Application de la théorie des anneaux aux algèbres enveloppantes.

Cours de troisième cycle de A. JOSEPH.

Sommaire.

LECON 1. L'action nilpotente et la conjecture de Gelfand-Kirillov.

Lemme de Taylor et les algèbres de polynômes tordues, lemme de Taylor à plusieurs variables, théorème de caractérisation des algèbres de Weyl, problème de Kostant (d'après Tauvel), le cas d'un anneau premier.

LECON 2. Sous anneaux simples artiniens d'un anneau simple artinien.

Remarques sur les corps, automorphismes, quotient et quotient de Goldie.

LECON 3. La dimension de Krull et la classification des $sl(2)$ modules simples.

La dimension de Krull pour les modules noetheriens, la dimension de Gelfand-Kirillov, Spec $U(sl(2))$, la dimension de Krull de $U(sl(2))$, classification des $U(sl(2))$ ...

modules simples (d'après Block), quelques remarques générales, modules de plus haut poids.

LECON 4. La localisation des modules et le foncteur de Enright.

La localisation des modules, la categorie $\underline{O}$ pour $sl(2)$, le foncteur de Enright pour $sl(2)$ et pour le cas général.

LECON 5. Principle d'additivité pour rang de Goldie.

Les théorèmes de Goldie et de Small, critère de Gabber, modules de Harish-Chandra, principle d'additivité.

LECON 6. Dimension et modules de longueur fini.

Une inégalité de dimension, égalité de dimension pour une sous-catégorie de $U(\mathfrak{g})$ modules (d'après Gabber), théorème de longueur fini pour la catégorie $\underline{G}$.

LECON 7. Théorème de separation de Gabber et modules de Harish-Chandra.

Le lemme d'Artin-Rees-McConnell, les théorèmes de Gabber, théorème d'intégrabilité des caractéristiques (d'après Gabber), résolution projective, trâce, l'independance du réseau, modules de Harish-Chandra et le théorème de Casselman.

Théorie des anneaux en algèbre enveloppante.

Avant-propos.

La théorie des algèbres enveloppantes est une fusion de trois thèmes principales. Ceux-ci comportent l'algèbre géometrique, théorie de représentations et théorie des anneaux non-commutatifs. Ici nous étudions l'apport de la dernière discipline. Pour raisons pédagogiques et de goût personnel cette étude est présentée comme sept leçons indépendants qui demandent peu de connaissance préalable. Nos choix sont de plûpart des recherches récentes qui ne sont pas encore documentées dans les livres. Dans plusieurs cas les résultats ne sont même pas encore publiés.

Remarques sur des conventions.

Sauf mention du contraire k désigne un corps commutatif de caractéristique zéro, A une k-algèbre associative et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. Tout anneau est supposé unitaire et tout sous-anneau muni de la même unité. Pour tout définition donnée à gauche, la définition correspondante à droite est entendue. Des conditions non-qualifiées par "gauche" ou par "droite" sont supposées bilatères si le sens le permet. Les problèmes moins faciles sont notés par une étoile, ceux qui sont ouverts par deux.

Lecture préparatoire recommandée.

I.N. Herstein, Noncommutative rings, Chaps. 1, 2, 4, 7.

J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Chaps. 1, 2, 3, 7.1-7.2.

I. Kaplansky, Commutative rings.

LECON 1. - L'action nilpotente et la conjecture de Gelfand-Kirillov.

1.1. La lemme de Taylor et ses applications.

1.1.1. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie on note $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. On rappel que tout $\mathfrak{g}$ module M se prolonge d'une manière evidente comme $U(\mathfrak{g})$ module. On pose $M^{\mathfrak{g}} := \{m \in M : Xm = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}$. On dira qui l'action de $\mathfrak{g}$ sur M est localement finie si $\dim_k U(\mathfrak{g})m < \infty$, $\forall m \in M$. Si $\mathfrak{g} = kX$ on pose $M^X := M^{\mathfrak{g}}$, et on dira que l'action de X est localement nilpotente si $X^\ell m = 0, \forall m \in M$, ℓ assez grande.

