5.3.3. On pose $M = \{ b \in B : sb = 0 \text{ pour quelque } s \in S \}$. C'est un sous B^{op} module de B et on a $M = 0 \Leftrightarrow S \subset T$. Comme MT^{-1} est un idéal à droite de l'anneau simple, artinien BT^{-1} il existe un projecteur $e \in BT^{-1}$ tel que $MT^{-1} = eBT^{-1}$.

Supposons que S est Ore dans A. Alors M est de plus un sous A module (à gauche) de B. On pose $P = \mathrm{Ann}_A M$.

LEMME. —

(i) $P \cap S \neq \emptyset$.

(ii) $(1-e)ae = 0$, <u>pour tout</u> $a \in A$.

(iii) <u>L'application</u> $a \mapsto (1-e)a(1-e)$ <u>de</u> A <u>sur</u> $(1-e)A(1-e)$ <u>est un isomorphisme d'anneaux</u>.

(i). Comme B est noetherien à droite, M est de type fini comme B module à droite. Soit $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ un système de générateurs de M comme B module à droite. D'après la définition de M ils existent $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$ tels que $s_i m_i = 0$, $\forall i$. Comme S est Ore dans A ils existent $s, t_i \in S$ tels que $s = t_i s_i$, $\forall i$ et donc $sM = \sum s m_i B = \sum t_i s_i m_i B = 0$.

(ii). On a que $ae \in aMT^{-1} \subset MT^{-1} = eBT^{-1}$, pour tout $a \in A$. Donc $(1-e)ae = 0$.

(iii). L'application est évidemment linéaire et d'aprés (ii) on a $(1-e)a(1-e)(1-e)b(1-e) = (1-e)ab(1-e)$, $\forall a, b \in A$. Enfin si $(1-e)a(1-e) = 0$, alors $(1-e)a = 0$ et puis $xa = xea = 0$, $\forall x \in P$ et (iii) résulte de (i).

5.3.4. Dans la suite on va supposer que B est de type fini comme A module à gauche.

5.3.5. On suppose que S est Ore dans A et on reprendre la notation de 5.3.3. On aimerait démontrer que l'hypothèse que B est de type fini comme A module à gauche entraîne que $M = 0$. Malheureusement au présent on n'a que le résultat suivant où on suppose que A est une k-algèbre donc admettant un calcul de dimension d_A de Gelfand-Kirillov (voir 3.2) par rapport à k.

LEMME. — (notation 3.2.2). On suppose que A est noethérienne à gauche avec S Ore à gauche et B premier noethérienne de type fini comme A module à gauche. Si $d_A(A) < \infty$, alors $M = 0$.

Soient N un sous-espace de dimension finie de M tel que $M = AN$ et W un sous-espace de dimension finie de B. Choisissons un sous-espace V de dimension finie de A tel que $NW \subset VN$. Alors pour tout $s \in \mathbb{N}$ on a $NW^s \subset V^s N$ et puis

$$(*) \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{\log \dim_k NW^s}{\log s} \leq \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{\log \dim_k V^s N}{\log s} \leq d_A(M) \leq d_A(A/P).$$

Supposons que $M \neq 0$. Alors $\bigcap_{n\in N} r_B(n) = r_B(M) = 0$ comme B est premier (où r_B désigne annulateur à droite dans B). Alors $b \mapsto \prod_{n\in N} (b + r_B(n))$ est une application injective de B modules à droite de B dans $\prod_{n\in N} B/r_B(n) \cong \prod_{n\in N} nB$;

Si d'_B désigne la dimension de Gelfand-Kirillov à droite pour les B modules à droite on trouve donc que $d'_B(B) \leq \max_{n \in N} d'_B(nB) = d'_B(NB)$.

D'autre part comme W est arbitraire (*) donne $d'_B(NB) \leq d_A(A/P)$.

Grâce à 3.3.7 et 5.3.4 (i) on a $d_A(A/P) \leq d_A(A) - 1$ tandis que $d_A(A) \leq d_B(B) = d'_B(B)$. On trouve eventuellement que $d_A(A) \leq d_A(A) - 1$ qui est contradictoire si $d_A(A) < \infty$.

5.3.6. (Notation 5.3.2).

