7.2. Les théorèmes de Gabber.

Désormais on suppose k algèbriquement clos (de caractéristique zèro).

7.2.1. Soient $\underline{n}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie, $\delta \in \mathrm{Der}_k(\underline{n})$, M un $U(\underline{n})$ module admettons une filtration $\{F^i M\}$ de type fini compatible avec la filtration canonique $\{U^i(\underline{n})\}$ de $U(\underline{n})$, et $\Delta \in \mathrm{Der}_\delta(M)$.

THEOREME — (Gabber - non-publié). On suppose que

(*) Pour $\forall m \in M$, $\exists\ c(m) \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^i(m) \in F^{i+c(m)}M \quad \forall i$,

et que les valeurs propres de δ sonts les nombres rationnels strictement positifs. Alors $\bigcap \underline{n}^i M = 0$.

Remarques La conclusion peut-être exprimée en disant que M est séparé pour la topologie $\underline{n}$-adique. Une exemple de Dixmier ([18],) montre que l'assertion est fausse sans la condition (*).

7.2.2. Suivant Gabber nous allons réduire 7.2.1 au

THEOREME. — (Gabber - non publié). Soient B un $k[v]$ algèbre de type fini, où v est non-diviseur de zèro et central dans B,

N un $B[v^{-1}]$ module de type fini, $\delta \in \mathrm{Der}_{k[v]} B$, $\Delta \in \mathrm{Der}_{\delta}(N)$ et n un entier > 0. On suppose que

i) B/vB est de type fini comme k-algèbre,

ii) L'action de δ sur B/vB est semisimple de valeurs propres rationnels $\geqslant 0$, avec $(B/vB)^{\delta}$ réduit aux scalaires.

iii) $B/v^{n+1}B$ est commutatif,

iv) Il existe un B sous-module L de N de type fini tel que

a) $N = L[v^{-1}]$,

b) $u\,\Delta(L) \subset L$, (avec $u = v^{n}$)

c) $L/vL \neq 0$.

Alors pour tout $\alpha \in k^{*}$ on a $(N, \Delta) \not\cong (N, \Delta + \alpha)$.

Remarque. La conclusion s'exprime ainsi. Le B module N muni avec la δ-dérivation Δ est non-isomorphisme au B module N muni avec la δ-dérivation $\Delta + \alpha\, 1d_M$: $\alpha \in k^{*}$.

7.2.3. On se place dans la notation et dans les hypothèses de 7.2.1. Grâce à 7.1.7 on peut supposer que $\Delta(F^iM) \subset F^{i+1}M$, $\forall i$ sans restriction de généralité. Soit $\{S_j \subset F^jM : j = 0, 1, \ldots, l\}$ un système fini de générateurs de $\bigoplus F^iM$. On a $\Delta S_j \subset F^{j+1}M$.

Soit $\underline{n} = \underline{n}_0 \supsetneq \underline{n}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \underline{n}_t = 0$, une suite décroissante d'ideaux de $\underline{n}$ satisfaisants $\dim(\underline{n}_s/\underline{n}_{s+1}) = 1$ et stable pour l'action de δ. Il en résulte que l'action de δ sur $\bigoplus(\underline{n}_i/\underline{n}_{i+1})$ est semisimple. Soit n un entier positive $> 2^{t-1}$. Pour chaque $s<t$, choissons $X_s \in \underline{n}_s$, $X_s \notin \underline{n}_{s+1}$. Nous allons construire des sous-$k[v]$-espaces de $U(\underline{n})[v]$. On pose $\varepsilon = 1/n$, $u = v^n$, $B_0 = k[v]$, $B_{-s\varepsilon} = 0$, $s \in \mathbb{N}^+$ et

$$B_{s\varepsilon} = \sum_{\sum(1-2^{r_i}\varepsilon) \leq s\varepsilon} k[v](X_{r_1}X_{r_2}\ldots X_{r_l}), \quad \forall s \in \mathbb{N}^+.$$

On pose $B = \sum_{s \in \mathbb{N}} B_{s\varepsilon} v^s$, qui est une-$k[v]$ algèbre de type fini admettons v comme élément central et non-diviseur de zèro.

LEMME. — <u>Les conditions</u> (i) – (ii) <u>de</u> 7.2.2 <u>sont satisfaits</u>.

(i) est évidente. (ii) résulte de l'hypothèse sur δ et l'égalité $(1-2^{r}\varepsilon)-(1-2^{r+1}\varepsilon)=2^{r}\varepsilon$ qui entraîne que $\delta X_r \in k X_r \mod \mathfrak{r}B$.

(iii). Pour $\forall\, i,j \in \mathbb{N}$ on a (en prenant $i<j$)

$$\left[X_i\, u^{1-2^i\varepsilon},\ X_j\, u^{1-2^j\varepsilon}\right]=\left(\left[X_i, X_j\right] u^{(1-2^{j+1}\varepsilon)}\right) u^{1+(2^j-2^i)\varepsilon} \in u^{1+\varepsilon}B,$$

comme $[X_i, X_j] \subset \underline{n}_{j+1}$. D'où (iii).

7.2.4. Pour tout $s \in \mathbb{Z}$, on pose $G^{s\varepsilon}M := \sum_{j=0}^{\ell} B_{(s-j-n)\varepsilon} S_j$.

Alors $\oplus(G^{s\varepsilon}M)$ est un module gradué pour l'algèbre graduée $\oplus B_{s\varepsilon}$ qui est de type fini par construction. Comme $B_i \supset U^i(\underline{n})$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$ on a $G^iM \supset F^iM$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

On a $\delta(B_{s\varepsilon}) \subset B_{s\varepsilon}$ et $\Delta S_j \subset F^{j+1}M$. Puis

$$\sum B_{(s-j-n)\varepsilon}(\Delta S_j) \subset \sum B_{(s-j-n)\varepsilon}(F^{j+1}M) \subset \sum B_{(s-j-n)\varepsilon}(G^{j+1}M) \subset G^{s\varepsilon+1}M,$$

et alors

$$(*) \qquad \Delta(G^{s\varepsilon}M) \subset G^{s\varepsilon+1}M, \quad \forall\, s \in \mathbb{N}.$$

On pose $L = \sum_{s \in \mathbb{N}} (G^{sz} M) v^s$, qui est un sous $U(\underline{n})[v]$ module de $M[v]$, et $N = M[v, v^{-1}]$. Comme $\bigcup B_i \supset \bigcup U^i(\underline{n}) = U(\underline{n})$ et $\bigcup (G^i M) \supset \bigcup (F^i M) = M$, il résulte que $B[v^{-1}] = U(\underline{n})[v, v^{-1}]$, $L[v^{-1}] = N$.

En particulier $\Delta \in \mathrm{Der}_\delta(N)$ et comme M est de type fini comme $U(\underline{n})$ module, N est de type fini comme $B[v^{-1}]$ module. On suppose que $M \neq 0$.

LEMME. — *La condition (ii) de 7.2.2 est satisfaite.*

Par construction L est engendré comme B module par le sous-espace $\sum_{j=0}^{\ell} k u^j S_j$ de dimension finie. On a déjà vu que $L[v^{-1}] = N$. De $(*)$ il résulte que $u\,\Delta(L) \subset L$.

Comme $G^{sz} M = 0 \; : \; s < 0$ et $M \neq 0$ on a $L/vL \neq 0$.

7.2.5. LEMME. — *7.2.1. résulte de 7.2.2.*

On $\underline{b} = k\delta \oplus \underline{n}$ et on munit M avec la structure d'une $\underline{b}$ module selon $\delta(m) = \Delta(m)$, $\forall m \in M$. Si $M' := \bigcap \underline{n}^s M \neq 0$, en remplaçant M par le $\underline{b}$-module M' on peut supposer $M \neq 0$ et $M = \underline{n} M$. En remplaçant $\underline{n}$ par son image dans $\mathrm{End}\, M$ on peut supposer que l'action de $\underline{n}$ sur M soit fidèle.

On pose $X = X_{t-1}$. Alors $\ker X := \{m \in M : Xm = 0\}$ est un sous $\underline{b}$-module propre de M. En remplaçant M par $M/\ker X$ on peut supposer que l'action de X dans M soit injective. Si le $\underline{b}$-sous-module XM de M est propre on remplace M par M/XM dont l'action de X est triviale. En répétant cette procedure on peut supposer que soit l'action de X est bijective, soit que M admet un quotient non-nul Q tel que $\underline{n}\, Q = 0$ ce qui contredit $M = \underline{n}\, M$. Choisons $\alpha \in k$ tel que $\delta(X) = \alpha X$. D'après l'hypothèse sur les vecteurs propres de δ on a $\alpha \neq 0$. Comme l'action de X commute avec celle de $\underline{n}$ et $\Delta(Xm) = X(\Delta(m) + \alpha m)$, $\forall m$ il en résulte que $(M, \Delta) \cong (M, \Delta + \alpha)$. Puis $(N, \Delta) \cong (N, \Delta + \alpha)$ ce qui contredit la conclusion de 7.2.2.

7.3. Théorème d'integrabilité des caractéristiques (d'après Gabber).

7.3.1. Nous allons appliquer le théorème suivant dû à Gabber.

Soient $\tilde{C}$ une k-algèbre, $v \in \tilde{C}$ central, n un entier >0, $\tilde{L}$ un $\tilde{C}$ module. On pose $u = v^n$, $\bar{C} = \tilde{C}/v\tilde{C}$, $\bar{L} = \tilde{L}/v\tilde{L}$, $K = \mathrm{Ann}_{\bar{C}}\,\bar{L}$. On suppose que

(*) $\tilde{C}/u\tilde{C}$ <u>est commutative</u>.