<u>Exemple</u>. L'action adjointe $\mathrm{ad}\, X : a \mapsto Xa - aX$ de $\mathfrak{g}$ sur $U(\mathfrak{g})$ est localement finie. Par contre la multiplication à gauche (ou à droite) ne l'est pas. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente alors l'action de $\mathrm{ad}\, X$ est localement nilpotente sur $U(\mathfrak{g})$.

1.1.2. Soit A une algèbre associative. On muni A d'une structure d'algèbre de Lie (de dimension infinie) en posant $[a, b] := ab - ba$. Soit V un sous-espace de A. On dira que $a \in A$ est transcendent à gauche sur V si tout somme fini $\sum v_k a^k : v_k \in V, k \in \mathbb{N}$ est nul seulement si tous les v_k sont nuls. Dans ce cas l'espace engendré par des tels sommes finis est noté $V[a]$.

LEMME. (<u>dite de Taylor</u>) — <u>Soit</u> X <u>une dérivation localement nilpotente de</u> A. <u>On suppose qu'il existe</u> $a \in A$ <u>tel que</u> $Xa = 1$. <u>Alors</u>

(i) $A = A^X[a]$.

(ii) $\operatorname{ad} a$ <u>est une dérivation de</u> A^X.

(i). On montre facilement que $X^n a^n = n!$ de sorte que a est transcendent à gauche sur A^X. Soit $b \in A$ et choisisons $n \in \mathbb{N}$ tel que $X^n b \neq 0$, $X^{n+1} b = 0$. Alors si on pose $c = b - \frac{1}{n!}(X^n b)\, a^n$ on aura $c \equiv b \mod A^X[a]$ et $X^n c = 0$. Puis (i) résulte par recurrence.

(ii). Soit $b \in A^{\times}$. Alors

$$X((\mathrm{ad}\, a)b) = X(ab) - X(ba) = (Xa)b - b(Xa) = b - b = 0,$$

d'où l'assertion.

1.1.4. Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Alors S est dite <u>Ore à gauche</u> si pour tout $(s, a) \in S \times A$ il existe $(t, b) \in S \times A$ tel que $bs = ta$. Dans ce cas on suppose généralement que les éléments de S sont réguliers. Alors ([7], 3.6) A admet un sur-anneau noté $S^{-1}A$ où tous les éléments de S sont rendus inversibles et tout élément est de la forme $s^{-1}a$: $s \in S$, $a \in A$. Si M est un A module on pose $S^{-1}M := S^{-1}A \otimes_A M$. L'homomorphisme canonique $m \mapsto 1 \otimes m$ de M dans $S^{-1}M$ est injectif si et seulement si $sm = 0$: $s \in S$, $m \in M$ entraîne $m = 0$.

1.1.5. Soient A une algèbre et ∂ une dérivation de A. L'algèbre de polynômes tordue $A[X]_\partial$ sur A par rapport à ∂ est l'espace vectoriel $A \otimes_k k[X]$ avec multiplication

$$(a\otimes X^r)(b\otimes X^s) = \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t}\; a(\partial^t b)\otimes X^{r+s-t}.$$

<u>Exemple</u> Sous les hypothèses du lemme de Taylor, A est une algèbre de polynômes tordue sur A^X par rapport à ad a.

1.1.6. Soient $A[X]_\partial$ une algèbre de polynômes tordue et S une ensemble de Ore à gauche de A. On identifie S à une partie multiplicative de $A[X]_\partial$ grâce au monomorphism $a \mapsto a\otimes 1$ de A dans $A[X]_\partial$. On prolonge ∂ à $S^{-1}A$ en posant $\partial s^{-1} = -s^{-1}(\partial s)s^{-1}$.

LEMMA —
(i) <u>S est une ensemble de Ore à gauche de</u> $A[X]_\partial$.

(ii) $S^{-1}(A[X]_\partial) = (S^{-1}A)[X]_\partial$.

(i). Soit $(s,c) \in S\times A[X]_\partial$. Il s'agit de construire $(t,d)\in S\times A[X]_\partial$ tel que $tc = ds$.

Posons $c = \sum a_r X^r$. D'après la condition de Ore dans A, ils existent $t \in S$, $b_r \in A$ tels que $t a_r = b_r s$ et il suffit de prendre $d = \sum b_r X^r$.