LEMME. — <u>On suppose que</u> $\mathcal{P} = P_0$ (<u>et que</u> B <u>est de type fini comme</u> A <u>module à gauche</u>). <u>Alors</u>

(i) S <u>est Ore à gauche dans</u> B.

(ii) $S^{-1}B = BT^{-1}$.

On considère $S^{-1}B$ qui est un module à gauche de type fini pour l'anneau artinian $S^{-1}A$. Alors pour tout $t \in T$ la suite déscendante $S^{-1}B \supset S^{-1}Bt \supset S^{-1}Bt^2 \supset \dots$, est stationnaire. Il résulte que $(S^{-1}B)t^{-1} = S^{-1}B$ et comme $t \in T$ est arbitraire on a $S^{-1}BT^{-1} = S^{-1}B$. L'inclusion $S \subset T$ donne suite à une plongement de B dans $S^{-1}B$, puis $BT^{-1} \subset S^{-1}B$. En particulier $BS^{-1} \subset S^{-1}B$ qui est (i). Dans la démonstration de 5.3.2 on a vu que $S^{-1}BT^{-1} = BT^{-1}$, d'où (ii).

5.4 Problèmes.

1). On prende $B = M_2(k[x])$, $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = k1 \oplus e\langle x \rangle$. Montrer que A, B sont premiers, noetheriens mais les éléments réguliers de A ne sont pas tous réguliers dans B.

2)** Soient A un anneau noetherien à gauche, B un sur-anneau premier de A qui est de type fini comme A module à gauche (donc noetherien à gauche) et noetherien à droite. Tout élément régulier de A est-il régulier dans B ?

3). Soit A un anneau commutative noetherien. Montrer que pour tout idéal I non-nul de A que A/I et A ne sont pas isomorphe comme algèbres.

4)** (Notation et hypothèse de 5.3). A-t-on toujours que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$?

(iii) <u>L'action du centre</u> Z <u>de</u> $\mathcal{U}$ <u>sur</u> V <u>est finie</u>. Ceci entraîne que V admet une filtration finie $V = V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \dots \supsetneq V_{n+1} = 0$, par $\mathcal{U}$ modules telle que $Z \cap \operatorname{Ann}(V_i/V_{i+1}) \in \operatorname{Max} Z$. Comme Z est une algèbre de polynômes il résulte du nullstellensatz que l'existence d'une telle filtration entraîne que l'action de Z est finie.

Ces trois conditions reste vrai sous une extension des corps de base.

5.5.3. La classification de modules simples de Harish-Chandra pour une clôture algébrique $\bar{k}$ de k a pour conséquence le résultat suivant.

THEOREME. — <u>Soit</u> $\Lambda \in \operatorname{Max} Z$. <u>Le cardinal des classes d'isomorphes de modules simples de Harish-Chandra satisfaisants</u> $Z \cap \operatorname{Ann} V = \Lambda$ <u>est fini</u>.

D'après ([ ],) c'est vrai si k est algébriquement clos. Passent au cas général. D'après (iii) il existe une extension finie galoisienne k' de k telle que $V' := V \otimes_k k'$ admet V' admet une filtration finie $V' = V'_1 \supsetneq V'_2 \supsetneq \dots \supsetneq V'_{t+1} = 0$, et on désigne par $d(M)$ (resp. $e(M)/d(M)!$) son degré (resp. le coefficient de son terme principal). On sait que $d(M)$, $e(M)$ sont des entiers positifs et que $M \mapsto e(M)$ est une fonction additive sur les suite exactes courtes des modules ayants le même valeur de d (qui est rien autre que la dimension de Gelfand-Kirillov dans ce cas). Si E est un $U(\mathfrak{g})$ module on considère $E \otimes M$ comme $U(\mathfrak{g})$ module pour l'action diagonale. Si $\dim_k E < \infty$, alors $E \otimes M$ est un type fini et $d(E \otimes M) = d(M)$, $e(E \otimes M) = e(M) \dim E$.

5.5.6. LEMME. — <u>Soient</u> M, N <u>les</u> $U(\mathfrak{g})$ <u>modules simples</u>

<u>Alors</u>.

(i) $L(M,N)$ <u>si</u> $d(M) \neq d(N)$.

(ii) $\dim \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} M < \infty$.