Il en résulte que $\bar{C}$ est commutative et muni avec un crochet de Poisson $P : \bar{C} \times \bar{C} \to \bar{C}$ défini comme suite. Si $x, y \in \tilde{C}$ on a $[x,y] = uz$ avec $z \in \tilde{C}$. Alors on pose $P(\bar{x},\bar{y}) = \bar{z}$. On vérifie que $P(\bar{x},\bar{y})$ ne dépend que de $\bar{x},\bar{y}$ et on le prolonge par linéarité. Il résulte de ([22], Thm. II) que

THEOREME. — <u>Outre que (*) on suppose que</u>

(i) $u^2 = 0$,

(ii) $\bar{C}$ <u>est de type fini comme</u> k <u>algèbre</u> (<u>donc noethérienne</u>).

(iii) $\bar{L}$ <u>est de type fini comme</u> $\bar{C}$ <u>module</u> (<u>donc noethérien</u>).

(iv) $\{m \in \bar{L} : um = 0\} = u\bar{L}$.

<u>Alors</u> $P(\sqrt{K}, \sqrt{K}) \subset \sqrt{K}$.

<u>Remarque</u>. On désigne par $V(K) \subset \mathrm{Spec}(\bar{C})$, l'ensemble idéaux minimaux de $\bar{C}$ contenant K. Alors $P(\mathfrak{p},\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ et on dit

que la <u>variété caractéristique</u> $V(K)$ de K est <u>involutive</u>.

7.3.2. Reprennons la notation et les hypothèses de 7.2.2.

PROPOSITION. — $\sqrt{\mathrm{Ann}_{(B/vB)}(L/vL)}$ <u>est</u> δ-<u>stable</u>.

On pose $C = B[x]_{u\delta}$ (extension polynomiale tordue — voir 1.1.5). Grâce à 7.2.2 (iv b) nous pouvons définir une action de C sur L selon l'action de B donnée et selon $x\ell = u\Delta(\ell)$, $\forall \ell \in L$. On pose $\tilde{C} = C/v^{n+1}C$, $\tilde{L} = L/v^{n+1}L$. On utilise le même symbol pour un élément dans C et son image dans $\tilde{C}$.

Comme $u^2 = v^{2n+2} \in v^{n+1}C$, alors $u^2 = 0$ dans $\tilde{C}$. Puis (i). D'après 7.2.2 (iii), la sous-algèbre $\tilde{B} := B/v^{n+1}B$ de $\tilde{C}$ est commutative. Comme

$$(*) \qquad xb - bx = u\delta(b) \in uC,$$

il résulte que $\tilde{C}/u\tilde{C}$ est commutative. On pose $\overline{B} := B/vB$. D'après 7.2.2 (i),(iii) c'est une k-algèbre commutative de type fini. On a $\overline{C} = \overline{B}[\bar{x}]$, d'où $\overline{C}$ est de type fini. Puis (ii). D'après 7.2.2 (iv) $\overline{L}$ est déjà de type fini comme $\overline{B}$ module. Puis (iii). Enfin (iv) résulte du fait que l'application canonique $\ell \mapsto 1 \otimes \ell$ de L dans $L[v^{-1}] \cong B[v^{-1}] \otimes_B L$ est injective.

On peut donc appliquer 7.3.1 et il en résulte que $\sqrt{K}$ (avec $K := \operatorname{Ann}_{\bar{C}} \bar{L}$) est stable pour le crochet de Poisson P. Grâce à (*) on a $P(\bar{x}, \bar{b}) = \delta(\bar{b})$, $\forall\ b \in B$ et il résulte que $\delta(\sqrt{K}) \subset \sqrt{K}$. On pose $J' = \operatorname{Ann}_{\bar{B}} \bar{L}$. Alors $J' = K \cap \bar{B}$ donc $\sqrt{J'} = \sqrt{K} \cap \bar{B}$ est δ stable, ce qui montre la proposition.

7.4. Problèmes.

1) On reprend la notation de 7.3.2. Montrer que $\bar{C}/K$ est de type fini comme $\bar{B}$ module. En déduire que $\bar{C}/K$ est intègre sur $\bar{B}/J$.

2) Montrer que 7.3.1 résulte de [22], Thm. II.

3) Soit $A = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} A_s$ une k-algèbre commutative graduée de type fini. On pose $r = \operatorname{Kdim} A$. Montrer qu'il existent $z_1, z_2, \dots, z_r$ homogènes et algébriquement indépendants sur k tels que $\dim_k A / \langle z_1, z_2, \dots, z_r \rangle < \infty$. (Voir [1], 11.13 et ultilisez [1], 1.11, 7.10).

7.5. Resolution projective.

Notre but est la démonstration de 7.2.2. On se place donc dans ces hypothèses et ces notations. On pose $\tilde{B} = B/r^{n+1}B$, $\bar{B} = B/rB$, $\bar{L} = L/rL$, $J = \sqrt{\mathrm{Ann}_{\bar{B}}\,\bar{L}}$. Désormais tout anneau est commutatif.

7.5.1. On rappel (7.2.2 (ii)) que l'action de δ sur $\bar{B}$ est semi-simple, avec valeurs propres rationnels ≥ 0. Comme $\bar{B}$ est de type fini, on peut supposer sans restriction de généralité que toute valeur propre de δ sur $\bar{B}$ est un entier positif. Soit

$$\bar{B} = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} \bar{B}_s$$

la graduation de $\bar{B}$ par valeurs propres de δ qui en résulte. Encore d'après 7.2.2 (ii) on $\bar{B}_0 = k$.

D'après 7.3.2, J est un idéal gradué de $\bar{B}$ distinct de $\bar{B}$. (grâce à 7.2.2(iv c)). Alors $A := \bar{B}/J$ est une k-algèbre commutative graduée de type fini. Soit $r = \mathrm{Kdim}\, A$. D'après 7.4.3 ils existent $z_1, z_2, \ldots, z_r \in A$ algèbriquement independents sur k, qui sont les vecteurs propres de δ de valeurs propres $n_i \in \mathbb{N}^+$ et tels que $\dim_k A/\langle z_1, z_2, \dots, z_r\rangle < \infty$. Choisissons $\bar{z}_i \in \bar{B}$ vecteurs propres de δ tels que $\bar{z}_i + J = z_i$, et $\tilde{z}_i \in \tilde{B}$ tels que $\tilde{z}_i + v\bar{B} = \bar{z}_i$.

On pose $\Lambda = k[v]/\langle v^{n+1}\rangle$, $R = \Lambda[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_r]$.

D'après ce qui procède il existe un monomorphisme φ R dans $\tilde{B}$ avec $\dim_k \tilde{B}/\varphi(R) < \infty$. On considère $\tilde{B}$ et $\tilde{L}$ comme les R modules de type fini. $\underbrace{}_{}$ On pose $\bar{R} = R/vR$ On a $\bar{L} \cong \tilde{L}/v\tilde{L}$ et $\mathrm{Ann}_{\bar{R}} \bar{L}_0 = 0$, d'après le choix des z_i et de J.

7.5.2. On dira qu'un Λ module K est Λ-plat si pour tout $1 \leq i \leq n$ l'application $k + vK \mapsto v^i k + v^{i+1}K$ de K/vK dans $v^iK/v^{i+1}K$ est bijective. Comme (7.2.2 (iv)) v est non-diviseur de zéro dans L, il résulte que $\tilde{L}$ est Λ-plat.

Cette terminologie provient du lemme suivant, où on rappel que par hypothèse $v^{n+1} = 0$ (dans Λ).

LEMME. —

(i) Soit $\varphi : K_1 \twoheadrightarrow K_2$ un épimorphisme de Λ-plat modules Alors $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est Λ plat.

(ii) Le foncteur $K \to K/vK$ est exacte sur les Λ-plat modules.

(i) On pose $K = \operatorname{Ker}\varphi$ et choisissons $k \in K$. Etant donné $\varpi k \in \varpi^2 K$, il s'agit de montrer que $k \in \varpi K$. Comme K_1 est Λ-plat il existe $k_1 \in K_1$ tel que $k = \varpi k_1$. Puis $0 = \varphi(k) = \varpi\,\varphi(k_1)$ et comme K_2 est Λ-plat il en resulte que $\varphi(k_1) \in \varpi^n K_2$. Comme φ est surjectif il existe $k_1' \in K_1$ tel que $\varphi(k_1) = \varpi^n \varphi(k_1')$. On a donc $k = \varpi(k_1 - \varpi^n k_1')$ et $\varphi(k_1 - \varpi^n k_1')$ ce qui donne l'assertion recherchée.

La démonstration de (ii) est pareille.

7.5.3. On dira qu'un anneau noetherien A est régulier si tout A module de type fini admet une résolution finie par les A-modules projectifs de type fini. Par exemple si A est une algèbre de polynômes sur un corps. ([10],). En particulier si R est défini comme dans 7.5.2 alors $R/\varpi R$ est régulier. Cependant pour $n > 1$, l'algèbre R n'est pas régulier. Néamoins on a le

LEMME. — *Soit K un R module qui est Λ-plat et de type fini. Alors K admet une résolution finie par les R-modules projectifs de type fini.*

On va remonter à R une résolution projective finie de $\overline{K} := K/\varpi K$ comme $\overline{R} := R/\varpi R$ module. Dans ceci un module est toujours supposé de type fini.