(ii). Il est claire que le monomorphisme $A \to S^{-1}A$ se prolonge comme monomorphisme de $A[X]_\partial$ dans $(S^{-1}A)[X]_\partial$. D'autre part grâce à la condition de Ore dans A il existe pour tout élément $c \in (S^{-1}A)[X]_\partial$ un élément $s \in S$ tel que $sc \in A[X]_\partial$. D'où l'assertion.

1.2. <u>Problèmes.</u>

1)*. Soient V un espace vectoriel et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie d'endomorphismes localement nilpotents de V. Montrer que $\mathfrak{g}$ est nilpotente si $\dim \mathfrak{g} < \infty$.

2). Soient D un domain de Ore à gauche et ∂ une dérivation de D. Montrez que $D[X]_\partial$ admet un corps (gauche) de fractions.

3).* Montrer que

$$A \text{ est premier} \Leftrightarrow A[X]_\partial \text{ est premier.}$$

$$A \text{ est Goldie à gauche} \Leftrightarrow A[X]_\partial \text{ est Goldie à gauche.}$$

1.3. Le lemme de Taylor à plusieurs variables.

1.3.1. Soient A une algèbre associative et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie de dérivations localement nilpotentes de A. D'après 1.2.1, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, donc admet une suite déscendante $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supsetneq \mathfrak{g}_2 \supsetneq \cdots\cdots \supsetneq \mathfrak{g}_{N+1} = \{0\}$ d'idéaux satisfaisants $\dim_k(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}) = 1$, $\forall i$. On pose $A_\ell = A^{\mathfrak{g}_\ell}$, puis $A = A_{N+1}$, $A^{\mathfrak{g}} = A_1$ et $A_1 \subset A_2 \subset \ldots\ldots \subset A_{N+1}$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^+$, choissons $X_\ell \in \mathfrak{g}_\ell$, $X_\ell \notin \mathfrak{g}_{\ell+1}$.

Comme $\mathfrak{g}_\ell$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$ on a $X_\ell A_m \subset A_m$, $\forall\, \ell, m \in \mathbb{N}^+$.

1.3.2. (Notations 1.3.1). Posons $S = A^{\mathfrak{g}} - \{0\}$ qui est une partie multiplicative de A. Nous allons supposer que tout élément de S est régulier dans A et que S est une ensemble de Ore à gauche de A. On pose $B = S^{-1}A$. Il est clair que $B_\ell := B^{\mathfrak{g}_\ell} = S^{-1}A_\ell$. De plus $S^{-1}A^{\mathfrak{g}}$ n'est rien autre que le corps de fractions de $A^{\mathfrak{g}}$.

LEMME. — Pour tout $\ell, m \in \mathbb{N}^+$ on a

(i). Soit $B_{\ell+1} = B_\ell$, soit qu'il existe $a_\ell \in B_{\ell+1}$ tel que $X_\ell a_\ell = 1$.

(ii) $X_\ell a_m \in B_m$ et $X_\ell a_m = 0$ si $\ell > m$.

(iii) $S^{-1}A$ est une algèbre de polynômes tordue sur $\operatorname{Fract} A^{\mathfrak{g}}$. (à plusieurs variables).

(i). Si $B_{\ell+1} \neq B_\ell$ on aura $a \in B_{\ell+1}$ tel que $X_\ell a \neq 0$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a que

$X_\ell(Xa) = [X_\ell, X]a + X(X_\ell a) = X(X_\ell a)$. Il en résulte qu'on peut supposer que $b := X_\ell a \in A^{\mathfrak{g}}$ sans restriction de généralité. L'élément $a_\ell := b^{-1}a$ satisfait la conclusion de (i).

(ii). On a que $X_m X_\ell a_m = [X_m, X_\ell] a_m + X_\ell(X_m a_m) = 0$, d'où $X_\ell a_m \in B_m$. Comme $a_m \in B_{m+1}$ on a $X_\ell a_m = 0$ si $\ell > m$.

(iii) résulte de (i) et 1.1.2 (par recurrence).

1.4. Problèmes.

Sous les hypothèses de 1.3.2 montrer que

1) A admet un corps (gauche) de fractions Fract A.

