COROLLAIRE. (notation 1.1.6) — *Soit* ∂ *une dérivation de* A. *Alors* $\operatorname{rk} A[X]_\partial = \operatorname{rk} A$.

D'après 1.1.6 (ii) et 1.9.2 on a

$$S^{-1}(A[X]_\partial) \cong (S^{-1}A)[X]_\partial \cong M_n \otimes K[X]_\partial .$$ Quitte avec 1.2.2.

1.9.4. Soit ∂ une dérivation de A. Si A est intègre, alors A^∂ l'est aussi ; par contre A premier n'implique pas que A^∂ est premier. Néanmoins les choses sont meilleures dans la direction opposée.

Désormais on suppose que ∂ est une dérivation localement nilpotente de A, que $A \neq A^\partial$ et que A^∂ est premier et Goldie à gauche.

1.9.5. Soit S (resp. T) l'ensemble des éléments réguliers de A (resp. A^∂).

LEMMA. — $T = S^\partial$.

L'inclusion $T \supset S^\partial$ est claire. Soit $(t,a) \in T \times A$ tel que $ta = 0$. Si $a \neq 0$, prenons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\partial^n a \in A^\partial - \{0\}$.

Alors $t(\partial^n a) = 0$, puis $\partial^n a = 0$ qui est une contradiction.

Pareillement $at = 0 \Rightarrow a = 0$.

1.9.6. LEMMA. — L'ensemble $B := \{a \in A : \partial a \in T\}$

n'est pas vide.

On pose $I = \partial A$. Alors I^∂ est idéal de A^∂.
Comme ∂ est localement nilpotente et $A \supsetneq A^\partial$ par hypothèse, on
a $I^\partial \neq 0$. Comme A^∂ est premier et Goldie à gauche, alors
$I^\partial \cap T \neq \phi$, d'où $B \neq \phi$.

1.9.7. LEMME — Pour tout couple $(b,t) \in B \times T$ il existe
un couple $(b',t') \in B \times T$ tel que $t'b = b't$.

On pose $s = \partial b$. On a $s \in T$ et d'après la
condition de Ore il existe $(a, s') \in A^\partial \times T$ tel que $as = s't$.
De plus $a \in T$ et

$$\partial(bs't - sab) = ss't - sas = 0.$$

Puis d'après la condition de Ore il existe $s'' \in T$ tel que

$$s''(bs't - sab) \in A^{\partial} t \subset At.$$

Nous avons donc trouver $b' \in A$ tel que $s''sab = b't$.

Alors $(\partial b')t = s''sas = s''ss't$ et puis $\partial b' = s''ss' \in T$ d'après 1.9.5. Si on pose $t' = s''sa$ nous avons enfin $(b', t') \in B \times T$ et $t'b = b't$.

1.9.8. Soit C le sous-anneau de A engendré par A^{∂} et par B.

LEMMA —

(i) T est une ensemble de Ore à gauche de C.

(ii) Pour chaque $a \in A$ il existe $s \in T$ tel que $sa \in C$.

(iii) T est une ensemble de Ore à gauche de A et $T^{-1}A = T^{-1}C$.

(i) est conséquence directe de 1.9.5 et 1.9.7.

(ii). D'après 1.9.6 il existe $X \in T^{-1}C$ tel que

$\partial X = 1$. On pose $X_n = \frac{1}{n!} X^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ et on a $\partial^n X_n = 1$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ on pose $A_m = \{a \in A : \partial^{m+1} a = 0\}$. On a $A_0 = A^\partial \subset C$ et nous démontrons qu'il existe $t_n \in T$ tel que $t_n A_n \in C + A_{n-1}$, ce qui suffit pour (ii). En effet soit $t_n \in T$ tel que $t_n X_n \in C$. Alors $\partial^n \left(t_n X_n (\partial^n a) - t_n a \right) = 0$, $\forall$ $a \in A_n - A_{n-1}$, de sorte que $t_n a \in A_{n-1} + t_n X^n (\partial^n a) \subset A_{n-1} + C$.

(iii) Si $(a,t) \in A \times T$, soit $s \in T$ comme dans (ii). Alors $(sa, st) \in C \times T$ et d'après (i) il existe $(b,u) \in C \times T$ tel que $usa = bst$. Le couple $(bs, us) \in A \times T$ satisfait donc à la condition de Ore.

La deuxième partie résulte de (ii).

1.9.9. THEOREME. — <u>Soient</u> A <u>une</u> k-<u>algèbre</u> <u>et</u> ∂ <u>une dérivation localement nilpotente de</u> A. <u>Supposons que</u>

A^{∂} est <u>premier et Goldie à gauche</u>. <u>Alors</u>

(i) A <u>est premier et Goldie à gauche</u>.

(ii) $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^{\partial}$.

On peut supposer $A \neq A^{\partial}$ sans restriction de généralité. Soit C (resp. T) comme dans 1.9.8 (resp. 1.9.5). On a vu qu'il existe $X \in D := T^{-1}C$ tel que $\partial X = 1$. Puis d'après 1.1.2 on a $D = D^{\partial}[X]$. D'après 1.9.8 (iii) $D^{\partial} = T^{-1}A^{\partial} = \operatorname{Fract} A^{\partial}$. Il en résulte que $T^{-1}A$ est une algèbre de polynômes tordues sur l'anneau simple, artinian $\operatorname{Fract} A^{\partial}$. Puis (i) résulte de 1.9.2 et (ii) de 1.9.3.

1.10 <u>Problèmes</u>.

1) (Notation 1.9.9). Montrer que $T^{-1}A$ est le plus grand ∂-stable sous-anneau de $\operatorname{Fract} A$ sur lequel ∂ est localement

nilpotente.

2)* Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et $\underline{m}$ le nilradical de $\mathfrak{p}$.
Si J est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{p})$ on note $\mathrm{Ind}(\mathfrak{p}\uparrow\mathfrak{g}; J)$ le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ contenu dans $U(\mathfrak{g})J$.
Posons $I = \mathrm{Ind}(\mathfrak{p}\uparrow\mathfrak{g}, J)$. Montrer que I est premier si est seulement si $I \cap U(\mathfrak{g})^{\underline{m}}$ est premier. (C'est faux que J premier entraîne I premier).

LECON 2. Sous-anneaux simples, artiniens d'un anneau simple, artinien.