Si $\overline{P}$ est un module projectif de $\overline{R}$ on désigne par P le R module projectif $P = \overline{P} \otimes_{\overline{R}} R$. Par construction l'application surjective $P/\nu P \xrightarrow{\pi} \overline{P}$ est un isomorphisme.

On remarque que tout module projectif de R est Λ-plat, en effet R est lui-même Λ-plat, donc R^{τ} est Λ-plat et enfin tout facteur direct d'un module Λ-plat est Λ-plat.

On suppose donné un R module Q qui est Λ-plat, un $\overline{R}$ module projectif $\overline{P}$ et une surjection $\overline{\varphi} : \overline{P} \twoheadrightarrow \overline{Q} := Q/\nu Q$.

On trouve donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & Q \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \overline{P} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{Q} \end{array}$$

où φ est défini grâce à la projectivité de P. Comme $\overline{\varphi}\pi$ est surjectif on trouve $\pi(Q/\mathrm{Im}\,\varphi) = 0$, c'est à dire $Q = \nu Q + \mathrm{Im}\,\varphi$.

Puis $\nu^n Q = \nu^{n+1} Q + \nu^n \mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Im}\,\varphi$ (comme $\nu^{n+1} = 0$) et par recurrence $\nu^i Q \subset \mathrm{Im}\,\varphi \ \ \forall\, i$, de sorte que φ est surjectif.

D'après 7.5.2 (i) il en résulte que $Q' := \mathrm{Ker}\,\varphi$ est Λ plat et d'après 7.5.2 (ii) que $Q'/\nu Q' = \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$.

Soit $0 \to \overline{P}_s \xrightarrow{\overline{\varphi}_s} \overline{P}_{s-1} \to \dots \to \overline{P}_0 \xrightarrow{\overline{\varphi}_0} \overline{K} \to 0$ une resolution projective finie de $\overline{K}$ (qui existe comme $\overline{R}$ est régulier). En prenant successivement $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_0$, $Q = K$; $\overline{\varphi} = \overline{\varphi}_1$, $Q = \operatorname{Ker} \varphi_0$; ....; il en résulte, d'après ce qui procéde, que $0 \to P_s \to \dots \to P_0 \xrightarrow{\varphi_0} K \to 0$ est une résolution projective finie de K.

7.6. Trace.

L'idée de la démonstration de 7.2.2 est de trouver un invariant pour le couple (N, Δ) qui serait différent de l'invariant pour le couple $(N, \Delta + \alpha)$. La bonne notion est celle du trace, qui généralise la caractéristique d'Euler en sens de ([10], Sect. 4.3).

7.6.1. Soit A un anneau muni avec une dérivation d. On note J_d l'idéal de A engendré par les éléments $da : a \in A$. Soient M un A module et $\Delta \in \operatorname{Der}_d(M)$. Nous voulons définir $\operatorname{tr}_d(\Delta, M)$ comme élément de A/J_d tel que

$\operatorname{tr}_d(\Delta, M) = \operatorname{tr}_d(\Delta, N_1) + \operatorname{tr}_d(\Delta, N_2)$ au moins si $M = N_1 \oplus N_2$.

Dans ceci tous les modules sont supposés de type fini.

7.6.2. (Notation 7.6.1). D'après la formule $\Delta(am) = d(a)m + a(\Delta m)$, il résulte que $\Delta(\mathcal{J}_d M) \subset (\mathcal{J}_d M)$ et que Δ induit un élément $\overline{\overline{\Delta}}$ de $\mathrm{Hom}_{\overline{\overline{A}}}(\overline{\overline{M}}, \overline{\overline{M}})$ où $\overline{\overline{A}} := A/\mathcal{J}_d$, $\overline{\overline{M}} = M/\mathcal{J}_d M$.

Soient $\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{Q}}$ les $\overline{\overline{A}}$ modules. Alors $\alpha \otimes q \xmapsto{\varphi} (p \mapsto \alpha(p) \otimes q)$ se prolonge linéairement comme application de $\mathrm{Hom}_{\overline{\overline{A}}}(\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{A}}) \otimes_{\overline{\overline{A}}} \overline{\overline{Q}}$ dans $\mathrm{Hom}_{\overline{\overline{A}}}(\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{A}} \otimes_{\overline{\overline{A}}} \overline{\overline{Q}})$ qui est injective pour $\overline{\overline{Q}}$ libre, donc injective pour $\overline{\overline{Q}}$ projectif. Si $\overline{\overline{P}}$ est libre de type fini, c'est à dire $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{A}} p_1 \oplus \overline{\overline{A}} p_2 \oplus \dots \oplus \overline{\overline{A}} p_m$, alors $\beta \in \mathrm{Hom}_{\overline{\overline{A}}}(\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{A}} \otimes_{\overline{\overline{A}}} \overline{\overline{Q}})$ est uniquement déterminé par les $\beta(p_i)$.

On pose $\beta(p_i) = \sum_j \beta_{ij} \otimes q_j$: $\beta_{ij} \in \overline{\overline{A}}$, $q_j \in \overline{\overline{Q}}$. Alors pour tout j, $p_i \mapsto \alpha_j(p_i) := \beta_{ij}$ se prolonge (car $\overline{\overline{P}}$ est $\overline{\overline{A}}$-libre) comme élément $\alpha_j \in \mathrm{Hom}_{\overline{\overline{A}}}(\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{A}})$, ce qui montre que φ est surjectif pour $\overline{\overline{P}}$ libre et donc surjectif pour $\overline{\overline{P}}$ projectif.

Désormais on prend $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{Q}}$ avec $\overline{\overline{P}}$ projectif et on identifie $\overline{\overline{A}} \otimes_{\overline{\overline{A}}} \overline{\overline{P}}$ avec $\overline{\overline{P}}$. Alors $\theta : \alpha \otimes p \mapsto \alpha(p)$ se prolonge comme application de $\mathrm{Hom}_{\overline{\overline{A}}}(\overline{\overline{P}}, \overline{\overline{A}}) \otimes_{\overline{\overline{A}}} \overline{\overline{P}}$ dans $\overline{\overline{A}}$.

Pour tout $\beta \in \mathrm{Hom}_{\bar{\bar{A}}}(\bar{\bar{P}},\bar{\bar{P}})$ on pose $\mathrm{tr}(\beta,\bar{\bar{P}}) = \theta\varphi^{-1}(\beta)$.

Si $\bar{\bar{P}}$ est libre on trouve avec la notation précédente que

$\varphi^{-1}\beta = \sum \alpha_j \otimes p_j$ et donc $\mathrm{tr}(\beta,\bar{\bar{P}}) = \theta(\varphi^{-1}\beta) = \sum \alpha_j(p_j) = \sum \beta_{jj}$.

Si $\bar{\bar{P}}$ est projectif on choisit $\bar{\bar{Q}}$ projectif tel que $\bar{\bar{F}} := \bar{\bar{P}} \oplus \bar{\bar{Q}}$ est libre. Soit β' le prolongement de β à $\bar{\bar{F}}$ définit par $\beta'|_{\bar{\bar{Q}}} = 0$. Alors $\mathrm{tr}(\beta',\bar{\bar{F}}) = \mathrm{tr}(\beta,\bar{\bar{P}})$. En outre l'application $\beta \mapsto \mathrm{tr}(\beta,\bar{\bar{P}})$ est additive. Pour tout A module projectif P on pose $\mathrm{tr}_d(\Delta,P) := \mathrm{tr}(\bar{\bar{\Delta}},\bar{\bar{P}})$. Il résulte facilement des formules précédentes que $\mathrm{tr}_d(\Delta,P) = \mathrm{tr}_d(\Delta',P') + \mathrm{tr}_d(\Delta'',P'')$, où $P = P' \oplus P''$ sonts projectifs et où $\Delta' \in \mathrm{Der}_d(P')$, $\Delta'' \in \mathrm{Der}_d(P'')$ sont définit par restriction de $\Delta \in \mathrm{Der}_d(P)$.

