iii) Si $2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{N}^-$, on a une suite exacte

$$0 \to C_\alpha(\overline{M(\lambda)}) \to M(s_\alpha\lambda) \to C_\alpha(L(\lambda)) \to \overline{M(\lambda)}/D_\alpha(\overline{M(\lambda)}) \to 0.$$

(i) résulte de 4.7.5 (i). (ii) résulte de 4.7.4 (ii).

Pour (iii) on remarque tout d'abord qu'on a une suite exacte

$$0 \to C_\alpha(P) \to C_\alpha(T) \to C_\alpha(V) \to P/D_\alpha(P) \to 0.$$

En effet ceci résulte de 4.7.5 (ii), 4.5.5 et (**) de 4.8.4. D'autre part l'hypothèse sur λ entraîne d'après 4.7.4 (i) que $M(\lambda)$ est somme directe des modules T et V. De plus d'après 4.7.4 (ii), $\overline{M(\lambda)}$ coupe le module non-simple T que dans la manière décrit par la suite exacte

$$0 \to P \to T \to V \to 0,$$

Finalement $C_\alpha(M(\lambda)) \cong M(s_\alpha \lambda)$ d'après 4.7.3

et l'assertion en résulte.

<u>Remarque</u>. Cette conclusion aurait été faux si $\overline{M(\lambda)}$ aurait coupé T selon la suite exacte

$$0 \to V \to T \to I \to 0$$

4.8 <u>Problèmes</u>.

Soit $\lambda \in \underline{h}^*$ tel que $2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{N}^-$.

1) Servir de 4.4.1 et la forme contravariant sur un objet simple L de $\underline{O}$ pour montrer que

$$\mathrm{Ext}^*(M(\mu), L) \cong H_*(\underline{n}^-, L)_{\mu-\rho}, \quad \forall \mu \in \underline{h}^*.$$

En déduire que $\mathrm{Ext}^*(M(s_\alpha \lambda), L(\lambda)) = 0$. En déduire que $\mathrm{Hom}(\overline{M(s_\alpha \lambda)}, L(\lambda)) \cong \mathrm{Ext}^1(L(s_\alpha \lambda), L(\lambda))$.

2) Déduire de 4.7.3 que $L(\lambda)$ est de multiplicité 1 dans $M(s_\alpha \lambda)$.

3) Montrer que $\mathrm{Soc}\left(\mathrm{Im}\, M(s_\alpha\lambda) \to C_\alpha L(\lambda)\right) \cong L(\lambda)$.

En déduire que $C_\alpha(\overline{M(\lambda)})$ est le plus grand sous-module de $M(s_\alpha\lambda)$ admettant aucun sous-quotient isomorphe à $L(\lambda)$.

4) Il résulte de (1), (2) que $\dim \mathrm{Ext}^1(L(s_\alpha\lambda), L(\lambda)) \leq 1$.

Montrer qu'on a égalité ssi $M(s_\alpha\lambda)/C_\alpha(\overline{M(\lambda)})$ est isomorphe à une extension non-triviale de $L(\lambda)$ par $L(s_\alpha\lambda)$.

5)** Soit $L(w\lambda)$ un sous-quotient de $\overline{M(\lambda)}$. Servir de l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(L(\lambda), L(w\lambda)) \cong \mathrm{Ext}^1(L(w\lambda), L(\lambda))$ et (1) pour montrer qu'on a une injection de $\mathrm{Hom}(\overline{M(\lambda)}, L(w\lambda))$ dans $\mathrm{Ext}^1(M(w\lambda), L(\lambda))$. Est-il bijective ?

6)** $C_\alpha(L(\lambda))/L(\lambda)$ est-il semi-simple ?

Les réponses de 5), 6) sont toutes les deux positives si une conjecture de Jantzen à une réponse positive ([23], Sect. 4). Elles permettent le calcul explicit de $C_\alpha(L(\lambda))/L(\lambda)$.

7)* Supposons que $B = \{\alpha, \beta\}$ est de type A_2 ($\mathfrak{g} \cong sl(3)$), et prenons $-\lambda \in P(R)^{++}$. Calculer $C_\alpha L(w\lambda)$, $C_\beta L(w\lambda)$, $\forall w \in W$. En déduire que $C_\alpha C_\beta C_\alpha L(s_\beta \lambda) = C_\alpha L(s_\beta \lambda)$ tandis que $C_\beta L(s_\beta \lambda) = 0$.

Ceci montre que $C_\beta C_\alpha C_\beta \neq C_\alpha C_\beta C_\alpha$ sur $\underline{O}$.

Cette relation est quand-même vrai sur la sous-categorie de $\underline{O}$ de $U(\mathfrak{g})$ modules qui sont à la fois α et β libres.