(iii) $\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}} (E, L(M,N)) < \infty$ <u>pour</u> <u>tout</u> $U(\mathfrak{g})$ <u>module</u> E <u>de dimension finie</u>

(i). Soit E^* le dual de E considéré comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ module par transposition. On a des isomorphismes naturels

$$(*) \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(E, \mathrm{Hom}_k(M,N)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(E \otimes M, N\right) \cong \mathrm{Hom}\left(M, E^* \otimes N\right).$$

D'après la définition de $L(M,N)$ on peut remplacer $\mathrm{Hom}_k(M,N)$ par $L(M,N)$ dans $(*)$. Supposons que $L(M,N) \neq 0$. Grâce au premier isomorphisme il existe un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ module E de dimension finie tel que $E \otimes M$ admet un quotient isomorphe à N et par conséquence $d(N) \leq d(E \otimes M) = d(M)$. Grâce au second isomorphisme $E^* \otimes N$ admet un sous-module isomorphe à M et par conséquence $d(M) \leq d(E^* \otimes N) = d(N)$. D'où (i).

(ii) est cas special du théorème de Gabriel. On ramène le lecteur à ([7], 2.6.9) pour sa démonstration.

(iii) On pose $k' = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}} M$ qui est une extension de k.

D'une manière évidente $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, E^*\otimes N)$ est un k' espace vectoriel et on désigne par $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ une base. D'après (*) et (ii) il suffit de montrer que $\mathrm{card}\, I < \infty$. Sinon choisons un sous-ensemble fini F de I tel que la somme

$$\sum_{i\in F} \varphi_i(M) \subset E^*\otimes M$$

soit directe. D'après (i) et l'additivité de $e(\cdot)$ il résulte que $e(M)\,\mathrm{card}\, F \leq e(N) \dim E$. Donc on peut supposer F maximal sans restriction de généralité. Soit $j \in I-F$. Alors $\varphi_j(M) \subset \bigoplus_{i\in F} \varphi_i(M)$ d'après la maximalité de F et la simplicité de M. Soit $\psi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, \varphi_i(M))$ le $\mathfrak{g}$ homomorphisme qui est le composé de φ_j avec la projection sur $\varphi_i(M)$ défini par la somme directe $\bigoplus_{i\in F} \varphi_i(M)$.

D'après la définition de k' il résulte que φ'_i est un k' multiple de φ_i et donc que φ_j est une k' combinaison linéaire des $\varphi_i : i \in F$, en contradiction avec le choix de j.

5.5.7. PROPOSITION — <u>Soient</u> M, N <u>des</u> $U(\mathfrak{g})$ <u>modules de longueur fini</u>. <u>Alors</u> $L(M,N)$ <u>est un module de Harish-Chandra</u>. <u>En particulier</u> $L(M,N)$ <u>est de type fini comme</u> U <u>module</u>.

Il suffit de prendre M, N simple. Puis la condition (i) de 5.5.2 est satisfait par la définition de $L(M,N)$ est la réductivité de $\underline{k}$ (qui est isomorphe à l'algèbre semi-simple $\mathfrak{g}$). La condition (ii) résulte de 5.5.6 (iii).

Pour (iii) on pose $Z_1 = \mathrm{Ann}\, L(M,N) \cap Z$, $Z_2 = \mathrm{Ann}\, N \cap Z(\mathfrak{g})$, $Z_3 = \mathrm{Ann}\, M \cap Z(\mathfrak{g})$. Les deux derniers sont les ideaux maximaux de $Z(\mathfrak{g})$ donc de dimension finie (voir 5.5.2 (iii)). Enfin $Z_1 \supset Z_2 \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \check{Z}_3$, puis

$$\dim_k Z/Z_1 \leq \left(\dim_k Z(\mathfrak{g})/Z_2\right)\left(\dim_k Z(\mathfrak{g})/Z_3\right) < \infty .$$

5.5.8. COROLLAIRE. — *Soient M, N des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ modules de longueur fini. Alors $L(M,N)$ est de type fini comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ module soit à gauche soit à droite.*

5.6. *Problèmes.*

1)* Soient M, N des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ modules simples et supposons que $L(M,N) \neq 0$. Montrer que

$$d\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M\right) = d(V) = d\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} N\right)$$

pour tout sous-module V non-nul de $L(M,N)$.