2) $(\text{Fract } A)^{\mathfrak{g}} = \text{Fract } A^{\mathfrak{g}}$.

3) B est le plus grand sous-$\mathfrak{g}$ module de Fract A

sur lequel l'action de $\underline{g}$ est localement nilpotente.

4) Supposons que $\underline{h}$ est une Lie algèbre commutative de dérivations localement semisimples de A avec $[\underline{h}, \underline{g}] \subset \underline{g}$. Montrer qu'on peut choisir les a_ℓ comme vecteurs propres de $\underline{h}$.

5)* Soient $\underline{g}$ une algèbre de Lie semisimple, $\underline{b}$ une sous-algèbre de Borel et $\underline{n} = [\underline{b}, \underline{b}]$. On note $Z(\underline{n})$ le centre de $U(\underline{n})$ et on rappel que tout $\operatorname{ad} X : X \in \underline{n}$ est une dérivation localement nilpotente de $U(\underline{g})$.

(i) Si $y \in Z(\underline{n}) - \{0\}$ on pose $Y = \{y^\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$. Montrer que Y est une ensemble de Ore pour $U(\underline{g})$.

(ii) Montrer que les poids to $Z(\underline{n})$ par rapport à $\underline{h}$ sont de dimension ≤ 1.

(iii) Montrer qu'ils existent $y \in Z(\underline{n})$ et une sous-algèbre $\underline{\ell}$ de $\underline{h}$ tels que $Y^{-1} U(\underline{g})$ est une algèbre de polynômes tordue sur $Y^{-1}\left(U(\underline{g})^{\underline{n}} \otimes_{Z(\underline{n})} U(\underline{n})\right)$ par rapport aux dérivations

$\mathrm{ad}\,X : X \in \underline{l}$.

6)* Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$. Montrer que les éléments $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ semi-invariants de $U(\mathfrak{g})/P - \{0\}$ sont réguliers. En déduire que P est complètement premier.

1.5. <u>Théorème de caractérisation des algèbres de Weyl.</u>

1.5.1. (Notations 1.3.1 – 2). On note $Z(A)$ le centre de A.

On verra que les conclusions de 1.3.2 deviennes beaucoup plus fortes si $A^{\mathfrak{g}} \subset Z(A)$. Tout d'abord on remarque que dans ce cas S est trivialement une ensemble de Ore dans A. Par contre les éléments de S ne sont pas nécessairement réguliers dans A. En effet d'après 1.4.6 ceci n'est vrai que si A est intègre.

1.5.2. THEOREME — <u>Soient</u> A <u>une algèbre associative intègre</u> <u>et</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algebre de Lie de derivations localement nilpotentes de</u> A. <u>Supposons que</u> $\dim \mathfrak{g} < \infty$, <u>et</u> $A^{\mathfrak{g}} \subset Z(A)$. <u>Alors ils existent des entiers</u> $m, n \geq 0$ <u>tels que</u>

(i) $S^{-1}Z(A) = (S^{-1}A^{\mathfrak{g}})[z_1, z_2, \ldots, z_n]$, <u>où</u> $S = A^{\mathfrak{g}} - \{0\}$.

(ii) $S^{-1}A = (S^{-1}Z(A))[x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m]$ où

$$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0 \quad \text{et} \quad [x_i, y_j] = \begin{cases} 1 & : \quad i = j. \\ 0 & : \quad \text{sinon}. \end{cases}$$

On utilise la notation de 1.3.2 (i) avec la convention que si $B_{\ell+1} = B_\ell$ on pose $a_\ell = 0$.

Soient $j > i$ des entiers > 0. D'après 1.3.2 $X_\ell[a_i, a_j] = 0$ si $\ell \geqslant j$ de sorte que $[a_i, a_j] \in B_j$. Dans la conclusion de 1.3.2, le choix des a_ℓ n'est pas unique. Nous allons faire des nouveaux choix des a_ℓ mod B_ℓ satisfaisants en plus la condition suivante. Pour $m = 0, 1, 2, \ldots,$ ils existent une ensemble $I_m = \{r_i, s_i \; : i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; 1 \leq s_i < r_i \leq N\}$ et un choix des $\{a_\ell\}_{\ell=1}^{N}$ tels que

$$(*) \quad \begin{gathered} [a_{r_i}, a_\ell] = [a_{s_i}, a_\ell] = 0 \quad : \ell \notin I_m, \\ [a_{r_i}, a_{r_j}] = [a_{s_i}, a_{s_j}] = 0 \quad \text{et} \quad [a_{r_i}, a_{s_j}] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j. \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases} \end{gathered}$$