Soient $\bar{\bar{P}}, \bar{\bar{Q}}$ les $\bar{\bar{A}}$ modules projectifs et $\beta_1 \in \mathrm{Hom}_{\bar{\bar{A}}}(\bar{\bar{P}},\bar{\bar{Q}})$, $\beta_2 \in \mathrm{Hom}_{\bar{\bar{A}}}(\bar{\bar{Q}},\bar{\bar{P}})$, alors $\beta := \beta_2\beta_1 \in \mathrm{Hom}_{\bar{\bar{A}}}(\bar{\bar{P}},\bar{\bar{P}})$ et $\beta' := \beta_1\beta_2 \in \mathrm{Hom}_{\bar{\bar{A}}}(\bar{\bar{Q}},\bar{\bar{Q}})$ et en faisant les calculs d'abord sur les modules libres on trouve

$$(*) \qquad \mathrm{tr}(\beta_2\beta_1, \bar{\bar{P}}) = \mathrm{tr}(\beta_1\beta_2, \bar{\bar{Q}}).$$

Soient M un A module, P_0 un A module projectif avec $\varepsilon : P_0 \twoheadrightarrow M$ surjectif. Si $\Delta \in \mathrm{Der}_d(M)$ montrons qu'il existe $\Delta_0 \in \mathrm{Der}_d(P_0)$ qui rende le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \to & 0 \\ \Delta_0 \downarrow & & \downarrow \Delta & & \\ P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \to & 0 \end{array}$$

commutatif. D'abord supposons que P_0 soit libre, disant avec générateurs $\{\tilde{m}_i\}_{i=1}^{t}$. On pose $m_i = \varepsilon(\tilde{m}_i)$ et si $\Delta m_i = \sum a_{ij} m_j$: $a_{ij} \in A$ on pose $\Delta_0 \tilde{m}_i = \sum a_{ij} \tilde{m}_i$. Puis on prolonge Δ_0 à P_0 selon la formule $\Delta_0 \tilde{m} = \sum_i \left(d(a_i)\, \tilde{m}_i + a_i\, \Delta_0(\tilde{m}_i) \right)$ étant donné que $\tilde{m} = \sum a_i \tilde{m}_i$. Comme d est une dérivation il résulte facilement que $\Delta_0 \in \mathrm{Der}_d(P_0)$ et d'autre part $\varepsilon \Delta_0 = \Delta \varepsilon$ par construction. Pour le cas général choisons Q_0 tel que $P_0' := P_0 \oplus Q_0$ soit libre et posons $\varepsilon' = (\varepsilon, 0)$. Le résultat précédent fournit $\Delta_0' \in \mathrm{Der}_d(P_0')$ satisfaisant $\varepsilon' \Delta_0' = \Delta \varepsilon'$. Puis il suffit de prendre $\Delta_0 = e \Delta_0' e$ où e est la projection sur P_0 définit par la decomposition $P_0' = P_0 \oplus Q_0$.

Enfin soit M est A module admettant une resolution projective finie $0 \to P_s \to P_{s-1} \to \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$, en abrégé $P_* \xrightarrow{(d_*, \varepsilon)} M$. D'après ce qui procède on peut choisir $\Delta_i \in \mathrm{Der}_d(P_i)$ qui rendre le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_* & \xrightarrow{(d_*, \varepsilon)} & M \\ \Delta_* \downarrow & & \downarrow \Delta \\ P_* & \xrightarrow{(d_*, \varepsilon)} & M \end{array}$$

commutatif.

On pose $tr_d(\Delta, M) = \sum(-1)^i \, tr_d(\Delta_i, P_i)$.

LEMME. — $tr_d(\Delta, M)$ est un invariant pour (Δ, M).

C'est à dire $tr_d(\Delta, M)$ ne dépend pas

(i) Du revêtement Δ_* de Δ.

(ii) De la resolution projective finie P_* de M.

(i). Soient Δ_*, Δ'_* deux revêtements de Δ. Comme $\Delta'_i - \Delta_i \in Hom_A(P_i, P_i)$ il résulte de ([5], pp. 76-77) que Δ_*, Δ'_* sont homotopiques. C'est à dire pour tout $i \geq 0$ ils existent $s_i : Hom_A(P_i, P_{i+1})$ tels que

$$\Delta'_i - \Delta_i = d_{i+1} s_i + s_{i-1} d_i \quad (s_{-1} = 0).$$

Alors

$$\sum(-1)^i \left(tr_d(\Delta'_i, P_i) - tr_d(\Delta_i, P_i)\right)$$

$$= \sum(-1)^i \left(tr(\bar{\bar{d}}_{i+1} \bar{\bar{s}}_i, \bar{\bar{P}}_i) + tr(\bar{\bar{s}}_{i-1} \bar{\bar{d}}_i, \bar{\bar{P}}_i)\right),$$

$$= \sum(-1)^i \left(tr(\bar{\bar{s}}_i \bar{\bar{d}}_{i+1}, \bar{\bar{P}}_{i+1}) + tr(\bar{\bar{s}}_{i-1} \bar{\bar{d}}_i, \bar{\bar{P}}_i)\right), \text{ d'après } (*),$$

$$= 0 .$$

La démonstration de (ii) est pareille.

7.6.3. On reprend les notations et les hypothèses de 7.2.2 et 7.5.1. Nous allons appliquer 7.6 avec $A = R$; $d = 0$, $\Delta = Id_M$ puis avec $d = u\delta$ et $u\Delta \in Der_{u\delta}(\tilde{L})$. Soit K un R module qui est Λ-plat. Grâce à 7.5.2 et 7.6.2,

$tr_\delta(\Delta, K)$ est définit pour tout $\Delta \in Der_\delta(K)$. On pose

$\chi(K) := tr_0(Id_K, K)$ qui n'est rien autre que le caractéristique

d'Euler ([10] ,). On pose $\bar{S} = Fract(\bar{R})$.

(On rappel qu'un anneau régulier est intègre ([ ],)).

LEMME. —

(i) $\chi(K) = \dim_{\bar{S}} (K/\sigma K \otimes_{\bar{R}} \bar{S})$.

(ii) $\chi(\tilde{L})$ est définit et égale à un entier > 0.

(i). Grâce à 7.6.2 il suffit de montrer (i) pour K projectif. Grâce à $K \cong \bar{K} \otimes_{\bar{R}} R$, $Id_K = Id_{\bar{K}} \otimes Id_R$ il résulte que $\chi(K) = \chi(\bar{K})$. Choisissons $\bar{K}'$ tel que $\bar{F} := \bar{K} \oplus \bar{K}'$ est libre et $0 \to \bar{K}' \to \bar{F} \overset{e}{\to} \bar{K} \to 0$. Alors $\chi(\bar{K}) = tr(e, \bar{F}) =$ $= \dim_{\bar{S}} (e\bar{F} \otimes_{\bar{R}} \bar{S})$ où le dernière égalité résulte du calcul habituel dans $M_m(\bar{S})$: $m = rk\,\bar{F}$.

(ii). Grâce à (i), il reste à verifier que $\bar{L} \otimes_{\bar{R}} \bar{F} \neq 0$.

On a déjà $\bar{L} \neq 0$ (7.2.2 iv c). Soit $\{l_i\}_{i=1}^t$ un système fini de générateurs de $\bar{L}$ comme $\bar{R}$ module (cf. 7.5.1). Alors

$\bigcap \mathrm{Ann}_{\bar{R}}\, l_i = \mathrm{Ann}_{\bar{R}} \bar{L} = 0$ (7.5.1) ce qui entraîne l'assertion recherchée.

7.6.4. Par construction $\delta\tilde{z}_i = n_i\tilde{z}_i \mod v\widetilde{B}$ (notation 7.5.1). Alors $(u\delta)\tilde{z}_i = n_i u\tilde{z}_i$. Il en résulte que l'idéal $J_{u\delta}$ (de R) est contenu dans uI, où I est l'idéal d'augmentation de R. En particulier $u \notin J_{u\delta}$. D'après 7.2.2 (iv b), on a $u\Delta \in \mathrm{Der}_{u\delta}(\tilde{L})$. On pose $\delta_0 = u\delta$.

LEMME. Pour tout $\alpha \in k^*$ on a

$$tr_{\delta_0}(u\Delta, \tilde{L}) \neq tr_{\delta_0}(u\Delta + \alpha u (Id)_{\tilde{L}}, \tilde{L}).$$

En effet

$$tr_{\delta_0}(u\Delta + \alpha u (Id)_{\tilde{L}}, \tilde{L}) - tr_{\delta_0}(u\Delta, \tilde{L})$$

$$= \alpha u \, tr_0((Id)_{\tilde{L}}, \tilde{L})$$

$$= \alpha u \, \chi(\tilde{L}).$$

D'après 7.6.3 (ii), $\alpha\chi(\tilde{L}) \in k^*$. Comme $u \notin J_d$ ceci donne l'assertion recherchée.

7.7 <u>L'independence du réseau</u>.

7.7.1. On garde toujours les notations et les hypothèses de 7.2.2. Pour déduire 7.2.2 de 7.6.4 il reste encore à montrer que $tr_{\delta_0}(u\Delta, L)$ ne dépend pas du choix de L satisfaisant 7.2.2 (iv). Alors étant donné $B, v, N, \delta, \Delta, n$, satisfaisant 7.2.2 (i)–(iii) on appelle un Δ-réseau de N un B sous-module L de N satisfaisant 7.2.2 (iv). On désigne par $\mathcal{L}_\Delta$ l'ensemble de tous les Δ-réseaux de N. On note que si $L, L' \in \mathcal{L}_\Delta$, alors $L + L' \in \mathcal{L}_\Delta$ et $v^i L \in \mathcal{L}_\Delta$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$. Pour tout $\alpha \in k^*$ on a $\mathcal{L}_\Delta = \mathcal{L}_{\Delta+\alpha}$ dans un sens évident. Alors si on pose $t(L) := tr_{u\delta}(u\Delta, L)$ il reste à démontrer la

PROPOSITION. — $t(L)$ est <u>independant du choix de</u> $L \in \mathcal{L}_\Delta$.

La démonstration résulte de 7.7.2–7.7.4.