Soit M un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ module simple et posons S l'ensemble des éléments réguliers de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} M$.

2). Montrer que tout $s \in S$ est régulier dans $L(M,M)$, que S est Ore dans $L(M,M)$ et que $S^{-1} L(M,M) = \operatorname{Fract} L(M,M)$. (Il résulte qu'on a une plongement de $\mathrm{Fract}\,(U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\,M)$ dans $\mathrm{Fract}\,L(M,M)$.

3)* (k algébriquement clos). Montrer que $(\mathrm{Fract}\,L(M,M))^{\mathfrak{g}}$ est réduit aux scalaires.

4)** Soient M, E des $U(\mathfrak{g})$ simples avec E de dimension finie. Le $U(\mathfrak{g})$ module $E\otimes M$ est-il de longueur fini ?

5.7. <u>Principe d'additivité</u> (<u>~~pour~~ rang de Goldie</u>).

On reprend les notations et hypothèses de 5.5.

5.7.1. Soit M un $U(\mathfrak{g})$ module simple. Grâce au plongement $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\,M \hookrightarrow L(M,M)$ il résulte que M est un module simple fidèle pour $L(M,M)$. Tenant compte de 5.5.8 il résulte que $L(M,M)$ est un anneau primitif noetherien. Soit E un $U(\mathfrak{g})$ simple de dimension finie.

LEMME. —

(i) $L(E\otimes M, E\otimes M) \cong \mathrm{End}_k E \otimes L(M,M)$. <u>En particulier</u> $L(E\otimes M, E\otimes M)$ <u>est de type fini comme</u> U <u>module</u>.

(ii) $L(E\otimes M, E\otimes M)$ <u>est primitif</u>, <u>noetherien</u>.

(iii) $\mathrm{rk}\, L(E\otimes M, E\otimes M) = \mathrm{rk}\, L(M,M) \,.\, \dim E$.

(i). L'application $\Psi : \mathrm{End}_k E \otimes \mathrm{End}_k M \to \mathrm{End}_k(E\otimes M)$ définit par $(\Psi(x\otimes y))(e\otimes m) = xe\otimes ym$ est un monomorphisme de U modules. Comme $\dim E < \infty$, Ψ est surjectif et la restriction de Ψ à $\mathrm{End}_k E \otimes L(M,M)$ admet $L(E\otimes M, E\otimes M)$ pour image. Ceci donne (i). Il est donc claire que $E\otimes M$ est un module simple fidèle pour $L(E\otimes M, E\otimes M)$ et puis (ii), (iii) résulte de (i).

5.7.2. Si M est un $U(\underline{g})$ module à droite de type fini on désigne par $d'(M)$ sa dimension de Gelfand-Kirillov à droite. Si V est un U module de Harish-Chandra, il résulte de l'action localement finie de $\underline{k}$ et 5.5.4 que V est de type fini comme $U(\underline{g})$ module soit à gauche soit à droite et que $d(V) = d'(V)$.

5.7.3. Désormais soient M, E des $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ simples avec E de dimension finie. Nous allons appliquer 5.3.2 avec $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\,(E \otimes M)$, $B = L(E\otimes M, E\otimes M)$. D'après 5.7.1, A et B sont noethériens avec B premier. Avec F, $\{F_i\}_{i=1}^{r}$ comme dans 5.3.1 on pose $B_i = B \cap F_i$. On a $B_i T^{-1} = F_i$ et on vérifie facilement que $\mathrm{Ann}_A (B_i | B_{i+1}) = \mathrm{Ann}_A (F_i | F_{i+1}) = Q_i$ (comme A modules à gauche). Enfin d'après 5.7.1(i), B est de type fini comme A module à gauche, et comme A^{op} module à droite.

THEOREME. —

(i) $d(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/Q_i) = d(B)$, $\forall\, i$.

(ii) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$.