C'est bien triviale pour $m=0$ et on suppose qu'il est satisfait pour m. Soit r_{m+1} le plus grand entier >0 tel que $[a_i, a_j] = 0$, $\forall\, i,j < r_{m+1}$: $i,j \notin I_m$. Si $r_{m+1} > N$ on arrête à I_m. Sinon il existe un plus grand entier $s_{m+1} < r_{m+1}$ tel que $[a_{r_{m+1}}, a_i] = 0$, $\forall\, i < s_{m+1}$. C'est claire que $r_{m+1}, s_{m+1} \notin I_m$ et on pose $I_{m+1} = \{I_m, r_{m+1}, s_{m+1}\}$. Nous allons faire un nouveaux choix des a_i : $i \notin I_m$ tel que $(*)$ soit satisfait par rapport à $m+1$.

On pose $r = r_{m+1}$, $s = s_{m+1}$. D'après le choix de r, s on a $[a_r, a_s] \neq 0$. D'autre part en posant $L = \operatorname{Fract} A^{\mathfrak{g}}$ on trouve

$$\begin{aligned} X_\ell\, [a_r, a_s] &= [X_\ell a_r, a_s] + [a_r, X_\ell a_s], \\ &\in [B_r, a_s] + [a_r, B_s], \quad \text{d'après } 1.3.2\,(ii), \\ &\subset [L(a_1, a_2, \dots, a_{r-1}), a_s] + [a_r, L(a_1, a_2, \dots, a_{s-1})], \\ &= \{0\}, \quad \text{d'après le choix de } r, s \text{ et} \end{aligned}$$

l'hypothèse $L = \operatorname{Fract} A^{\mathfrak{g}} \subset \operatorname{Fract} Z(A)$. Il en résulte que $b := [a_r, a_s] \in \operatorname{Fract} A^{\mathscr{F}}$ et en remplaçant a_s par $b^{-1}a_s$ on peut supposer que $[a_r, a_s] = 1$.

On $[a_i, a_s] = 0$ si $i \in I_m$ ou si $i < r$. On démontre par recurrence qu'on peut choisir les a_i qui restent tels que $[a_i, a_s] = 0 : i \neq r$ sans affecter les relations $(*)$. Soit t le plus grand entier $> r$ tel que $[a_i, a_s] = 0$, $\forall i < t$, $i \neq r$. Si $t > N$, il n'y rien à démontrer. Sinon $[a_t, a_s] \neq 0$, puis $t \notin I_m$. D'après 1.3.2 (ii) on a $[a_t, a_s] \in B_t$ et on peut écrire

$$[a_t, a_s] = \sum_{\ell=0} \alpha_\ell \, a_r^\ell \, \beta_\ell \quad \text{avec } \alpha_\ell \in B_r,$$

$\beta_\ell \in k[a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_{t-1}]$.

D'après le choix de t on a $[\alpha_\ell, a_s] = [\beta_\ell, a_s] = 0, \forall \ell$. D'après $(*)$ et l'identité de Jacobi on a $[[a_t, a_s], a_i] = 0$, $\forall i \in I_m$. D'après la transcendence des a_j et $(*)$ il en résulte que $[\alpha_\ell, a_i] = [\beta_\ell, a_i] = 0$, $\forall i \in I_m$.

On pose

$$a_t' = a_t - \sum (1+\ell)^{-1} \alpha_\ell\, a_r^{\ell+1} \beta_\ell \ .$$

Par construction $[a_t', a_s] = 0$ et d'après ce qui procède $[a_t', a_i] = 0$, $\forall\, i \in I_m$. Comme $a_t' - a_t \in B_t$ on peut remplacer a_t par a_t'. De cette manière on peut faire un choix des $a_i : i > r : i \notin I_m$ tels que $[a_i, a_s] = 0, \forall\, i \neq r$.