8)* Montrer que $C_\alpha^2 = C_\alpha$. Si $w \in W$, on appelle décomposition réduite (w, r) de w toute expression de w comme produits $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_t}$ de réflections s_{α_i} ($\alpha_i \in B$) avec t minimal. Posons $C_{(w,r)} = C_{\alpha_1} C_{\alpha_2} \dots C_{\alpha_t}$. Soit $M \in Ob\underline{O}$ et $U(\underline{n}^-)$ libres. Montrer que $C_{(w,r)}(M)$ ne dépend que de w. (Montrez d'abord qu'il suffit de considérer le cas rang $\mathfrak{g} = 2$, et démontrez ce cas en utilisant les relations de ([7], 7.8.8).) Ce résultat est dû à Deodhar ([20], Sect. 4).

<u>Remarque</u>. On peut donné une meilleure définition [32] de C_α valuable même pour une racine quelconque. Ceci permet un calcul de $C_\alpha L(\lambda)$ et par exemple des démonstrations très courtes de 4.7.2 et 4.8.8.

LECON 5. — Principle d'additivité pour rang de Goldie.

Dans cette leçon, A désigne un anneau noethérien, par exemple un quotient d'une algèbre enveloppante. Soit S l'ensemble des éléments réguliers de A. Si A est semi-premier le théorème classique de Goldie ([8], Sect. 7.2) nous dire que S est un ensemble de Ore. Nous verrons dans la suite qu'il est parfois extrement utile d'avoir un résultat qui s'applique dans le cas non-semi-premier. Le résultat principal dans cette direction est dû à Small qui donne une condition necessaire et suffisante (5.1.4) telle que S soit Ore. Cependant la forme de ce théorème n'est pas utile pour application directe aux algèbres enveloppantes. En effet dans les applications connues au présent A est toujours un sous-anneau d'un anneau premier B qui est de type fini comme A module à gauche et comme A module à droite. On sait toujours pas si cela de soi-même entraîne que S est Ore dans A ; mais Gabber a trouvé une condition necessaire et suffisante pour qu'il le soit. Ceci simplifie et éclaircie les calculs de [35]. Voir aussi [15].

5.1. Les théorèmes de Goldie et de Small.

Dans cette section nous allons rappeler plusieurs résultats sans démonstration.

5.1.1. Soit A un anneau noethenein. On dit qu'un ideal est nilpotent si une puissance de cet idéal est nul. Il est claire que la somme de deux idéaux nilpotents est encore nilpotent et donc A admet un unique idéal maximal nilpotent N qui s'appelle le nil-radical de A. On dit qu'un idéal P est premier si $IJ \subset P$ où I, J sont les idéaux de A entraine soit $I \subset P$, soit $J \subset P$. On désigne par $\mathcal{P}$

l'ensemble des idéaux premiers de A. Le résultat suivant remonte à Levitsky.

LEMME. — ([7], 3.1.10).

(i) $\mathcal{P}$ *possède seulement un nombre fini d'éléments minimaux ; soient* $P_1, P_2, \ldots, P_r$ *ces éléments, deux à deux distincts.*

(ii) $N = \bigcap_{i=1}^{r} P_i$.

(iii) *Tout élément de* $\mathcal{P}$ *contient l'un des* P_j.

(iv) *Pour tout* i *on a* $P_i \not\supset \bigcap_{j(\neq i)=1}^{n} P_j$.

5.1.2. Dans la notation de 5.1.1 l'application

$a+N \mapsto (a+P_1, a+P_2, \ldots, a+P_r)$ de A/N dans $\prod(A/P_i)$

est injective et un homomorphisme d'algèbres. On peut donc identifier A/N avec un sous-anneau de l'anneau semi-premier $\prod(A/P_i)$. Le résultat suivant remonte au travaux classiques de Goldie et de Lesieur.

THEOREME. — *Supposons que* $N=0$, *c'est à dire que* A *est semi-premier. Soit* S *l'ensemble des éléments réguliers de* A.

Alors

(i) $S^{-1}A = AS^{-1}$, c'est à dire que S est Ore dans A.

(ii) $S \cap P_i = \phi$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, t$.

(iii) $s \in S \iff s + P_i$ est régulier dans A/P_i, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, t$.

(iv) $S^{-1}P_i = P_i S^{-1}$, en particulier $S^{-1}P_i$ est un idéal de $S^{-1}A$. De plus $S^{-1}P_i \cap A = P_i$.

(v) L'image de S (qu'on désigne aussi par S) dans A/P_i est Ore dans A/P_i. De plus tout $s \in S$ est régulier dans A/P_i.

(vi) $$S^{-1}A = \prod S^{-1}(A/P_i)$$ qui est semi-simple artinien.

(vii) Tout idéal non-trivial de $S^{-1}A$ est un des $S^{-1}P_i$. En particulier $P \in \mathcal{P}$ est minimal ssi $P \cap S = \phi$.