7.7.2 LEMME. — <u>Il suffit de montrer</u> 7.7.1 <u>pour le cas</u> $L' \supset L \supset vL'$.

On suppose que la proposition est démontrée dans le cas où $L' \supset L \supset \varpi L'$: $L, L' \in \mathcal{L}_\Delta$. Soient $L, L' \in \mathcal{L}$ quelconques. On pose $L'_i = L + \varpi^i L'$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Comme $L'_i \supset L'_{i+1} \supset \varpi L'_i$ il résulte que $t(L+L') = t(L'_i)$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. D'autre part $L[\varpi^{-1}] = N = L'[\varpi^{-1}]$ (7.2.2 (iv a)) et comme L' est un B module de type fini et $\varpi \in B$ est central, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\varpi^{i+1} L' \subset L$. Puis $L'_i \supset L \supset \varpi L'_i$ et donc $t(L) = t(L'_i) = t(L+L')$. Pareillement $t(L') = t(L+L')$.

7.7.3. LEMME. — <u>Soit</u> A <u>un anneau commutatif, noethérien, régulier. Etant donnés les</u> A <u>modules</u> M, M′ <u>de type finis et les suites exactes</u>

$$(S) \qquad 0 \to M \to P \to M' \to 0$$

$$(S') \qquad 0 \to M' \to P' \to M \to 0$$

<u>avec</u> P, P' <u>projectifs ; alors</u> M, M <u>sont projectifs</u>.

D'après (S) et la projectivité de P on a

$\mathrm{Ext}^i(M', N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{i+1}(M, N)$, pour tout entier $i > 0$ et tout A module

N. Pareillement $Ext^i(M,N) \xrightarrow{\sim} Ext^{i+1}(M',N)$ résulte de (S').

Comme A est régulier, $Ext^i(M,N) = 0$, pour i assez grand et vu des deux isomorphismes précédents pour tout $i>0$. Donc M est projectif et pareillement M' l'est aussi.

<u>Remarque</u>. L'assertion correspondante pour l'anneau R : $n \geq 1$ est fausse.

7.7.4. Soient K, K' les R Λ-plats de type fini et $\delta_0 \in Der_k R$. On pose $\overline{K} = K/tK$, $\overline{K}' = K'/tK'$. On dira que les R-homomorphismes $K \xrightarrow{\varphi} K' \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{\varphi} K'$ sont t-compatibles si $\psi\varphi(m) = tm$, $\varphi\psi(m') = tm'$, $\forall\, m \in K$, $m' \in K'$ et si la suite induite $\overline{K} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{K}' \xrightarrow{\overline{\psi}} \overline{K} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{K}'$ dans $\overline{B}_0$ est exacte. Par exemple étant donné $tL' \subset L \subset L'$ on pose $K = \tilde{L}$, $K' = \tilde{L}'$ avec $K \xrightarrow{\varphi} K'$ l'homomorphisme qui déduit du plongement $L \hookrightarrow L'$ et $K' \xrightarrow{\psi} K$ l'homomorphisme qui déduit du monomorphisme $l' \mapsto tl'$ de L' dans L. On dira que $\Delta_0 \in Der_{\delta_0}(K)$, $\Delta_0' \in Der_{\delta_0}(K')$ sont (φ,ψ)-compatibles si le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
K & \xrightarrow{\varphi} & K' & \xrightarrow{\psi} & K & \xrightarrow{\varphi} & K' \\
\Delta_0 \downarrow & & \Delta_0' \downarrow & & \Delta_0 \downarrow & & \Delta_0' \downarrow \\
K & \xrightarrow{\varphi} & K' & \xrightarrow{\psi} & K & \xrightarrow{\varphi} & K'
\end{array}$$

est commutatif. Par exemple si Δ (resp. Δ') est déduit de

$u\Delta \in \mathrm{Der}_{u\delta}(L)$ (resp. $u\Delta \in \mathrm{Der}_{u\delta}(L')$).

LEMME. — <u>Si les conditions de compatibilité sont satisfaites,</u> <u>alors</u> $tr_{\delta_0}(\Delta_0, K) = tr_{\delta_0}(\Delta'_0, K')$.

On pose $\overline{C} = \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$, $\overline{D} = \mathrm{Ker}\,\overline{\psi}$ et on déduit les suites exactes

$$(S) \qquad 0 \to \overline{C} \to \overline{K} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{D} \to 0,$$

$$(S') \qquad 0 \to \overline{D} \to \overline{K}' \xrightarrow{\overline{\psi}} \overline{C} \to 0.$$

Supposons que $\overline{K}, \overline{K}'$ sont des $\overline{R}$ modules projectifs. Comme $\overline{R}$ est régulier il résulte 7.7.3 que $\overline{C}$ et $\overline{D}$ sont projectifs et que $\overline{K} \cong \overline{C} \oplus \overline{D} \cong \overline{K}'$. On pose $C = \overline{C} \otimes_{\overline{R}} R$, $D = \overline{D} \otimes_{\overline{R}} R$ qui sont les R modules projectifs. On voit facilement que $K \cong C \oplus D \cong K'$ où l'homomorphisme $K \xrightarrow{\varphi} K'$ est défini par $\varphi(c,d) = (\pi c, d)$ et l'homomorphisme $K' \xrightarrow{\psi} K$ est défini par $\psi(c,d) = (c, \pi d)$. Posons $\Delta_0(c,0) = (c_1, d_1)$, $\Delta_0(0,d) = (c_2, d_2)$, $\Delta'_0(c,0) = (c'_1, d'_1)$, $\Delta'_0(0,d) = (c'_2, d'_2)$.

Comme Δ_0, Δ'_0 sont (φ, ψ)-compatibles on trouve

$(c_1 + v c_2, d_1 + v d_2)$. Il résulte que $(1-v)(c_1 - c_1') = 0$. Comme v est nilpotent dans C, alors $(1-v)$ est inversible et puis $c_1 = c_1'$.

Pareillement $d_2 = d_2'$. On a donc $(\Delta_0 - \Delta_0')(c, 0) = (0, d_1 - d_1')$ et $(\Delta_0 - \Delta_0')(0, d) = (c_2 - c_2', 0)$. En rappelant la définition de trace, il en résulte que $tr_{\delta_0}(\Delta_0, K) = tr_{\delta_0}(\Delta_0, C \oplus D) = tr_{\delta_0}(\Delta_0', C \oplus D) = tr_{\delta_0}(\Delta_0', K')$.

Passant au cas général. En appliquant le "9 - lemma" ([5],) à (S) on trouve le diagramme commutatif de $\overline{R}$ modules

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \overline{C} \arrow[u] \arrow[r] & \overline{K} \arrow[u] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \overline{D} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{Q} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r] & \overline{Q} \oplus \overline{Q}' \arrow[u] \arrow[r] & \overline{Q}' \arrow[u, "\pi'"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec $\overline{Q}$ et $\overline{Q}'$ projectifs . En composant avec le diagramme correspondant pour (S') on trouve le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & 0 \\
K \arrow[u] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & K' \arrow[u] \arrow[r, "\overline{\psi}"] & \overline{K} \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & \overline{K}' \arrow[u] \\
\overline{Q} \oplus \overline{Q}' \arrow[u, "{(\pi,0)}"] \arrow[r] & \overline{Q} \oplus \overline{Q}' \arrow[u, "{(0,\pi')}"] \arrow[r] & \overline{Q} \oplus \overline{Q}' \arrow[u, "{(\pi,0)}"] \arrow[r] & \overline{Q} \oplus \overline{Q}' \arrow[u, "{(0,\pi')}"]
\end{tikzcd}$$

où les homomorphismes sur le dernier rang sont

$(g,g') \mapsto (0,g')$, $(g,g') \mapsto (g,0)$, $(g,g') \mapsto (0,g')$ respectivement.

En répétant cette procédure aux noyaux des flèches verticales on trouve éventuellement des résolutions projectifs $\overline{P}_*$, $\overline{P}'_*$ de $\overline{K}, \overline{K}'$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\overline{K} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{K}' & \xrightarrow{\overline{\psi}} & \overline{K} & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & \overline{K}' \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\overline{P}_* & \xrightarrow{\overline{\varphi}_*} & \overline{P}'_* & \xrightarrow{\overline{\psi}_*} & \overline{P}_* & \xrightarrow{\overline{\varphi}_*} & \overline{P}'_*
\end{array}$$

est commutatif et admet des colonnes et rangs exactes. Procédant comme dans 7.5.3 ceci remonte à R avec homomorphismes

$P_* \xrightarrow{\varphi_*} P' \xrightarrow{\psi_*} P \xrightarrow{\varphi_*} P'$ qui sont v-compatibles. Comme dans 7.6.2 on prolonge Δ_o, Δ'_o à P_*, P'_* et il en résulte des dérivations $\Delta_{oi} \in Der_{\rho_o}(P_i)$, $\Delta'_{oi} \in Der_{\rho_o}(P'_i)$ qui sont (φ_i, ψ_i)-compatibles. Tenant compte de la définition de trace ceci achève la démonstration de la proposition.

7.8. Modules de Harish-Chandra et le théorème de Casselman.

7.8.1. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g} = \underline{n} \oplus \underline{h} \oplus \underline{n}^-$ une décomposition triangulaire, $\underline{b} = \underline{h} \oplus \underline{n}$, et $\underline{c}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \underline{c} + \underline{b}$. On désigne par $\underline{G}'_{\underline{c}}$ (ou simplement, $\underline{G}'$) la catégorie des $U(\mathfrak{g})$ modules V satisfaisant les conditions suivantes

(i) V est de type fini.

(ii) L'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur V est finie.

(iii) L'action de $\underline{c}$ sur V est localement finie.