Enfin $[a_r, a_j] = 0$ si $j \in I_m$ ou si $j < s$ ou si $j = r$. Si $j \notin I_m, s < j < r$, prenons $i \geq j$. Puis $X_i a_j \in$ Fract A^ϑ et

$$X_i [a_r, a_j] = [X_i a_r, a_j] \in [B_r, a_j] = \{0\},$$

d'après le choix de j, r. Il en résulte que $[a_r, a_j] \in B_j, \forall j$.

D'après l'identité de Jacobi on a $[a_s, [a_r, a_j]] = 0$.

Donc par un argument sembable à celui utiliser pour $[a_i, a_s]$ on peut choisir a_j mod B_j tel que $[a_r, a_j] = 0$ $(j \neq s)$ sans perte du propriété $[a_j, a_i] = 0, \forall\, i \in \{I_m, s\}$.

Il en résulte que $(*)$ reste valable avec m remplacé par $m+1$.

Soit m tel que $r_{m+1} > N$. Alors si on pose $x_i = a_{r_i}$, $y_i = a_{s_i}$, $z_j = a_j$: $j \notin I_m$ les assertions (i), (ii) résulte de (*), 1.1.2 et le choix de m.

1.5.2. L'algèbre associative avec générateurs x_i, y_j : $i, j = 1, 2, \ldots, m$ satisfaisant les relations de 1.5.1 (ii) est appellée l'algèbre de Weyl d'indice m sur k. On la note $A_m(k)$ (ou simplement, A_m). Le théorème peut s'exprimer en disant que d'après localisation A est une algèbre de Weyl sur son centre. Ceci est une généralisation au résultat suivant dû à Dixmier ([7], 4.7.9).

COROLLARY — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et P un idéal rationel de $U(\mathfrak{g})$. (c'est à dire $(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/P)^{\mathfrak{g}}$ est réduit aux scalaires). Alors il existe un entier $m \geq 0$ tel que $U(\mathfrak{g})/P \cong A_m$.

1.5.3. L'importance de 1.5.2 est que l'étude des $U(\mathfrak{g})$ simples (k algébrique clos, $\mathfrak{g}$ nilpotente) ayant un annulateur donné est équivalente à la classification de A_m modules simples. Pour une algèbre de Lie quelconque la situation est beaucoup plus compliquée.

1.5.4. On appelle un corps de Weyl d'indice m sur k un corps (gauche) isomorphe à $\mathrm{Fract}(A_m(k))$.

1.6. Problèmes.

1). Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et A une sous-algèbre ad $\mathfrak{g}$ invariant de $U(\mathfrak{g})$. Posons $S = Z(A) - \{0\}$. Montrer que $S^{-1}A$ est une algèbre de Weyl sur $\mathrm{Fract}\, Z(A)$.

Soient $\mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie complètement résoluble, $\mathfrak{g}_2$ son enveloppe algébrique et $\mathfrak{g}$ le nilradical de $\mathfrak{g}_2$. Soit P un idéal premier de $U(\mathfrak{g}_1)$ et posons $A = U(\mathfrak{g})/P$. Rappelons que $\mathfrak{g}_2$ est le produit semi-directe $\underline{h} \oplus \mathfrak{g}_2$ avec $\underline{h}$ abelien.

2) Montrer qu'on peut choisir les x_i, y_i, z_j dans la conclusion de 1.5.1 comme vecteurs propres de ad $\underline{h}$ et qu'il existe un vecteur propre z_0 de $(U(\mathfrak{g}_1)/P)^{\mathfrak{g}}$ tel que $z_0 x_i$, $z_0 y_i$, $z_0 z_j \in U(\mathfrak{g}_1)/P$.

3)* Montrer qu'ils existent une algèbre de Lie complètement résoluble $\mathfrak{g}_1'$ de nilradical abelien, un idéal premier P' de $U(\mathfrak{g}_1')$, un vecteur propre z_0' de $(U(\mathfrak{g}_1)/P)^{\mathfrak{g}}$ et un entier $m \geq 0$ tel que

$$S^{-1}(U(\mathfrak{g}_1)/P) = S^{-1}((U(\mathfrak{g}_1')/P') \otimes A_m).$$

où S est l'ensemble de Ore $\{z_0'^{\ell} : \ell \in \mathbb{N}\}$.