(iii) <u>Il existe des entiers strictement positifs</u> z_i <u>tels que</u>

$$\sum z_i \,\mathrm{rk}\, (\mathcal{U}(\mathfrak{g})/Q_i) = \mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\, L(M,M)\, \dim E.$$

(i). Soit $\bar{b} \in B_i | B_{i+1}$ et $t \in T$ tel que $\bar{b} t = 0$. On a $bt \in B_{i+1}$, donc $b \in B_{i+1} T^{-1} \cap B = B_{i+1}$, c'est à dire que $\bar{b} = 0$. Prenons $\bar{b} \neq 0$ et démontrons que $d'(\bar{b}B) = d'(B)$ (qui est finie d'après 5.6.1). Sinon on pose $L = \{x \in B : \bar{b}x = 0\}$ qui est un idéal à droite de B et par hypothèse $d'(B/L) = d'(\bar{b}B) < d'(B)$. Soit L' un idéal à droite non-nul de B et démontrons que $L \cap L' \neq 0$. Comme B est premier, noethérien à droite il existent $a_1, a_2, .., a_n \in B$ tels que $\sum a_i L'$ est essentiel dans B. Puis $d'(L') \geq \max d'(a_i L') = d'(\sum a_i L') = d'(B)$. Par contre si $L \cap L' = 0$ on a $d'(L') \leq d'(B/L) < d'(B)$ qui est impossible. Il résulte que L est essentiel dans B et donc que $L \cap T \neq \phi$, ce qui contredit notre premier observation. Par conséquence $d(B_i/B_{i+1}) = d'(B_i/B_{i+1}) = d(B), \forall i$.

D'autre part $d(A/Q_i) \geq d(B_i/B_{i+1})$, car B_i/B_{i+1} est de type fini comme A module à gauche. Ceci donne

$d(B) \geq d(A) \geq d(A/Q_i) \geq d(B_i/B_{i+1}) = d(B)$, d'où (i).

(ii) résulte de (i) et 3.3.7.

(iii). Considérons F_i comme F module à droite et soit n_i la multiplicité de l'unique F module simple dans F_i. On a $\sum n_i = \operatorname{rk} F = \operatorname{rk} B$. D'autre part l'action à gauche de A sur $\overline{F_i}$ définit un monomorphisme de l'anneau ~~simple, artinian~~ premier, noetherien A/Q_i dans l'anneau simple artinian $M_{n_i}(K)$. Il résulte de l'argument de 5.3.2 que $\operatorname{Fract}(A/Q_i)$ se plonge dans $M_{n_i}(K)$. Puis d'après 2.4.2 que $\operatorname{rk} A/Q_i$ divise n_i. D'où (iii).

5.7.4 La conclusion de 5.7.3 s'applique au calcul de $\operatorname{rk} U(\mathfrak{g})/P : P \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$. Voir [30].

LECON 6. — Dimension et modules de longueur fini.

6.1. Une inégalité de dimension.

6.1.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (de dimension finie sur k). Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on a définit (1.1.1) une transformation linéaire $ad_{\mathfrak{g}} X$ de $\mathfrak{g}$. Soit s (resp. n) la composante semi-simple (resp. nilpotente) de $ad_{\mathfrak{g}} X$. Ils sont les dérivation de $\mathfrak{g}$. On peut donc envisager la situation où ils existent $Y, Z \in \mathfrak{g}$ tels que $s = ad_{\mathfrak{g}} Y$, $n = ad_{\mathfrak{g}} Z$. On dira que $\mathfrak{g}$ est presque algébrique si cette propriété est satisfaite pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Désormais admettons que $\mathfrak{g}$ est presque algébrique et soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $ad_{\mathfrak{g}} X$ est semisimple. Posons $\Lambda(X) = \{\lambda \in k : (ad\, X) Y = \lambda Y, Y \in \mathfrak{g} - \{0\}\}$. On peut envisager la situation où il existe $\mu \in k$ tel que $\Lambda(X) \in \mu \mathbb{Q}$. Si cette propriété est satisfaite pour tout $X \in \mathfrak{g}$ (avec $ad_{\mathfrak{g}} X$ semisimple) on dira que $\mathfrak{g}$ est ad-algebraic. Soit $r = \dim \mathfrak{g}$. Alors l'application

$X \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ est un homomorphism $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(r, k)$ et il existe un plus petit sous groupe algébrique G de $GL(r, k)$ tel que son algèbre de Lie contient $\mathfrak{g}$. On remarque que $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique si et seulement si l'algèbre de Lie de G coïncide avec celle de ad $\mathfrak{g}$ ([3],) ; mais ce fait ne sera pas utiliser ici.