D'après (i), V admet une filtration finie décroissante telle que $Z(\mathfrak{g})$ agit par scalaires sur chaque quotient. Dans ce qui suit on peut supposer que l'action de $Z(\mathfrak{g})$ est par scalaires. L'intérêt de ce plus grand généralité est que d'après un théorème de Kostant [36] les $U(\mathfrak{g})$ modules satisfaisant (i) forment un catégorie stable sous le foncteur $M \mapsto M \otimes_k E$ où E est un $U(\mathfrak{g})$ module de dimension finie (et $U(\mathfrak{g})$ agit dans $M \otimes_k E$ par son action diagonale. Il en résulte que $\underline{G}'$ est aussi stable sous ce foncteur.

Soit V^0 un sous-espace de V de dimension finie tel que $V = U(\underline{g})V^0$. D'après (ii) on peut supposer que $\underline{a}V^0 \subset V^0$ sans restriction de généralité. Puis $U^i(\underline{g})V^0 = U^i(\underline{b})V^0$, $\forall i$ et on désigne ce sous-espace par V^i. Alors $\{V^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une filtration de V compatible avec la filtration canonique de $U(\underline{g})$. Soit $gr\, V$ le $gr(U(\underline{g})) = S(\underline{g})$ module associé.

LEMME. — $gr\, V$ <u>est de type fini comme</u> $S(\underline{n})$ <u>module</u>.

L'application $c \otimes z \otimes n \overset{\varphi}{\mapsto} czn$ est un homomorphism de $S(\underline{c}) \otimes gr(Z(\underline{g})) \otimes S(\underline{n})$ dans $S(\underline{g})$. On $A = \operatorname{Im}\varphi$. Montrons que $S(\underline{g})$ est de type fini comme A module. On rappel ([7], 2.4.11) que $gr(Z(\underline{g}))$ s'identifié avec l'ensemble $Y(\underline{g})$ d'éléments de $S(\underline{g})$ qui sont invariants pour l'action adjointe de $\underline{g}$ et on désigne par $\theta : Y(\underline{g}) \to S(\underline{h})$ l'homomorphisme de Harish-Chandra ([7], 7.4.3). On sait que $Y(\underline{g})$ est de type fini comme $\operatorname{Im}\theta$ module (en effet on sait beaucoup plus [7], 7.4.5). De plus $Y(\underline{g})$

est engendré comme espace vectoriel par les polynômes invariants homogènes. Soit $y \in Y(\underline{g})$ homogène de degré t. Alors ([7], 2.4.11) $\theta(y) \in S(\underline{h})$ est homogène de degré t et s'écrit ([7], 7.4.2) de la manière

$$\theta(y) = y + \sum x_i X_i : X_i \in \underline{n}, x_i \in S(\underline{g}) \text{ de degré} < t.$$

Comme $\underline{g} = \underline{c} + \underline{b}$ on a donc

$$\theta(y) = \sum h_i a_i \quad : \quad a_i \in A \, , \, h_i \in S(\underline{h}) \text{ de degré} < t.$$

De proche en proche on démontre l'assertion recherchée.

Enfin écrivons $S(\underline{g}) = AK \; : \; \dim_k K < \infty$. Comme $gr\, V^\circ$ est invariant pour l'action de $S(\underline{c})$ et de $gr(Z(\underline{g}))$ il résulte que $gr\, V$ est engendré comme $S(\underline{n})$ module par l'espace $K\, gr\, V^\circ$ qui est de dimension finie.

7.8.2. Ce résultat généralise légèrement une observation de Casselman-Osborne qui ont montrés que V est de type fini comme $U(\underline{n})$ module (pour un choix particulier de $\underline{c}$). Cependant c'était Gabber qui a remarqué que la conclusion plus forte de 7.8.1 entraîne aussi la condition (*) de 7.2.1 nécessaire pour sa démonstration. De plus si on prende pour δ un élément H de $\underline{h}$ qui est combinaison linéaire à coefficients entiers > 0 des coracines $H_\alpha \in \underline{h}$ des racines simples α et pour $\Delta \in \mathrm{Der}_{\mathfrak{g}}(V)$: $v \mapsto Hv$ de V dans V. Toutes les conditions de 7.2.1 sont satisfaites et on a donc le

THEOREME. — (Casselman – Gabber). Soit $V \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}'$. Alors $\bigcap \underline{n}^i V = 0$.

7.8.3. C'était Casselman – Osborne qui ont rendus compte de l'importance de 7.8.2. Casselman a trouvé une démonstration de 7.8.2 pour les modules de Harish – Chandra en utilisant quelques résultats de Harish – Chandra sur le comportement asymptotique des coefficients matricielles pour certaines éléments dans le groupe réel qui admet une représentation dont la partie infinitesimale (voir [7], préface à Chap. 9) est isomorphe à V. Nous allons donné dans ce cadre plus générale les conclusions de Casselman – Osborne qui résulte de 7.8.2.

7.8.4. Désormais on suppose que $V \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}'$.

LEMME. — <u>On a</u> $\dim_k (V/\underline{n}^i V) < \infty$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

L'application $(Y, v + \underline{n}^{i+1}V) \mapsto Yv + \underline{n}^{i+2}V$ de $\underline{n} \times (\underline{n}^i V/\underline{n}^{i+1}V)$ dans $(\underline{n}^{i+1}V/\underline{n}^{i+2}V)$ est trivialement surjective. Comme $\dim_k \underline{n} < \infty$ il suffit donc à démontrer que $\dim_k V/\underline{n}V < \infty$. Mais d'après 7.8.2 il existe un sous-espace W° de V de dimension finie tel que $V = U(\underline{n})W^\circ$. Puis $V = W^\circ + \underline{n}\, U(\underline{n})\, W^\circ =$ $= W^\circ + \underline{n}V$ et alors $\dim_k (V/\underline{n}V) \leq \dim_k W^\circ < \infty$.

7.8.5. On muni le dual V^* de V avec la structure de $U(\mathfrak{g})$ module selon $(a\xi, v) = (\xi, \check{a}v)$, $\forall\, \xi \in V^*$, $v \in V$, $a \in U(\mathfrak{g})$ où $a \mapsto \check{a}$ désigne l'antiautomorphisme principale de $U(\mathfrak{g})$ défini par $\check{X} = -X$, $\forall\, X \in \mathfrak{g}$. En générale V^* est trop gros pour une étude convenable. On pose $\delta(V) = \{\xi \in V^* : \dim_k U(\underline{b})\xi < \infty\}$. Comme l'action adjointe de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \underline{b}$ est finie il sorte que $\delta(V)$ est un sous-$U(\mathfrak{g})$-module de V. Par hypothèse l'action de $Z(\mathfrak{g})$ est finie dans V donc finie dans V^*. A fortiori on a le

LEMME. — *L'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{S}(V)$ est finie.*

7.8.6. On pose $\hat{V} = \varprojlim (V/\underline{n}^i V)$. C'est à dire que les éléments de $\hat{V}$ sont des suites $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$: $v_i \in V/\underline{n}^{i+1}V$, avec $v_{i+1} \in v_i + \underline{n}^{i+1}V$. On appel $\hat{V}$ le complété de V par rapport à l'ideal d'augmentation $\underline{n}\, U(\underline{n})$ de $U(\underline{n})$. Comme $\underline{b}$ normalise $\underline{n}$, on a $\underline{b}(\underline{n}^i V) \subset \underline{n}^i V$, $\forall i \in \mathbb{N}$ et donc $\hat{V}$ est muni d'une structure de $U(\underline{b})$ module. On pose $\hat{V}^\times = \{\xi \in V^* : (\xi, v_i) = (\xi, v_{i+1}), \forall i$ assez grand$\}$. C'est un sous-$U(\underline{b})$-module de V^*. (Peu importe mais c'est aussi le dual continue de $\hat{V}$ pour la topologie de Krull). On a $\hat{V}^\times \cong \varinjlim (V/\underline{n}^i V)^*$.

LEMME. — *Les sous-$U(\underline{b})$-modules $\mathcal{S}(V)$ et $\hat{V}^\times$ de V^* coincide.*

Soit $\xi \in \mathcal{S}(V)$ et démontrons que $\underline{n}^i \xi = 0$, $\forall i$ assez grand. Comme $\dim_k U(\underline{h})\xi < \infty$, on peut supposer sans restriction de généralité que ξ est un $\underline{h}$ vecteur propre.

Choisissons $H \in \underline{h}$ comme dans 7.8.2. Alors les poids de $\underline{n}$ par rapport à ad H sont strictement positifs. Comme les H vecteurs propres de poids différents sont linéairement independents il résulte que soit $\underline{n}^i \xi = 0$, $\forall i$ assez grand, soit $\dim_k U(\underline{n})\xi \neq \infty$. Comme $(\xi, v_{i+1} - v_i) \in (\xi, \underline{n}^{i+1} V) = (\underline{n}^{i+1}\xi, V) = \{0\}$, il résulte que $\xi \in \hat{V}^{\times}$.

Soit $\xi \in \hat{V}^{\times}$ et choisis $i \in \mathbb{N}$ tels que $(\xi, v_i) = (\xi, v_{i+1}) = \cdots$, $\forall\ v = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \hat{V}$. Alors ξ s'identifie avec un élément de $(V/\underline{n}^{i+1}V)^*$ qui est (par transport de structure) un $U(\underline{b})$ module de dimension finie (7.8.4). Alors $\dim_k U(\underline{b})\xi < \infty$. C'est à dire que $\xi \in \delta(V)$.