4)* Dans 3) soit T la partie multiplicative de $U(\mathfrak{g}_1')/P'$ engendrée par les éléments semi-invariants non-nuls. Décrire $T^{-1}(U(\mathfrak{g}_1')/P')$. (voir [38]).

5)** Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et supposons que k est algèbriquement clos. Soit $P \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$.

A-t-on que $\mathrm{Fract}(U(\mathfrak{g})/P)$ isomorphe à une algèbre de matrices sur un corps de Weyl ? (Ceci résulte de (4) dans le cas résoluble et c'est aussi vrai pour $\mathfrak{g} \cong sl(n, k)$ ([28], 10.3)).

1.7. Problème de Kostant.

Dans ce paragraphe on suppose k algébriquement clos.

1.7.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque (mais de dimension finie) et M un $U(\mathfrak{g})$ module simple. Soit $a \mapsto \check{a}$ l'antiautomorphisme principale de $U(\mathfrak{g})$ défini par $\check{X} = -X$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. On identifie $U := U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ canoniquement avec $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$. On considère $\mathrm{End}_k M$ comme U module selon $((a \otimes b).x)m = a x \check{b} m$, $\forall a, b \in U(\mathfrak{g})$, $x \in \mathrm{End}_k M$, $m \in M$. On définit $j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par $j(X) = (X, X)$ et on pose $\underline{k} = j(\mathfrak{g})$. Alors

$L(M, M) := \{ x \in \mathrm{End}_k M : \dim_k U(\underline{k}) x < \infty \}$ est un U sous-module de $\mathrm{End}_k M$.

1.7.2. L'action de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur M définit un homomorphisme de $\mathcal{U}$ modules de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $L(M,M)$. Son noyau est $\operatorname{Ann} M$. Le problème de Kostant est de démontrer que cet homomorphisme est surjectif, c'est à dire que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M = L(M,M)$.

1.7.3. Le résultat suivant est dû à Tauvel [16]. On pose $L^{0}(M,M) = \{a \in \operatorname{Hom}_{k}(M,M) : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } X^{n}a = 0,\ \forall X \in \mathfrak{g}\}$.

PROPOSITION — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente et* M *un* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *module simple*. *Alors* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M = L^{0}(M,M)$.

Comme M est simple, le lemme de Quillen ([7], 2.6.4) entraîne que tout élément de $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}} M$ est algébrique sur k. Par hypothèse k est algébriquement clos, donc $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}} M$ est réduit aux scalaires. En particulier $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M)^{\mathfrak{g}} = k$ et puis d'après 1.5.2 il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M \cong A_{m}(k)$.

On reprendra la notation de 1.3.1 en posant $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M$, $A' = L^{0}(M,M)$. On démontre que $A_\ell = A'_\ell$ par recurrence, ce qui entraînera l'assertion du proposition.

Comme $A'_1 = k$, l'assertion est bien evidente pour $\ell = 1$. Démontrons que l'assertion pour ℓ entraîne celle pour $\ell+1$. Dans cela on peut supposer $A'_{\ell+1} \supsetneq A'_\ell$. Puis d'après 1.3.2 (i) et $a \in A'_{\ell+1}$ tel que $A'_{\ell+1} = A'_\ell [a]$. D'après 1.3.2 (ii) on a $(\operatorname{ad} X) a \in A'_\ell = A_\ell$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. Comme les $X \in \mathfrak{g}$ engendrent A ceci veut dire que $\operatorname{ad} a$ est une dérivation de A. Mais $A \cong A_m(k)$ et toute dérivation d'une algèbre de Weyl est interieure ([7], 4.6.8). De plus $A_m(k)$ est centrale. Ainsi $a \in A$ et donc $A'_{\ell+1} = A_{\ell+1}$.

1.7.3. Soit $\mathfrak{g} = kX \oplus kY \oplus kZ$ avec Z central et $[X,Y] = Z$. Alors $k[X]$ est un $\mathfrak{g}$ module simple (où X agit par multiplication et Y par $-d/dX$). Puis $\exp Y \in L(M,M) \setminus L^0(M,M)$ (exemple dû à Tauvel).