2.1. Remarques sur les corps.

Soit A un anneau simple, artinien. Alors A est isomorphe à une algèbre de matrices $M_n(K)$ sur un corps K. On pourrait imaginer que la description des sous anneaux simples, artiniens d'un anneau simple artinien se fait assez facilement. Rien de cela si K n'est pas commutatif et la situation est encore pire si K est de dimension infinie sur son centre. En algèbre enveloppante on rencontre souvent le corps de Weyl (1.5.4) qui en caractéristique zéro est dimension infinie sur son centre. Néanmoins une simplification est admissible, c'est à dire que l'anneau en question est de longueur fini comme module à gauche (ou à droite) pour le sous-anneau. Que ceci entraine une véritable simplification est indiquée par le lemme suivant. On désigne par A^{op} l'anneau opposé de A — c'est à dire isomorphe à A comme espace vectoriel mais avec la multiplication $a, b = ba$.

2.1.1. Soient A' un anneau et K un sous-corps de A'. On note $l\dim_K A'$ (resp. $r\dim_{K^{op}} A'$) la dimension de A' comme espace vectoriel à gauche (resp. à droite) sur K (resp. K^{op}). (Voir ([6],) pour un exemple où $l\dim_K A' \neq r\dim_{K^{op}} A'$).

LEMME. — <u>Soit</u> $a \in A'$ <u>tel que</u> ad a <u>est une dérivation de</u> K. <u>Si</u> $l\dim_K A' < \infty$ (<u>ou si</u> $r\dim_K A' < \infty$) <u>alors</u> ad a <u>est intérieure.</u>

Les hypothèses entraînent qu'il existent $m \in \mathbb{N}^+$ et des éléments $k_0, k_1, \dots, k_{m-1} \in K$ tels que

$$a^m + k_{m-1} a^{m-1} + \dots + k_0 = 0 .$$

Supposons que m est le plus petit entier ayant cette propriété. Comme $(\mathrm{ad}\, a)K \subset K$ en prenant le commutateur de cette expression avec $l \in K$ on trouve

$$m[l,a]\, a^{m-1} + [l, k_{m-1}]\, a^{m-1} + o(a^{m-2}) = 0 .$$

Alors l'hypothèse de minimalité entraine que $m[\ell,a] + [\ell, k_{m-1}] = 0$, $\forall\ \ell \in K$. Autrement dite $\mathrm{ad}\, a = \mathrm{ad}(-m^{-1} k_{m-1})$ comme dérivation de K.

2.1.2. Soient A' un anneau et A un sous-anneau simple, artinien de A'. On suppose que A' est de longueur fini comme A module à gauche (ou bien comme A^{op} module à droite).

COROLLAIRE. — <u>Soit</u> $a \in A'$ <u>tel que</u> $\mathrm{ad}\, a$ <u>est une dérivation de</u> A. <u>Alors</u> $\mathrm{ad}\, a$ <u>est interieure</u>.

On a $A \cong M_n(K)$: $n \in \mathbb{N}^+$ et K un corps. On sait ([8], p. 98) que tout A module M est somme directe de l'unique sous-module simple L de A et que $\ell\dim_K L = n$. D'après l'hypothèse il en résulte que $\ell\dim_K A' < \infty$. L'assertion est donc conséquence de 1.9.1 et 2.1.1.

2.1.3. (Notation et hypothèses de 2.1.2). On considère A' comme $A-A^{op}$ bimodule (qui est donc de longueur fini).

On dira que A' est *primaire* si ses sous-quotients simples (comme $A-A^{op}$ bimodule) sont deux à deux isomorphe. On note $C_A(A')$ le centralisateur de A dans A'.

PROPOSITION — Supposons que A' est primaire. Alors

(i) A' est somme directe (comme $A-A^{op}$ bimodule)

(ii) Si $C_A(A') \subset A$, on a $A = A'$.

Il est évidente que A est un sous $A-A^{op}$ module simple de A'. Si $A \subsetneq A'$ choissons un sous $A-A^{op}$ bimodule V' de A' contenant A et de longueur deux. Alors V'/A est simple et d'après l'hypothèse isomorphe à A. Soit a un représentant dans V' de l'image de l'identité pour cet isomorphisme. Alors $ab - ba \in A$ pour tout $b \in A$, c'est à dire que $ad\,a$ est une dérivation de A. D'après 2.1.2 on peut choisir $a \in C_A(A')$. Puis Aa

est un sous $A-A^{op}$ bimodule de V' qui est de plus une complementaire pour A. D'où (i). Sous l'hypothese de (ii) on trouve $a \in A$ qui est contradictoire, donc (ii).

2.1.4. Le résultat 2.1.3 (ii) s'entraine une version affaiblie du problème de Kostant pour les modules simples de plus haut poids pour $\mathfrak{g}$ simple de type A_n (notation de Cartan). Par cela voir ([36], 9.1).

2.2. Problèmes.

1).** Sous les hypothèses de 2.1.2 est-il vrai que A' est semi-simple comme $A-A^{op}$ bimodule ? La réponse est oui si $C_A(A')$ contient un sous-corps K commutatif tel que $\dim_k K < \infty$.

Ceci est une consequence eventuelle de ([8], Thm. 4.1.3, et Lemme 4.3.2).

2)** Dans la notation de 2.1.1 supposons que $\mathrm{ldim}_K A'$ et $\mathrm{rdim}_K A'$ sont toutes les deux finies. Sont-elles égales ?

2.3. Automorphismes.

2.3.1. La situation correspondante à 2.1.1 pour des automorphismes est quelque peu différente. En effet soit $a \in A'$ tel que $aka^{-1} \in K$, $\forall k \in K$. On pose $K^a = \{ k \in K : aka^{-1} = k \}$ et $Z(K^a)$ le centre de K^a. D'après l'hypothèse sur A' ils existent $m \in \mathbb{N}^+$ et des éléments $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{m-1} \in K$ tels que

$$(*) \qquad a^m + k_{m-1} a^{m-1} + \cdots + k_0 = 0$$

LEMME. — Supposons que m est le plus petit entier ayant la propriété $(*)$. Alors $k_i \in Z(K^a)$, $\forall i$.

En multipliant (*) à gauche par a et à droite par a^{-1} on trouve $a^m + (a k_{m-1} a^{-1}) a^{m-1} + \dots + a k_0 a^{-1} = 0$ et il en résulte de la minimalité de m que $a k_i a^{-1} = k_i$, $\forall i$. C'est à dire $k_i \in K^a$, $\forall i$. Pareillement en appliquant ad l : $l \in Z^a$ à (*) on trouve de plus que $k_i \in Z(K^a)$, $\forall i$.