(i) est conséquence du théorème de Goldie ([8], Sect. 7.2). (ii) résulte de 5.1.1 (iv). (iii) $\Leftarrow$ est claire. Pour ((iii) $\Rightarrow$) soit $P \in \mathcal{P}$ et posons $I = \{a \in A : sa \in P$ pour quelque $s \in S\}$. C'est évidemment idéal à droite de A et la condition de Ore à gauche entraine qu'il est un idéal à droite. Comme A est noetherien à droite on a une somme finie $I = \sum a_i A$ et donc un élément $s \in S$ tel que $sI \subset P$. Comme P est premier il résulte que soit $s \in P$, soit $I \subset P$.

Donc (iii) $\Rightarrow$) résulte de (ii).

(iv) résulte de (ii) et 4.2.2. (v) est conséquence facile de (i) et (iv). (vi) résulte de 5.1.1 (iv) et (v) en rappelant que les $S^{-1}(A/P_i)$ sont simples, artiniens ([8], 7.2.2). (vii) résulte de (vi).

5.1.3. Soient A un anneau noethérien et S l'ensemble des éléments réguliers de A. Supposons que S est Ore dans A et posons $\underline{N}(A)$ le nilradical de A et $\underline{N}(S^{-1}A)$ le nilradical de $S^{-1}A$ (on vérifie facilement que $S^{-1}A$ est noethérien).

LEMME —

(i) $\underline{N}(S^{-1}A) \cap A = \underline{N}(A)$.

(ii) Si $s \in S$, alors $s + \underline{N}(A)$ est régulier dans $A/\underline{N}(A)$.

(i). C'est clair que $\underline{N}(S^{-1}A) \cap A \subset \underline{N}(A)$. Pour l'inclusion inverse il suffit d'après ([9], 7.2.3) de montrer que $\bar{A} := A/(A \cap \underline{N}(S^{-1}A))$ admet un anneau de fractions qui est semi-simple artinien. On a tout d'abord une plongement $\bar{A} \hookrightarrow \bar{R} := S^{-1}A/\underline{N}(S^{-1}A)$. Par construction $\bar{R}$ est semi-simple, artinian et donc admet un anneau de fractions qui est semi-simple, artinien (5.1.2 (vi)). D'autre part tout élément $s \in S$ est inversible dans $S^{-1}A$ et donc son image dans $\bar{R}$ est encore inversible et il en résulte que Fract $\bar{A}$ = Fract $\bar{R}$.

(ii). D'après (i) on a $S^{-1}\underline{N}(A) \subset S^{-1}\underline{N}(S^{-1}A) \subset \underline{N}(S^{-1}A)$. Donc $S^{-1}\underline{N}(A) \cap A = \underline{N}(A)$. Pareillement $\underline{N}(A)S^{-1} \cap A = \underline{N}(A)$ et puis (ii) résulte de 4.1.2 (ii).

5.1.4. (Notation 5.1.3).

THEOREME. – (Small [43], 2.11, 2.12). <u>Les conditions suivantes sont equivalentes</u>

(i) S est libre dans A et $S^{-1}A$ est artinian.

(ii) $s+\underline{N}(A)$ régulier dans $A/\underline{N}(A)$ implique $s\in S$.

5.2. Problèmes.

1) Soit A un anneau artinian et $s\in A$ régulier à gauche. Montrer que s est inversible dans A.

2) (Notations et hypothèses de 5.1.3). Supposons que $S^{-1}A/\underline{N}(S^{-1}A)$ est artinian et soit $s\in A$ tel que $s+\underline{N}(A)$ est régulier dans $A/N(A)$. Montrer que l'image de $s+\underline{N}(A)$ dans $S^{-1}A/\underline{N}(S^{-1}A)$, (c'est à dire $s+\underline{N}(S^{-1}A)$) est inversible dans $S^{-1}A/\underline{N}(S^{-1}A)$.

En déduire (i) $\Rightarrow$ (ii) en 5.1.4.

3) On pose $A=\mathbb{Q}[[x,y]]/\langle x^2,xy\rangle$. Montrer que $S=\{1\}$, et que $\underline{N}(A)=\langle x\rangle/\langle x^2,xy\rangle$. On a $A/N(A)\cong\mathbb{Q}[[y]]$ qui n'est pas artinian et donc A n'est pas aussi. Tandis que y n'est pas régulier dans A son image dans

$A/\underline{N}(A)$ est régulier.

5.3. Critère de Gabber.

Dans cette section A désigne un anneau noethérien, B un sur-anneau premier de A qui est noethérien (par exemple si B est de type fini comme A module à gauche et A^{op} module à droite). On note S (resp. T) l'ensemble des éléments réguliers de A (resp. B).