1.8. <u>Problèmes</u>.

1). Soient A une algèbre associative et intègre et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de A telle que $\dim_k \mathfrak{g} < \infty$ et toute derivation $\operatorname{ad} X : X \in \mathfrak{g}$ de A soit localement nilpotente. Soit U le sous-algèbre de A engendrée par $\mathfrak{g}$. Soient $\mathcal{U}''$ le deuxième commutant de $\mathcal{U}$ dans A et $Z(\mathcal{U})$ le centre de $\mathcal{U}$. Montrer qu'il existe $z \in Z(\mathcal{U})$ tel que $S^{-1}\mathcal{U}'' = (S^{-1}\mathcal{U})Z(\mathcal{U})$, où $S = \{z^{\ell} : \ell \in \mathbb{N}\}$.

2) Soit $\mathfrak{g} = kX \oplus kY$ avec $[X,Y] = Y$. Trouver un $\mathfrak{g}$ module simple M tel que l'inclusion $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, M \hookrightarrow L(M,M)$ est stricte.

3)* Soit $\mathfrak{g} = sl(2)$. Trouver un $\mathfrak{g}$ module simple M tel que l'inclusion $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, M \hookrightarrow L(M,M)$ est stricte.

4)** Existe-t-il une algèbre de Lie non-commutative pour laquelle le problème de Kostant admet une solution positive ?

5)** Toujours dans les hypothèses de 1.7.2, soit S l'ensemble des éléments réguliers dans $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, M$.

(i) Est-ce que tout élément S est régulier dans $L(M,M)$?

(ii) Est-ce que S est une ensemble de Ore pour $L(M,M)$?

(iii) Admettons (i), (ii) décrivez $S^{-1}L(M,M)$.

Pour le cas semisimple voir 5.5.

1.9. Le cas d'un anneau premier.

1.9.1 Pour tout entier $n > 0$ on note $M_n(k)$ l'algèbre de matrices $n \times n$ sur k. Soit A une algèbre simple, artinien de centre k. D'après Wedderburn-Artin on a $A \cong M_n \otimes_k K$ où K un corps de centre k. Si $\dim_k K < \infty$ toute dérivation de A est intérieure ([8], p. 100). Dans les algèbres enveloppantes on rencontre souvent les corps de dimension infinie sur leur centres (par exemple un corps de Weyl) où ce résultat risque d'être faux. Néamoins on a

LEMME. — <u>Soit</u> ∂ <u>une dérivation de</u> $A \cong M_n \otimes K$. <u>A un isomorphisme et à une dérivation intérieure près</u>, <u>on a</u>

$\partial(m \otimes x) = m \otimes \partial x$, $\forall m \in M_n$, $x \in K$.

Soit J un idéal maximal à gauche de A. Il existe un projecteur $e \in A$ tel que $J = Ae$. On pose $\partial' := \partial + \mathrm{ad}(\partial e)$. Puis $\partial' e = \partial e^2 + (\partial e)e - e(\partial e) = 2(\partial e)e \in J$. Il en

résulte que ∂' laisse stable J et donc son normalisateur $N(J)$.
Comme on peut identifier K avec $N(J)/J$ il en résulte que $\partial' K \subset K$. Soit ∂'' la dérivation de A définit par $\partial''(m \otimes x) = (m \otimes \partial' x)$, $\forall\, m \in M_n$, $x \in K$. Alors $\partial'' - \partial'$ est une dérivation de A qui s'annule sur K et qui est donc intérieure. L'assertion du lemme en résulte.

1.9.2. COROLLAIRE (notation 1.1.6) –

$$(M_n \otimes K)[X]_\partial \cong M_n \otimes K[X]_\partial .$$

1.9.3. Soit A un anneau premier et Goldie à gauche. Rappelons que l'ensemble S de tous les éléments réguliers de A est Ore à gauche dans A. Puis $S^{-1}A$ est un anneau, artinien ([7], 3.6.12) donc isomorphe à une algèbre de matrices sur un corps gauche, disons $M_n(K)$. On appelle n le rang de Goldie de A et on le note rk A.