2.3.2. Le plus simple exemple non-triviale de 2.3.1 est le cas où A' est un corps K' satisfaisant $l\dim_K K' = r\dim_K K' = 2$. Dans ce cas il est facile à voir qu'il existe $a \in K'$ satisfaisant $aK = Ka$ et $a^2 \in K$. On suppose que K' est un corps de Weyl, c'est à dire engendré par deux éléments a, b satisfaisants $ab - ba = 1$. Si on prendre pour K le sous-corps de K' engendré par a^2, b^2 on voit que les hypothèses précedentes sont satisfaites. On a $ab \in K$ donc $a^{-1}b \in K$ et on remarque que $[a^2, a^{-1}b] = 2$.

De plus $a^2(a^{-1}b)^2 - a^{-1}b = b^2$ et il en résulte que $K \cong K'$.

Enfin si on pose $x = a^2$, $y = a^{-1}b$, on trouve $axa^{-1} = x$, $aya^{-1} = y + x^{-1}$ et il est facile à voir que l'automorphisme $k \mapsto aka^{-1}$ de K n'est pas intérieure. Cette exemple intervienne dans l'étude du problème de Kostant pour les algèbres de Lie semi-simples.

2.4. Quotient et Coquotient de Goldie.

2.4.1 Soit A un anneau simple, artinian c'est à dire de la forme $M_n(K)$. Pour $i,j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ soit $x_{ij} \in M_n(K)$ la matrice ayant 1 dans l'intersection du i^{eme} rang et de la j^{eme} colonne, et 0 ailleurs. On pose $e_i = x_{ii}$.

Alors les $\{e_i\}_{i=1}^n$ sont des projecteurs deux à deux orthogonaux de somme $1 \in M_n(K)$ et les relations suivantes sont satisfaites

$$(*) \qquad e_i x_{ij} e_j = x_{ij}, \qquad x_{ij} x_{ji} = e_i, \quad \forall i,j.$$

De plus tout A module à gauche est semi-simple ([8], p. 98) et tout A module simple à gauche est isomorphe à Ae_1. En particulier e_1 est un projecteur minimal de A.

2.4.2. Soient A' un anneau simple artinien et A un sous-anneau simple artinien de A' (ayant la même identité). Soit e (resp. e') un projecteur minimal de A (resp. A'). Comme $e \in A'$ on peut supposer que $ee' = e'e = e'$ sans perte de généralité. On pose $\gamma_A(A') = \mathrm{rk}\, A' / \mathrm{rk}\, A$ -appelé le quotient de Goldie de A' sur A.

LEMME. — <u>On considère</u> $A'e$ (resp. eA') <u>comme</u> A' <u>module à gauche</u> (<u>resp.</u> <u>comme</u> A'^{op} <u>module à droite</u>)

(i) $\gamma_A(A')$ <u>est la multiplicité de</u> $A'e'$ <u>dans</u> $A'e$.

(ii) $\gamma_A(A')$ <u>est la multiplicité de</u> $e'A'$ <u>dans</u> eA'.

(<u>En particulier</u> $\gamma_A(A') \in \mathbb{N}^+$).

(i). Reprendre la notation de 2.4.1. D'après (*) $(A'e_i)x_{ij} \subset A'e_j$ et $(A'e_i)x_{ij}x_{ji} = A'e_i$. Il en résulte que la multiplication à droite par x_{ij} induit une isomorphisme de A' modules $A'e_i \xrightarrow{\sim} A'e_j$. Comme

$$A' = \bigoplus_{i=1}^{\operatorname{rk} A} A'e_i ,$$

il en résulte que A' est isomorphe à $\operatorname{rk} A$ copies de $A'e$. Soit s la multiplicité de $A'e'$ dans $A'e$. Alors A' est isomorphe à $s \operatorname{rk} A$ copies de $A'e'$. Par définition de $\operatorname{rk} A'$ on a donc $s \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$, d'où (i). (ii) est pareille.

2.4.3. Soient A, A' comme dans 2.4.2. On considère $A'e'$ comme A module à gauche. On désigne par $lz^*_A(A')$ la multiplicité de Ae dans $A'e'$ — on l'appelle le coquotient de Goldie à gauche de A' sur A. Pareillement on considère $e'A'$ comme A^{op} module à droite et on désigne par

$r\mathfrak{z}^*_{A^{op}}(A')$ la multiplicité de eA dans $e'A'$. Si A, A' sont des corps on a $l\mathfrak{z}^*_A(A') = l\dim_A A'$ et $r\mathfrak{z}^*_{A^{op}}(A') = r\dim_{A^{op}} A'$, donc ces nombres pouvant être distincts et infini.

2.4.4. Soient A_1, A_2 les anneaux simples artiniens. Soit V un A_1-A_2 bimodule qui est de longueur fini et fidèle comme A_1 module à gauche et comme A_2 module à droite. Soient $A'_1 = \mathrm{End}_{A_2} V$ et $A'_2 = \mathrm{End}_{A_1} V$. On a $A_i \hookrightarrow A'_i$; $i=1,2$.

PROPOSITION. —

(i) A'_1, A'_2 <u>sont des anneaux simples artiniens</u>.

(ii) $\mathfrak{z}_{A_2}(A'_2) = l\mathfrak{z}^*_{A_1}(A'_1)$.

(iii) $\mathfrak{z}_{A_1}(A'_1) = r\mathfrak{z}^*_{A_2}(A'_2)$.

On pose $A_2 = M_r(K_2)$ et on désigne par m

la multiplicité de l'unique A_2 module simple $e_2 A_2$ dans V. Comme l'anneau des endomorphismes de ce module simple est K_2 il en résulte que $A_1' \cong M_m(K_2)$. Pareillement si $A_1 = M_s(K_1)$ et la multiplicité de l'unique A_1 module simple dans V est n, alors $A_2' \cong M_n(K_1)$. Ceux-ci démontrent (i). Considère V comme A_2' module à droite et soit m' la multiplicité de $e_2' A_2'$ dans V. Alors m/m' est égale à la multiplicité de $e_2 A_2$ dans $e_2' A_2'$, c'est à dire à $rz^*_{A_2}(A_2')$. Mais $m = rk\, A_1'$ et comme

$$A_1 = \mathrm{End}_{A_2'} V \quad \text{on a} \quad m' = rk\, A_1 \ . \quad \text{D'où (iii)} .$$

La démonstration de (ii) est pareille.

2.4.5. Soit A' un anneau et A un sous-anneau de A'. On dira que A est premier par rapport à A' si $x A y = 0 \ : \ x, y \in A'$ implique soit $x = 0$, soit $y = 0$. Par exemple si A' admet un module fidèle qui est simple comme A module.