7.8.7. Soit M un $U(\underline{g})$ module tel que $\dim_k U(\underline{h})m < \infty$ pour tout $m \in M$. On pose $M_\mu = \{ m \in M : (H - (H,\mu)1d)^i m = 0$, $\forall H \in \underline{h}$, $\forall i$ assez grand$\}$. C'est un sous-espace de poids généralisé par rapport à l'action de $U(\underline{h})$. Comme

$\dim_k U(\underline{h})m < \infty$, $\forall m \in M$ par l'hypothèse, un argument classique de l'algèbre commutative (Chinese remainder theorem) montre que M est somme directe de ses sous-espaces de poids généralisés. Autrement dit la condition 3.11.5 est satisfaite mais par rapport à cette définition plus large de M_μ. On désigne par $\underline{\tilde{O}}$ la catégorie de tous les $U(\underline{g})$ modules satisfaisant 3.11.5 (i)-(iv), encore avec cette définition plus large de M_μ. On a évidemment que $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{O} \Rightarrow M \in \mathrm{Ob}\,\underline{\tilde{O}}$ mais l'inverse est faut. Par exemple que si $M = M(\lambda)$ est un module de Verma, alors il existe une extension non-triviale de $M(\lambda)$ par $M(\lambda)$ dans $\underline{\tilde{O}}$ mais pas dans $\underline{O}$. Cependant si $L \in \mathrm{Ob}\,\underline{\tilde{O}}$ est simple, alors $L \in \mathrm{Ob}\,\underline{O}$. Il en résulte par un argument tout à fait analogue à 3.11.5 que

THEOREME. — <u>Soit</u> $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{\tilde{O}}$. <u>Alors</u> M <u>est de longueur fini</u>. <u>Ses sous-quotients simples sont parmis les</u> $L(\lambda) : \lambda \in \underline{h}^*$.

7.8.8. PROPOSITION. — Soit $V \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}'$.

(i) Pour chaque $\mu \in \underline{h}^*$ il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\dim_k \delta(V)_\mu = \dim_k (V/\underline{n}^i V)_{-\mu} \quad , \forall \quad i \geq i_0 .$$

(ii) $\delta(V) \in \mathrm{Ob}\,\tilde{\underline{O}}$, en particulier $\delta(V)$ est de longueur fini.

(iii) Le foncteur $V \to \delta(V)$ de $\underline{G}'$ dans $\tilde{\underline{O}}$ est exact.

(i). D'après 7.8.6 on a

$$\dim_k \delta(V)_\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_k (\underline{n}^i V/\underline{n}^{i+1} V)^*_\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_k (\underline{n}^i V/\underline{n}^{i+1} V)_{-\mu} .$$

Soit $H \in \underline{h}$ comme dans 7.8.2. Comme les poids de $\underline{n}$ par rapport à ad H sont strictement positifs, il résulte que $(\underline{n}^i V/\underline{n}^{i+1} V)_{-\mu} = 0$, $\forall\, i$ assez grand. D'où (i).

(ii). Nous avons déjà vu que les conditions (ii), (iii) de 3.11.5 sont satisfaites pour $\delta(V)$. La condition (iv) résulte de 7.8.5 et la condition (i) de 7.8.4 et (i).

(iii). Soit $0 \to V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \to V_3 \to 0$ une suite exacte d'objets de $\underline{G}_1^*$.

Comme $V \mapsto V^*$ est un foncteur contravariant exact à gauche et comme $\delta(V_3) = \delta(V_2) \cap V_3^*$ il en résulte une suite exacte

$$0 \to \delta(V_3) \to \delta(V_2) \xrightarrow{\theta} \delta(V_1) \to$$

D'autre part on a pour tout $i \in \mathbb{N}$ une suite exacte

$$0 \to (\underline{n}^i V_2 \cap V_1)/\underline{n}^i V_1 \to V_1/\underline{n}^i V_1 \xrightarrow{\varphi_i} V_2/\underline{n}^i V_2 \to V_3/\underline{n}^i V_3 \to 0 .$$

Grâce à 7.1.2 il existe $i_o \in \mathbb{N}$, tel que $\underline{n}^i V_2 \cap V_1 \subset \underline{n}^{i-i_o} V_1$ et donc que $\lim_{i\to\infty} (\mathrm{Coim}\ \varphi_i)_\mu = 0$ pour chaque $\mu \in \underline{h}^*$. Grâce à (i) il en résulte que $\dim \delta(V_2)_\mu = \dim \delta(V_1)_\mu + \dim \delta(V_3)_\mu$ pour chaque $\mu \in \underline{h}^*$ et puis θ est surjectif.

7.8.9. Nous n'avons pas encore utilisé 7.8.2. En effet la proposition 7.8.8 n'est utile que dans la mésure que $\delta(V) \neq 0$. Ceci est assuré par 7.8.2 qui est précisement la condition nécessaire et suffisante telle que l'application canonique de V dans $\hat{V}$ soit injectif. Il en résulte le

PROPOSITION — Le foncteur δ est fidèle. En particulier tout $V \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}'$ est de longueur fini.

7.8.10. Soit $V \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}'$ et $v \in V$. De 7.8.2 et 7.8.8 (i) on a $(v,\xi) = 0\ \forall\ \xi \in \delta(V) \Rightarrow v = 0$. Ceci s'exprime soit en disant que la dualité entre V et $\delta(V)$ est separante, soit en disant que l'application canonique de V dans $\delta(V)^*$ est injective.

7.8.11. Soit $V \in \mathrm{Ob}\, \underline{G}'$ simple. Alors $\delta(V) \neq 0$ (7.8.9) et $\delta(V) \in \mathrm{Ob}\, \underline{\tilde{O}}$ (7.8.8 (iii)). D'après 7.8.7 il existe $\mu \in \underline{h}^*$ tel que $L(\mu)$ est isomorphe à un sous-module simple de $\delta(V)$. On remarque que $\delta(V)$ est peu souvent simple. Comme V est simple, l'application $v \mapsto (\ell \mapsto (v, \ell))$ de V dans $L(\mu)^*$ est injective. Il en résulte la

PROPOSITION. — *Soit $V \in \mathrm{Ob}\, \underline{G}'$ simple. Alors il existe $\mu \in \underline{h}^*$ tel que V est un sous module de $M(\mu)^*$.*

7.8.12. Nous pouvons appliquer 7.8.11 au cas special suivant. Soit θ une involution de $\mathfrak{g}$ (on dit souvent une involution de Cartan). On pose $\underline{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\}$. C'est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ ([7], 1.13.3) qui s'appelle souvent une sous-algèbre maximale compacte de $\mathfrak{g}$. Nous dirons que V est un module de Harish-Chandra pour le couple $(\mathfrak{g}, \underline{k})$ si les conditions semblables aux (i)-(iii) de 5.5.2

sont satisfaites. On désigne par $\underline{H}$ la catégorie de tous les modules de Harish-Chandra par rapport au $(\underline{g}, \underline{k})$. D'après ([7], 1.13.7) on peut toujours choisir une sous-algèbre de Borel $\underline{b}$ tel que $\underline{g} = \underline{k} + \underline{b}$. Donc en prenant $\underline{c} = \underline{k}$ dans 7.8.1 il résulte que tout $V \in \mathrm{Ob}\,\underline{H}$ simple, est un objet de $\underline{G}'$.

Si M est un $U(\underline{g})$ module on pose

$L_{\underline{c}}(M) = \{ m \in M : \dim_k U(\underline{c}) m < \infty \}$. C'est un sous-module de M.

On dira que M est un module de la série principale s'il existe $\mu \in \underline{h}^*$ tel que $M \cong L_{\underline{k}}(M(\mu)^*)$. Grâce à 7.8.11 on a le

THEOREME. — (Casselman - non-publié). Tout module simple de Harish-Chandra est un sous-module d'un serie principale.

7.8.12. Un théorème plus faible et plus ancien de Harish-Chandra affirme que tout module simple de Harish-Chandra est sous-quotient d'un serie principale. Si on remarque ([7], 5.5.4, 7.1.4) que $M(\mu)^*$ est isomorphe au module co-induit du $\underline{b}$ module définit par l'élément $-\mu \in \underline{h}^*$ il résulte de la réciprocité de Frobenius ([7], 5.5.6) que $L(M(\mu)^*)$ satisfait à la condition (ii) de 5.5.2. On voit donc facilement que $L(M(\mu)^*) \in \mathrm{Ob}\,\underline{H}$. Nous pouvons aussi remarquer que dans la démonstration de 7.8.12 on n'a pas utiliser la condition (ii) de 5.5.2 sur le module simple V. Il résulte donc comme conséquence de 7.8.12 (ou bien du résultat plus faible de Harish-Chandra cité).

Il résulte (comme pour la catégorie $\underline{O}$, 3.11.5) de la classification des objets simple de $\underline{H}$ et de 5.5.2 (ii) que tout $V \in \mathrm{Ob}\,\underline{H}$ est de longueur fini, donc de type fini, donc un objet de $\underline{G}'$ (pour $\underline{c} = \underline{k}$). On pourrait espérer faire cette classification à partir de 7.8.12 qui fait une correspondance (malheureusement pas uniquement déterminée) entre $\underline{H}$ et $\underline{h}^*$. Dans un certain mésure ceci a été fait par Hecht et Schmidt. qui ont donné une formule pour $\{\mathrm{mlt.}\ V_\rho : \rho \in \underline{k}^\wedge\}$ à partir de $\{\dim_k L(\mu)_\nu : \nu \in \underline{h}^+\}$.