5.3.1. D'après 5.1.2, T est Ore dans B et $\text{Fract}\, B := T^{-1}B = BT^{-1}$ est simple, artinien. On pose $F = \text{Fract}\, B$. On a $F \cong M_n(K)$ (notation 2.1). L'anneau F est de longueur n comme F module à droite et donc de longueur finie comme $A - F^{op}$ bimodule. Suivant Gabber prenons $F = F_1 \supsetneq F_2 \supsetneq \dots \supsetneq F_{T+1} = 0$ une suite de composition comme $A-F^{op}$ bimodule. Tout quotient $\overline{F}_i := F_i / F_{i+1}$ est donc simple comme $A-F^{op}$ bimodule et comme F^{op} module il est somme directe finie de F^{op} modules simples. On pose $Q_i = \mathrm{Ann}_A \overline{F}_i$ et $\mathcal{Q} = \{Q_i\}_{i=1}^{r}$. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des idéaux premiers de A et par $\mathcal{P}_0$ l'ensemble (fini d'après 5.1.1 (i)) des éléments minimaux de $\mathcal{P}$. Soit N le nilradical de A.

LEMME. —

(i) $Q_i \in \mathcal{P}$, $\forall\, i = 1,2,\dots,r$.

(ii) $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0$.

(i). Soit I, J les idéaux de A tels que $IJ \subset Q_i$. Si $J\overline{F}_i \neq 0$, alors $J\overline{F}_i F = \overline{F}_i$ et puis $I \subset Q_i$. D'où (i).

(ii). Soit $M = \bigcap Q_i$. Alors $M^r = 0$ et il résulte que $M \subset N$. D'après (i) et 5.1.1 (iii) on a donc égalité et d'après 5.1.1 (iv) ceci entraîne (ii).

5.3.2. THEOREME – (Gabber, non-publié). Les conditions suivantes sont equivalentes

(i) S est Ore dans A, $S^{-1}A$ est artinien et $S \subset T$.

(ii) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_o$.

On suppose que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_o$. Soit $s \in A$ tel que $s+N$ est régulier dans A/N. Nous démontrons que $r_B(s) := \{ b \in B : sb = 0 \} = 0$. Comme B est premier et noetherien à droite ceci entraîne (d'après [8], Lemme 7.2.3) que $s \in T$ et a fortiori $s \in S$. Puis (i) résulte de 5.1.4.

D'après l'hypothèse sur s et 5.1.2 (iii) il en résulte que $s+P$ est régulier dans A/P pour tout $P \in \mathcal{P}_o$ et donc pour tout $P \in \mathcal{P}$. Supposons qu'il existe $0 \neq b \in B$ tel que $sb = 0$. Choisissons $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ tel que $b \in F_i$, $b \notin F_{i+1}$ et posons $P = Q_i$. Soient S_1 l'ensemble des éléments reguliers de A/P et φ l'application canonique de $\overline{F}_i$ dans $S_1^{-1}\overline{F}_i$. Alors

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ b \in \overline{F}_i : sb = 0$ pour quelque $s \in S_1 \}$ est un $(A/P)-F^{op}$ sous-module de $\overline{F}_i$ non-nul et donc $\overline{F}_i$ tout entier.

Soit $\{\overline{b}_j\}_{j=1}^{t}$ un système de générateurs de $\overline{F}_i$ comme F^{op} module.

Alors pour tout $j = 1,2,\ldots,t$ il existe $s_j \in S_1$ tel que $s_j \overline{b}_j = 0$.

La condition de ore sur S_1 fournit des éléments $u, u_1, u_2, \ldots, u_t \in S_1$ satisfaisants $u = u_j s_j$, $\forall j$. Puis $u\overline{b}_j = u_j s_j \overline{b}_j = 0$, $\forall j$ et il en résulte que $u \in P$ ce qui est absurde.

Démontrons $(i) \Rightarrow (ii)$. Soient $s \in S$ et $i \in \{1,2,\ldots,r\}$. Alors $F_i \supset sF_i \supset s^2 F_i \supset \cdots$, est une suite décroissante de F modules à droite donc stationnaire. Comme $s \in S \subset T$ il résulte de $s^\ell F_i = s^{\ell+1} F_i$ que $F_i = sF_i$. D'autre part supposons que $Q_i \notin \mathcal{P}_0$, c'est à dire que Q_i n'est pas un idéal minimal premier de A. D'après 5.1.2 (iv), 5.1.3 (ii) $S^{-1}Q_i$ n'est un idéal minimal premier de $S^{-1}A$. Comme $S^{-1}A$ est artinien tout idéal premier est maximal donc $S^{-1}Q_i = S^{-1}A$, puis $Q_i \cap S \neq \emptyset$. Soit $s \in Q_i \cap S$. Alors $sF_i \subset F_{i+1}$ en contradiction avec notre première observation.