On se place dans la situation de 2.4.4.

LEMME. — Si A_1 est premier par rapport à A_1', alors V est simple comme $A_1 - A_2$ bimodule.

Soit W un sous-A_2-module de V. Comme V est semi-simple comme A_2 module, il existe un sous-A_2-module W' qui est complémentaire pour W. Soit e le projecteur de V sur W défini par la décomposition $V = W \oplus W'$.

Alors $e \in \operatorname{End}_{A_2} V \subset A_1'$ et on peut écrire $W = eV$.

Si W est de plus un A_1 module on aura

$A_1(eV) \subset eV$ d'où $(1-e)A_1e$. D'après l'hypothèse ceci donne soit $e = 0$, soit $e = 1$ et alors V est simple comme $A_1 - A_2$ bimodule.

2.4.6. Reprennons l'exemple de 2.3.2. On a un corps K' engendré par deux éléments a, b satisfaisants $ab - ba = 1$ et le sous-corps K engendré par $x = a^2$, $y = a^{-1}b$.

Dans 2.4.4 on prendre $V = K'$ qu'on peut considérer comme $K - K^{op}$ bimodule. Cette une somme directe $K \oplus aK$ de deux sous-modules (c'est à dire K, aK) non-isomorphes.

Si on prendre $A_2 = K$ il en résulte que $A_1' \cong M_2(K)$.

L'action à gauche de K' sur V induit une plongement φ de K' dans $M_2(K)$. En effet en prennant la base $\{1, a\}$ de V comme K espace vectoriel à droite et tenant compte des relations $a1 = a$, $aa = a^2 = x$, $b1 = a(a^{-1}b) = ay$, $ba = ab - 1 = xy - 1$, il résulte que

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & xy-1 \\ y & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on rappel que $K' \cong K$ on constate que ceci donne une plongement inhabituelle d'un corps de Weyl dans l'algèbre de matrices deux à deux sur un corps de Weyl. En particulier

$C_{K'}(M_2(K)) \subset K'$.

On peut considérer $M_2(K)$ comme $K'-K'^{\varphi}$ bimodule.

On pose

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul montre que $f\varphi(a) + \varphi(a)f = 0$, $f\varphi(b) + \varphi(b)f = 0$.
Il en résulte que $M_2(K)$ est la somme directe de deux sous $K'-K'^{\varphi}$ modules simples K', fK' non-isomorphes. On remarque aussi que K est précisément le centralisateur de f dans K'.

Cette exemple se réalise dans l'étude du problème de Kostant pour les modules de plus haut poids en prenant pour $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type B_2. Voir ([31], 11.6).

2.5. Problèmes.

1) (Notation 2.4.6). On pose

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 & xy-\lambda \\ y & 0 \end{pmatrix} \quad : \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Soit A l'algèbre sur $\mathbb{Q}$ engendrée par $\tilde{a}, \tilde{b}$. Montrer

que A est primitive, noetherienne. Montrer que

$$\operatorname{Fract} A \cong \begin{cases} K & : \lambda = 1. \\ M_2(K) & : \lambda \neq 1. \end{cases}$$

2)** On se place dans la situation de 2.4.4. On désigne par $C_{A_1}(A_1')$ le centralisateur de A_1 dans A_1', et on suppose que V est simple comme $A_1 - A_2$ bimodule ? $C_{A_1}(A_1') \subset A_1$. Est-il vrai que

C'est clair si $\dim_k A_1 < \infty$ où k est le centre de A_1.

3) Soit A' un anneau et A un sous-anneau de A'. Soit S une partie multiplicative de A d'éléments réguliers qui est Ore à gauche dans A et dans A'. Supposons que A' admet un module fidèle qui est simple comme A module. Montrer que $S^{-1}A$ est premier par rapport à $S^{-1}A'$ (voir 2.4.5).

LECON 3. – La dimension de Krull et la classification des $s\ell(2)$ modules simples.

3.1. La dimension de Krull pour les modules noetheriens.

3.1.1. Soit A un anneau noetherien. On désigne par $\underline{N}$ la catégorie de tous les A modules à gauche et de type fini. On appelle une dimension une fonction D sur $\underline{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}$ avec $D(M) = -\infty \Leftrightarrow M = 0$ et ayant les propriétés suivantes.

(i) Pour tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ et tout sous module N de M on a

$$D(M) = \max\{D(M/N), D(N)\}.$$

(ii) Pour tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ tel que $D(M) < \infty$ et toute chaîne $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots\ldots,$ de sous-modules on a

$D(M_i/M_{i+1}) < D(M)$ pour i assez grand.

3.1.2. Soient D une dimension et $0 \neq M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$.

On dira que M est critique par rapport à D si

$D(M/N) < D(M)$ pour tout sous module non-nul N de M.

LEMME. — <u>Tout</u> $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ <u>non-nul tel que</u> $D(M) < \infty$ <u>admet un sous module critique</u>.

Sinon il existe un plus petit entier $n \geqslant 0$ tel qu'on a $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ avec $D(M) = n$ et admettant aucun sous-module critique. Il en résulte de la propriété (i) qu'on peut trouver une chaîne $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots$, infinie strictement décroissante de sous modules avec la propriété que $D(M) = D(M_i) = D(M_i/M_{i+1})$ ce qui est impossible d'après (ii).

3.1.3. Soit $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ non-nul. On appelle série critique de M une chaîne croissante (nécessairement finie)

$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M$ de sous modules de M avec

M_{i+1}/M_i critique.

COROLLAIRE. — Tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ non-nul tel que $D(M) < \infty$ admet une série critique.

3.1.4. PROPOSITION. — Il existe une et une seule dimension D ayant la propriété suivante. Pour tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ tel que $D(M) > 0$ il existe un sous-module propre N de M tel que $D(M/N) = D(M) - 1$ si $D(M) < \infty$ et $D(M/N) < \infty$ si $D(M) = \infty$.

Unicité. Supposons que $D(M) = m$ avec $0 < m \leq \infty$.
Nous allons démontrer l'assertion suivante.

(*) $\exists$ une chaîne $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots$ infinie avec $D(M_i/M_{i+1}) = m-1$, $\forall\, i$, si $m < \infty$ ou avec $D(M_i) = \infty$ sinon.

Par hypothèse il existe un sous-module M_1 de $M_0 = M$ tel que $D(M_0/M_1) = m-1$ si $m < \infty$, ou $D(M_0/M_1) < \infty$ sinon.