7.8.14. On considère le cas spécial où $\underline{H}$ est la catégorie des modules de Harish-Chandra pour le couple $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \underline{k})$ où $\underline{k}$ est défini comme dans 1.7.1. On pose $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Soit $\lambda, \mu \in \underline{h}^*$ avec λ dominant (c'est à dire $2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \notin \mathbb{N}^-$, $\forall\, \alpha \in R^+$ où R^+ est un système de racines positives par rapport au couple $(\mathfrak{g}, \underline{h})$). On sait ([13],) que $\operatorname{Soc}_{\mathcal{U}} L((M(\lambda)\otimes M(\mu))^*)$ est un objet simple de $\underline{H}$, que tout objet simple est de cette forme et

$$\operatorname{Soc}_{\mathcal{U}} L((M(\lambda)\otimes M(\mu))^*) \cong \operatorname{Soc}_{\mathcal{U}} L((M(\lambda')\otimes M(\mu'))^*)$$

si et seulement s'il existe $w \in W$ (le groupe de Weyl par rapport au couple $(\mathfrak{g}, \underline{h})$) tels que $w\lambda = \lambda'$, $w\mu = \mu'$ (toujours en supposant λ, λ' dominant). Cependant $\operatorname{Soc}_{\mathcal{U}} L((M(\lambda)\otimes M(\mu))^*)$ n'est pas toujours simple. En effet $L((L(\lambda)\otimes L(\mu))^*) \cong L(L(\mu), L(\lambda))$ est un sous-module de $L((M(\lambda)\otimes M(\mu))^*)$ et même $\operatorname{Soc}_{\mathcal{U}} L(L(\mu), L(\lambda))$ n'est pas toujours simple. Par exemple si $\mathfrak{g}$ est de type B_2 (voir [28], 9.4, 9.5).

7.9 Problèmes.

1) Montrer que $\text{Ann } V = (\text{Ann } \delta(V))^\vee$, $\forall\ V \in \text{Ob}\,\underline{G}'$.

2) Montrer que $d(V) = d(\delta(V))$, $\forall\ V \in \text{Ob}\,\underline{G}'$.

3) Soit $M \in \underline{\tilde{O}}$. Montrer que $L_{\underline{k}}(M^*) \in \underline{H}$.

(Cependant le foncteur $M \mapsto L_{\underline{k}}(M)$ est ni exact ni fidèle).

4) Montrer que
$$\dim_{\underline{k}} \text{Ext}^1(M(\mu), M(\mu)) = \begin{cases} 1 : \text{dans } \underline{\tilde{O}}, \\ 0 : \text{dans } \underline{O}. \end{cases}$$

5)** Soit $\mathfrak{g} = sl(2)$. Classer les objets de $\underline{\tilde{O}}$.

6)** La conclusion de 7.2.1 reste-t-il vraie si on ne suppose que les vecteurs propres de δ sont les nombres réels > 0?

7)* Montrer que $H_*(\underline{n}, V) \cong H^*(\underline{n}, \delta V)$, $\forall\ V \in \text{Ob}\,\underline{G}'$.

8)* Soit $M \in \text{Ob}\,\underline{\tilde{O}}$ et Q un quotient de M. Montrer que si $H^\circ(\underline{n}, M)$, $H^\circ(\underline{n}, Q)$ sont isomorphes comme $\underline{h}$ modules, alors $M = Q$. Soit $V \in \text{Ob}\,\underline{G}'$ et W un sous-module de V. En déduire que si $H_0(\underline{n}, W)$, $H_0(\underline{n}, V)$ sont isomorphes comme $\underline{h}$ modules, alors $W = V$.

BIBLIOGRAPHE

Livres

[1]. M.F. Atiyah et I.G. Macdonald, Introduction to commutative algebra, Adison-Wesley, London, 1969.

[2]. J.E. Bjork, Rings of differential operators, North Holland, Amsterdam, 1979.

[3]. A. Borel, Linear algebraic groups, W. A. Benjamin, New York/Amsterdam, 1969.

[4]. W. Borho, P. Gabriel et R. Rentschler, Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren, LN 357, Springer-Verlag, New York, 1973.

[5]. H. Cartan et S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton University Press, Princeton, 1956.

[6]. P.M. Cohn, Skew field constructions, London Math. Soc. Lecture Note Series, 27, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.

[7]. J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[8]. I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Mathematical Monographs, University of Chicago, 1968.

[9]. N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, no. 10, John Wiley, New York, 1966

[10]. I. Kaplansky, *Commutative rings*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1970.

[11]. J.-P. Serre, *Algèbre locale multiplicities*, Lecture notes in mathematics, no. 11, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1965.

[12]. B. Stenström, *Rings of quotients*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 217, Springer-Verlag, New York, 1975.

Articles.

[13]. I.N. Bernstein et S.I. Gelfand, Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras, Compos. Math., 41, 245-285 (1980).

[14]. S. Block, The irreducible representations of the Lie algebra sl(2) and of the Weyl algebra, Adv. Math., 39, 69-110 (1981).

[15]. W. Borho, On the Joseph-Small additivity principle for Goldie ranks, preprint, Paris, 1981.

[16]. W. Borho et H. Kraft, Über die Gelfand-Kirillov-Dimension, Math. Ann. 220, 1-24 (1976).

[17]. W. Borho et R. Rentschler, Oresche Teilmengen in Einhüllenden Algebren, Math. Ann., 217, 201-210 (1975).

[18]. W. Casselman et M.S. Osborne, The restriction of admissible representations to n, Math. Ann., 233, 193-198 (1978).

[19]. N. Conze, Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes, Bull. Soc. Math. France, 102, 379-415 (1974).

[20]. V.V. Deodhar, On a construction of representations and a problem of Enright, Invent. Math., 57, 101-118 (1980).

[21] T.J. Enright, On the irreducibility of the fundamental series of a real semisimple Lie algebra, preprint, Princeton, 1979.

[22]. O. Gabber, The integrability of the characteristic variety, Amer. J. Math., (In the press).

[23]. O. Gabber et A. Joseph, Towards the Kazhdan–Lusztig conjecture, Ann. Ec. Norm. Sup. (à paraître).

[24]. O. Gabber et A. Joseph, On the Bernstein – Gelfand – Gelfand resolution and the Duflo sum formula, Compos. Math., (à paraître).

[25]. P. Gabriel et R. Rentschler, Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, C.R. Acad. Sci. Paris, A 265, 712-715 (1967).

[26]. J.C. Jantzen, Moduln mit einem höchsten Gewicht, LN 750, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.

[27]. A. Joseph, Gelfand-Kirillov dimension for the annihilators of simple quotients of Verma modules, J. London Math. Soc., 18, 50-60 (1978).

[28]. A. Joseph, Kostant's problem, Goldie rank and the Gelfand-Kirillov conjecture, Invent. Math., 56, 191-213 (1980).

[29]. A. Joseph, On the Gelfand-Kirillov conjecture for induced ideals in the semisimple case, Bull. Soc. Math. France, 107, 139-159 (1979).

[30]. A. Joseph, Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra, I, II, III, J. Alg., 65, 269-283, 284-306 (1980) et à paraître.

[31]. A. Joseph, Towards the Jantzen conjecture, Compos. Math., 40, 35-67 (1980).

[32]. A. Joseph, On the Enright functor and the Jantzen conjecture, preprint, Paris (1981).

[33]. A. Joseph, A generalization of Quillen's lemma and its application to the Weyl algebras, Israel J. Math., 28, 177-192 (1977).

[34]. A. Joseph, Dimension en algèbre non-commutative, Cours de 3ème cycle, Paris 6, (1980).

[35]. A. Joseph et L.W. Small, An additivity principle for Goldie rank, Israel J. Math., 31, 105-114 (1978).

[36]. B. Kostant, On the tensor product of a finite and infinite dimensional representation, J. Funct. Anal. 20, 257-285 (1975).

[37]. T. Levasseur, Dimension injective des quotients primitifs minimaux de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, Comptes Rendus (à paraître).

[38]. J. C. McConnell, Representations of solvable Lie algebras, I–V, Proc. London Math. Soc., 29, 453–484; An (1974); Ann. Ec. Norm. Sup., 8, 157–178 (1975);

[39]. J. C. McConnell, The intersection theorem for a class of non-commutative rings, Proc. London Math. Soc., 17, 487–498 (1967).

[40]. J. C. McConnell, Gelfand – Kirillov dimension, preprint, Leeds, 1980.

[41]. R. Resco, Transcendental division algebras and simple noetherian rings, Israel J. Math.,

[42]. J.-E. Roos, Propriétés homologiques des quotients primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples, C.R. Acad. Sci., A 276, 351–354 (1973).

[43]. L.W. Small, Orders in Artinian rings, J. Alg., 4, 13–41 (1966).

[44]. S.P. Smith,

[45]. N. Spaltenstein, On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups, Topology, 16, 203–204 (1977).

[46]. P. Tauvel, Sur les représentations des algèbres de Lie nilpotentes, Comptes Rendus, 278, 977–979 (1974).

[47]. D. Vogan, Gelfand – Kirillov dimension for Harish – Chandra modules, Invent. Math., 48, 75–98 (1978).