Puis d'après la propriété (i) on a $D(M_1) = D(M) = m$ et la chaîne se déduit par recurrence. Démontrons

(* *) $\quad D(M) = 0 \Leftrightarrow$ M est de longueur fini.

L'implication $\Rightarrow$ résulte de la propriété (ii). $\Leftarrow$ résulte de (*).

Soient D_1, D_2 deux dimensions ayants la propriété annoncée. D'après (*) si $D_1(M) < 1$ alors $D_1(M) = D_2(M)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$ et supposons que pour tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ l'inégalité $D_1(M) < m$ implique $D_1(M) \leq D_2(M)$

Démontrons que $D_1(M) = m$ implique $D_1(M) \leq D_2(M)$. Soit $m < \infty$. D'après (*) il existe une chaîne $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \ldots$, infinie strictement décroissante avec $D_1(M_i/M_{i+1}) = m-1$, $\forall\, i$. D'après la propriété (ii) on a donc $D_2(M) > D_2(M_i/M_{i+1}) \geq D_1(M_i/M_{i+1}) = m-1$, et puis $D_2(M) \geqslant D_1(M)$. Echangeant D_1, D_2 il en résulte que $D_1(M) = D_2(M)$, $\forall\ M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ si un de ces nombres se trouve dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{N}$. Puis $D_1 = D_2$.

Existence. Définissons une dimension D par recurrence. On pose $D(M) = -\infty \Leftrightarrow M = 0$. Si $m \in \mathbb{N}$ on pose $D(M) \leq m$ si et seulement si pour tout suite $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots$, de sous modules on a $D(M_i/M_{i+1}) < m$, i assez grand. S'il existe aucun $m \in \mathbb{N}$ tel que $D(M) \leq m$ on pose $D(M) = \infty$.

Soit $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ et N un sous module de M. A la chaîne de sous modules $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots$ on associe la chaîne $(M_0 \cap N,\ M_0/(M_0 \cap N)) \supset (M_1 \cap N,\ M_1/(M_1 \cap N)) \supset \dots$ de paires de sous modules munies avec l'ordre produit.

Comme $M_i = M_{i+1} \leftrightarrow M_i \cap N = M_{i+1} \cap N$ et $M_i/(M_i \cap N) = M_{i+1}/(M_{i+1} \cap N)$, la propriété (i) résulte.

La propriété (ii) est conséquence immédiate de la définition.

Enfin pour la propriété de l'énoncé on prend $M \in \mathrm{Ob}\, \underline{N}$ tel que $D(M) > 0$. Si M n'est pas critique il existe un sous module non-nul M_1 de M tel que $D(M/M_1) = D(M)$. Comme M est noetherien il en résulte en remplaçant M par un quotient convenable qu'on peut supposer M critique. La condition est donc satisfaite si $D(M) = \infty$. Sinon d'après la définition de D il existe une chaîne infinie $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots$, avec $D(M_i/M_{i+1}) \geq (n-1)$ pour au moins un valeur de i, et alors $(n-1) \leq D(M_i/M_{i+1}) \leq D(M/M_{i+1}) \leq (n-1)$, comme M est critique. Donc M_{i+1} est le sous-module recherché.

3.1.5. On désigne D dans la conclusion de 3.1.5 par Kdim et on l'appelle la dimension de Krull. Son existence est dû à Gabriel et Rentschler [25].

3.1.6. Soit D une dimension. On a vu que $D(M)=0$ entraîne que M est de longueur fini.

LEMME. — Soient D une dimension et m un entier ≥ 0. Supposons que $D(M) \leq m$: $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ entraîne que M est de longueur fini. Alors $\mathrm{Kdim}\, M \leq \max\{0, D(M)-m\}$.

On démontre l'assertion par recurrence sur $n = \mathrm{Kdim}\, M$. C'est evidente si $n=0$. Supposons que $0 < n < \infty$. D'après $(*)$ de 3.1.4 il existe une chaîne $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq$ infinie strictement décroissante telle que $\mathrm{K\,dim}\,(M_i / M_{i+1}) = n-1$, $\forall\, i$. De plus $D(M) > D(M_i/M_{i+1})$, i assez grand (en appliquant la propriété (ii) à D). Si $D(M_i/M_{i+1}) \leq m$, i quelconque, alors d'après l'hypothèse, M_i/M_{i+1} est de longueur fini et puis d'après $(**)$ de 3.1.4 on trouve $\mathrm{K\,dim}\,(M_i/M_{i+1}) = 0$, c'est à dire que $n=1$. Puis M n'est pas de longueur fini et donc $D(M) - m \geq 1$, d'après l'hypothèse. Il en résulte qu'on peut supposer $D(M_i/M_{i+1}) \geq m$, $\forall i$.

Puis par l'hypothèse de recurrence

$$D(M) - m > D(M_i/M_{i+1}) - m \geq \mathrm{Kdim}(M_i/M_{i+1}) = \mathrm{Kdim}\, M - 1,$$

c'est à dire que $\mathrm{Kdim}\, M \leq D(M) - m$.

3.2. La dimension de Gelfand-Kirillov.

3.2.1. Soit A une k-algèbre de type fini. On choisit une sous espace V : $\dim V < \infty$, contenant l'identité de A qui engendre A comme algèbre. Alors $\{V^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ est une filtration de A. Par exemple si $A = U(\mathfrak{g})$ on peut prendre $V = \mathfrak{g} \oplus k$ et dans ce cas on $V^m = U^m(\mathfrak{g})$ qui s'appelle la filtration canonique de $U(\mathfrak{g})$. Son gradué associé $gr(U(\mathfrak{g}))$ s'identifie avec $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{g}$.

3.2.2. Soit M un A module à gauche. Si A est de type fini, on définit la dimension de Gelfand-Kirillov $d_A(M)$ de M sur A

3.2.4. (Notation 3.2.3). Soit M un A module muni d'une filtration $\{M^m\}_{m\in\mathbb{N}}$. On dira qu'une filtration est de type fini si $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} M^m$ est de type fini comme B module. Ceci revient à dire que $V^n M^m = M^{n+m}$ pour tout n, m assez grand. On montre facilement que deux filtrations de type fini sont equivalents (en sense de 6.3.2) et il en résulte que $d_A(M)$ définit à partir de 3.2.2(*) ne dépend pas de la filtration de type fini $\{M^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de M.

COROLLAIRE. — Soit M un A module de type fini. Si $\operatorname{gr} A$ est noetherienne, alors pour tout sous module N de M on a

$$d_A(M) = \max\{d_A(N), d_A(M/N)\}.$$

Muni M avec la filtration de type fini $\{M^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ définit en 3.2.2. Alors $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}(N\cap M^m)$ est de manière évident un sous B module de $\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} M^m$, donc de type fini (3.2.3). Il en résulte que $\{N\cap M^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{(M^m+N)/N\}_{m\in\mathbb{N}}$) est une filtration de type fini de N (resp. M/N). Comme

$$\dim_k M^m = \dim_k (N\cap M^m) + \dim_k((M^m+N)/N) \quad , \forall m$$

l'assertion du lemme résulte facilement.

3.2.5. Désormais on suppose $gr\, A$ commutative donc noetherienne car de type fini. Soit M un A module muni avec une filtration $\{M^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de type fini. Alors $gr\, M := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} (M^m/M^{m-1})$ est un $gr\, A$ module de type fini (c.f. 6.3.2). Il en résulte la

PROPOSITION. — <u>Il existe un polynôme</u> φ_M <u>tel que</u>

$\dim_k M^m = \varphi_M(m)$, $\forall$ m <u>assez grand</u>.

Voir ([11], ; ou [34], 3.5.2). On appel φ_M le polynôme de Hilbert – Samuel.

3.2.6. Soit φ_M dans la conclusion de 3.2.5. Comme $\varphi_M(m) \in \mathbb{N}$, $\forall$ m assez grand, on peut écrire

$$\varphi_M(m) = \sum_{j=0}^{d} e_j \binom{m}{d-j} \quad \underline{\text{avec}} \quad e_j \in \mathbb{N}.$$

(Voir [11], ; ou [34], 3.5.3). Choisons d tel que $e_0 \neq 0$ (si $M \neq 0$) il en résulte que $d = d_A(M)$. De plus on montre facilement que e_0 ne dépend pas des choix de la filtration de type fini de M (mais dépend bien de la filtration de A). On pose $e_0 = e_A(M)$. On l'appelle la multiplicité de M. Si N est un sous-module de M

tel que $d_A(N) = d_A(M/N)$ (rappel 3.2.4) on trouve facilement que $e_A(M) = e_A(N) + e_A(M/N)$. Comme e_A n'admet que les valeurs entiers >0 (si $M \neq 0$) il en résulte que d_A satisfait la propriété (ii). Nous avons démontré le

THEOREME. — Soit A une k-algèbre filtrée telle que gr A est commutative et de type fini. Alors A est noethérienne et d_A est une dimension en sens de 3.1.1.

3.3. Problèmes.

1) Soit B une sous-algèbre de A de type fini. Montrer pour tout A module M on a $d_B(M) \leq d_A(M)$.

2)* Soient A une algèbre commutative de type fini et M un A module noetherien. Montrer que $\mathrm{Kdim}\, M = d(M)$.

3) Considère $U(\mathfrak{g})$ comme $U(\mathfrak{g})$ module à gauche. Montrer que $d(U(\mathfrak{g})) = \dim \mathfrak{g}$, on déduit de 3.1.6 que $\mathrm{Kdim}\, U(\mathfrak{g}) \leq \dim \mathfrak{g}$.

4)* Soit I un idéal de $U(\mathfrak{g})$. Montrer que pour tout

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ module à gauche M on a

$$d\left(I \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} M\right) \leq d(M).$$

5) Soit A une algèbre de Weyl d'indice 1. Montrer que A admet aucune representation de dimension finie. En déduire que $d_A(M) \geq 1$, $0 \neq M \in \underline{N}$ et que l'égalité entraîne que $\mathrm{Kdim}\, M = 0$.

6)** La conclusion de 4), reste-t-il vraie si on remplaçe d par Kdim ?

7)* Soit $s \in S$ régulier. Montrer que $d_A(A/As) \leq d_A(A) - 1$.

3.4. <u>Spec</u> $\mathcal{U}(sl(2))$.

3.4.1. On note $\mathcal{U}$ l'algèbre associative avec générateurs e, f, h satisfaisants les relations

$$he - eh = 2e \quad , \quad hf - fh = -2f \quad , \quad ef - fe = h .$$

$\mathcal{U}$ est isomorphisme à l'algèbre enveloppante de $\underline{s} = sl(2)$ qui est l'algèbre de Lie de base $\{e, f, h\}$.

3.4.2. On note $E = \{e^m : m \in \mathbb{N}\}$. Du fait que $\mathrm{ad}\, e$ est une dérivation localement nilpotente de $\mathcal{U}$, il résulte que E est une ensemble de Ore pour $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est intègre, on a une plongement de $\mathcal{U}$ dans $E^{-1}\mathcal{U}$.

On désigne par B la sous-algèbre de U engendrée par e et h,

et par A la sous-algèbre de $E^{-1}U$ engendrée par e et $e^{-1}h$.

Comme $(e^{-1}h)e - e(e^{-1}h) = 1$ il résulte que A est isomorphe

à une algèbre de Weyl d'indice 1. On $E^{-1}B = E^{-1}A$.

3.4.3. Le centre Z de U est engendré par l'élément

$z = 2(ef+fe) + h^2 = 4ef + h(h-2)$. En effet un calcul montre

que $z \in Z$ et comme $f = \frac{1}{4}e^{-1}(z - h(h-2))$ on a

l'isomorphisme $E^{-1}U \cong E^{-1}A \otimes_k k[z]$. Comme $E^{-1}A$

est centrale, le centre de $E^{-1}U$ et puis de U s'identifie avec

$k[z]$. L'ensemble des idéaux premiers de U (notée $\operatorname{Spec} U$)

se déduit assez facilement. En effet soit $P \in \operatorname{Spec} U$.

Si $P \cap E \neq \phi$, alors $e \in \sqrt{gr\, P}$. Mais $\sqrt{gr\, P}$

est stable pour l'action adjointe, alors la simplicité de

$\underline{s}$ entraîne que $\underline{s} \subset \sqrt{gr\, P}$ et donc que $\dim U/P < \infty$.

En particulier U/P est de longueur fini comme U module à gauche et il en résulte que P est l'annulateur d'un sous-quotient simple de U/P, c'est à dire que P est primitif et de co-dimension finie. Si $P \cap E = \phi$, alors P l'image inverse d'un idéal premier de $E^{-1}A \otimes_k k[z]$ et comme $E^{-1}A$ est centrale simple un tel idéal est engendré par son intersection avec $k[z]$. Nous avons démontré à quelques détails près le

LEMME. — *Soit* $P \in \operatorname{Spec} U$. *Alors que les deux cas suivants sont possibles*

(i) P *est l'annulateur d'un unique* U *module simple de dimension finie.*

(ii) $P = UQ$ *avec* $Q \in \operatorname{Spec} Z$.

3.5 Problèmes.

1) Soit m un entier > 0. Montrer qu'il existe

à isomorphisme près un et un seul $\underline{s}$ module simple de dimension m.

2) Soit M un $\underline{s}$ module simple de dimension finie. Montrer que $\operatorname{Ann} M \cap Z = Z(z - \ell(\ell+2))$ où $\ell + 1 = \dim M$. En déduire l'unicité dans 3.4.3 (i).

3) Posons $\partial = \operatorname{ad} e$. Montrer que $U^{\partial} = k[e, z]$.

4) Soit $P = UQ$: $Q \in \operatorname{Spec} Z$. Soit $a \in U - P$ et supposons que $ea \in P$. Montrer qu'il existe $b \in k[e,z]$, $b \notin P$ tel que $eb \in P$ et en déduire une contradiction. Il en résulte que l'image de e dans U/P est intègre. Par passage à la localisation $E^{-1}U$ en déduire que $P \in \operatorname{Spec} U$. En déduire que

$$U \cap (E^{-1}U)Q = P.$$

5)* Soit J l'annulateur d'un U module simple de dimension finie. Montrer que $J^2 = J$.

3.6 La dimension de Krull de $U(sl(2))$.

On garde la notation de 3.4. On fera appel ici et en section 3.7 de quelques notions de localisation des modules développées en 4.1.

3.6.1. On désigne par $\underline{N}$ la catégorie des U modules noetheriens.

LEMMA. — Soit $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{N}$ tel que $Q := Z \cap \mathrm{Ann}\, M \in \mathrm{Max}\, Z$. Si M admet un quotient simple de dimension finie alors $Q = Z(z - \ell(\ell+2))$: $\ell \in \mathbb{N}$.

On a $Q = Z\,p(z)$ avec p un polynôme irréductible. D'autre part $Q \subset Z(z - \ell(\ell+2))$: $\ell \in \mathbb{N}$ d'après l'hypothèse et 3.5.2. L'assertion en résulte.

3.6.2. PROPOSITION — Soit $M \in \underline{N}$ tel que $d_U(M) \leq 1$. Alors M est de longueur fini.

Comme M est noethérien il suffit de démontrer que l'hypothèse entraîne qu'un sous module non-nul de M est de longueur fini. Puis d'après 3.2.3 et 3.1.2 il suffit de prendre M critique par rapport à $d_{\mathcal{U}}$. Comme $d_{\mathcal{U}}(N) = 0$, $N \in \underline{N}$ entraîne $\dim N < \infty$, il suffit de prendre $d_{\mathcal{U}}(M) = 1$ et de trouver un sous module non-nul qui admet aucun quotient de dimension finie. On cherche d'abord un sous-module satisfaisant l'hypothèse de 3.6.1. Pour cela il suffit que $\operatorname{Ann} M \cap k[z] \neq 0$.

On pose $M_1 = \operatorname{Ker}(M \to E^{-1}M) :=$ $\{m \in M : \operatorname{Ann}_{\mathcal{U}} m \cap E \neq \phi\}$. Si $M_1 \neq 0$ on peut supposer $M_1 = M$ et de même on peut supposer que M admet un vecteur cyclique m satisfaisant $em = 0$. Si $\operatorname{Ann}_{\mathcal{U}} m \cap k[h, f] = 0$, alors $M \cong \mathcal{U}/\mathcal{U}e$ et $d_{\mathcal{U}}(M) = 2$. Puis $\operatorname{Ann}_{\mathcal{U}}(m) \cap k[h, f] \neq 0$ et comme

$e \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{U}}(m)$, il résulte des relations de commutation dans $\mathcal{U}$ que $\mathrm{Ann}_{\mathcal{U}}(m) \cap k[h] \neq 0$. Vu de la formule $z = 4fe + h(h+2)$ on trouve $(\mathrm{Ann}_{\mathcal{U}} M) \cap k[z] = \mathrm{Ann}_{\mathcal{U}}(m) \cap k[z] \neq 0$.

Si $M_1 = 0$ on identifie M avec son image dans $E^{-1}M$. On peut toujours supposer que M admet un vecteur cyclique m. Puis de $d_B(Bm) \leq d_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}m) = 1$ et comme $d_B(B) = 2$ il résulte que $\mathrm{Ann}_B(m) \neq 0$. Alors $\mathrm{Ann}_A(m) \neq 0$ et puis $d_A(Am) \leq 1$. D'après 3.3.5 il résulte que Am est de longueur fini comme A module, puis sans restriction de généralité on peut supposer que Am est simple comme A module. Puis pour chaque $\ell \in \mathbb{N}$, $z^\ell(Am)$ est un A module simple (ou nul). Supposons que la somme $Am + z(Am) + \ldots + z^\ell(Am)$ est directe pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. Alors la somme $Bm + z(Bm) + \ldots + z^\ell(Bm)$ est directe pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et il en résulte que $1 = d_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}m) \geq d_{k[z]B}(k[z]Bm) = 1 + d_B(Bm)$. Puis $r := \dim_k Bm < \infty$ et on montre facilement que cela entraîne $e^{r+1}m = 0$ qui est une contradiction. On trouve donc que $z^\ell(Am) \cap (Am + zAm + \ldots + z^{\ell-1}(Am)) \neq 0$ pour ℓ assez grand et comme $z^\ell(Am)$ est simple comme A module on a même que $z^\ell(Am) \subset Am + zAm + \ldots + z^{\ell-1}(Am) =: N$. Puis N est un $A \otimes_k k[z]$ module, de longueur fini comme A module. Il résulte du lemme de Quillen ([38], 3.7.3) appliqué à N que $k[z] \cap \mathrm{Ann}_{\mathcal{U}} M \neq 0$.

Désormais on suppose que M satisfait aux hypothèses de 3.6.1 (et qu'il soit critique et verifie $d_{\mathcal{U}}(M) = 1$). Soit $\mathcal{J}$ l'annulateur d'un quotient simple de M de dimension finie. Nous allons montrer que $\mathcal{J}M$ est simple, ce qui achèvera la démonstration. Pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{J}M$ admet aucun quotient simple de dimension finie. Si c'était le cas il résulte de 3.6.1 et 3.5.1, 3.5.2 que $\mathcal{J}$ serait son annulateur et par conséquence $\mathcal{J}^2 M \subsetneq \mathcal{J}M$, en contradiction avec 3.5.5.

3.6.3. COROLLAIRE. — $\mathrm{Kdim}\ \mathcal{U} = 2$.

Il est relativement facile à voir que $\mathrm{Kdim}\ \mathcal{U} \geq 2$. On verra une résultat plus général (3.9.2) dans la suite. L'inegalité opposée résulte de 3.6.2, 3.3.3 et 3.1.6.

3.6.4. COROLLAIRE. — <u>Soit</u> $P \in \mathrm{Spec}\ \mathcal{U}$ <u>et non-nul</u>. <u>Alors</u> $\mathrm{Kdim}\ (\mathcal{U}/P)$ <u>est égale</u> 0 (<u>resp</u>. 1) <u>dans le</u>

cas (i) (resp. (ii)) de 3.4.3.

Le cas (i) est évident. Pour (ii) on remarque que $\mathrm{Kdim}\, U/P \geq 1$ comme U/P n'est évidemment pas de longueur fini. Pour l'inégalité opposée il suffit de vérifier que $d_U(U/P) = 2$ et de l'appliquer 3.1.6, 3.6.2.

Les résultats de cette section ont été trouvés indépendamment par S.P. Smith [44]. Levasseur a encore trouvé une démonstration de 3.6.3.

3.7. Classification des U modules simples (d'après Block).

3.7.1. On peut utiliser les résultats de 3.6 pour en déduire la classification des U modules simples donnée par Block ([14]). Ceci est plutôt une réduction à la classification de A_n modules simples (avec $n = 1$ ici) qui est quand-même utile et qui est dans l'esprit de la théorie des algèbres enveloppantes (1.5.3).

3.7.2. Désormais on suppose que k est algébriquement clos. Soit M un U module simple. D'après le lemme de Quillen l'action de Z sur M est réduit aux scalaires. Soit $Q = \mathrm{Ann}\, M \cap Z$. Il existe $\lambda \in k$ tel que $Q = Z(z-\lambda)$. Soit A_1 l'algèbre de Weyl d'indice 1 avec générateurs satisfaisants $xy - yx = -1$. La construction de 3.4.3 nous fournit deux plongements de U/UQ dans A_1 correspondants aux deux solutions de l'équation $\lambda = \ell(\ell+2)$: $\ell \in k$ distincts si $\lambda \neq -1$. Pour cela on remarque que $f = \frac{1}{4}e^{-1}(z - h(h-2)) = \frac{1}{4}e^{-1}(\ell+2-h)(\ell+h) \mod E^{-1}(UQ)$, ce qui nous amène aux plongements définies par

$$(*) \qquad e = x, \quad h = 2xy + (\ell+2), \quad f = -y(xy + \ell + 1).$$

3.7.3. Soit $Q \in \mathrm{Max}\, Z$ et posons $\overline{U} = U/UQ$. On va supposer que $\overline{U}$ est sous-algèbre d'une algèbre de Weyl A_1 d'indice 1.

LEMME. — Soit M un A_1 module simple. Alors $\mathrm{Soc}_{\overline{U}} M \neq 0$.

Soit N un $\overline{U}$ sous-module de M de type fini. Il suffit de montrer que $\mathrm{Soc}_{\overline{U}} N \neq 0$. On a $d_U(N) = d_{\overline{U}}(N) \leq d_{A_1}(M) = 1$ et puis d'après 3.6.2, N est de longueur fini comme U (ou $\overline{U}$) module. D'où l'assertion.

3.7.4. Ce résultat pose trois questions.

(i) $\mathrm{Soc}_{\overline{U}} M$ est-il simple comme $\overline{U}$ module ?

(ii) Est-ce que $\mathrm{Soc}_{\overline{U}} M$ détermine M comme A_1 module (à isomorphe près) ?

(iii) Est-ce que tout $\overline{U}$ module simple est de la forme $\mathrm{Soc}_{\overline{U}} M$, où M est un A_1 module simple ?

Si on utilise les plongements de $\overline{U}$ dans A_1 décrites dans 3.7.2 les réponses aux questions (i) et (ii) sont oui. En effet soit $X = \{x^\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ qui est une ensemble de Ore pour $\overline{U}$ et pour A_1. De plus $X^{-1}\overline{U} = X^{-1}A_1$. On pose $N = \mathrm{Ker}(M \to X^{-1}M)$ qui est un A_1 sous-module de M donc 0 ou M. Si $N=0$ on aurait $X^{-1}M = X^{-1}M'$ pour tout sous $\overline{U}$ module $M' \neq 0$ de M. En particulier si M' est simple, alors $M' = \mathrm{Soc}_{\overline{U}} M$ et M' détermine M comme A_1 module. Si $N = M$, il existe $0 \neq m \in M$ tel que $xm = 0$ et il en résulte que $M \cong A_1/A_1 x$. En effet A_1/A_1x est isomorphe à $k[y]$ où y agit par multiplication et x par $-d/dy$. Un calcul facile montre que $\mathrm{Soc}_{\overline{U}} M$ est un $\overline{U}$ module de plus haut poids qui dépend du choix de la plongement. Si $\ell \in \mathbb{N}$ on remarque que ce module est de dimension $\ell+1$.

Finalement si M' est $\overline{U}$ module simple qui n'est pas un module de plus haut poids on a

$\mathrm{Ker}\,(M' \to X^{-1}M') = 0$, c'est à dire M' est plongé

dans $X^{-1}M'$ qui admet une structure de A_1 module.

Posons $M'' = A_1 M'$. Comme dans 3.6.2 on montre

facilement que M'' est de longueur fini comme A_1 module

Soit M un sous A_1 module simple de M''. Comme M'

est essentiel dans $X^{-1}M'$ il en résulte que

$\mathrm{Soc}_{\overline{\mathfrak{U}}}\, M = M'$.

3.7.5. Les calculs precedents démontrent le théorème de

Block (voir [4],). Pour donner l'annonce

complète on pose $Q = Z\,(\ell(\ell+2) - z)$: $\ell \in k$ et

$\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}/\mathfrak{U}Q$. On plonge $\overline{\mathfrak{U}}$ dans A_1 selon (*) de 3.7.2.

On choisira une décomposition $k = \mathbb{Q} \oplus k'$ de k considéré comme

$\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On notera $\mathrm{Re}\,\ell$, $\mathrm{Im}\,\ell$ les composantes