6.1.2. Soit $\{X_i\}_{i=1}^{r}$ une base de $\mathfrak{g}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on pose $U^n(\mathfrak{g}) = k\{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_r^{n_r} : \sum n_i \leq n\}$. On a $U^m(\mathfrak{g})\, U^n(\mathfrak{g}) \subset U^{m+n}(\mathfrak{g})$ et $\bigcup_{n=0}^{\infty} U^n(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$. On appel $\{U^n(\mathfrak{g})\}_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration canonique de $U(\mathfrak{g})$. C'est commode dans les calculs de remarquer que (pour car $k = 0$) on a $U^n(\mathfrak{g}) = k\{X^m : m \leq n,\ X \in \mathfrak{g}\}$. L'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}\,(U(\mathfrak{g}))$ est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ ([7], 2.3.6) qui est lui-même isomorphe à l'algèbre de polynômes sur $\mathfrak{g}^*$. La dérivation $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X : X \in \mathfrak{g}$ se prolonge d'un manière unique comme dérivation ad X de $U(\mathfrak{g})$. On voit facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathfrak{g}$ le sous espace $U^n(\mathfrak{g})$ est invariant pour l'action de ad X. On désigne par $\mathrm{ad}_m X$ la restriction de ad X à $\mathcal{U}^m(\mathfrak{g})$.

Si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique on peut supposer que chaque ad X_i est soit semi-simple, soit nilpotente. Cela dit on a le

LEMME. — <u>Soit</u> $\mathfrak{g}$ <u>une algèbre de Lie ad-algèbrique de dimension</u> $r < \infty$. <u>Il existe un entier positif</u> s <u>tel que pour tout</u> $X \in \mathfrak{g}$ <u>et tout</u> $m, n \in \mathbb{N}$ <u>alors</u> $(\mathrm{ad}_m X)^n$ <u>est combinaison linéaire des</u> $(\mathrm{ad}_m X_1)^{n_1}(\mathrm{ad}_m X_2)^{n_2} \dots (\mathrm{ad}_m X_r)^{n_r}$ <u>avec</u> $\sum n_i \leq ms$.

Vu de PBW il suffit d'établir la borne sur les $\sum n_i$. Nous allons montrer que pour chaque i il existe $s_i \in \mathbb{N}$ tel que le degré du polynôme minimal de $\mathrm{ad}_m X_i$ est au plus ms_i. Puis la borne recherchée résultera si on pose $s = (\max s_i)r$. Il convienne de poser $X = X_i$.

Supposons que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ soit nilpotent. Comme le degré de nilpotence de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ est au plus r, il résulte que le degré de nilpotence de $\mathrm{ad}_m X$ (qui est aussi le degré de son polynôme minimal) est au plus mr, d'où l'assertion dans ce cas.

Supposons que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ soit semi-simple. Par l'hypothèse sur $\mathfrak{g}$, il existe $\mu \in k$ tel que

$\Lambda(X) \subset \mu \mathbb{Q}$, et donc sans restriction de généralité on peut supposer que les valeurs propres $\{t_1, t_2, \dots t_r\}$ de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ sont des entiers. On pose $s = 2(\max_i |t_i|) + 1$. Alors les valeurs propres de $\mathrm{ad}_m X$ contenus dans l'ensemble $\Lambda_m :=$ $\{ \sum m_i t_i \ : m_i \in \mathbb{N} \, , \ \sum m_i \leq m \}$. Comme $\Lambda_m \subset \mathbb{Z}$ et comme $-m|s| \leq \ell \leq m|s|$ pour tout $\ell \in \Lambda_m$ on trouve $\mathrm{card}\, \Lambda_m \leq$ $2m|s| + 1 \leq ms$. Comme $\mathrm{ad}_m X$ est semi-simple il résulte que $\mathrm{card}\, \Lambda_m$ est le degré de polynôme minimal de $\mathrm{ad}_m X$. L'assertion du lemme est donc démontrée.

6.1.3. La proposition qui suit est dû à Gabber. C'est une généralisation de ([29], 2.5,). On commence avec un lemme qui généralise ([34], 3.5.8). Pour ceci on suppose que $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique et on prende s comme dans la conclusion de 6.1.2. Soit M un $\mathfrak{g}$ module engendré par un sous-espace M^0 de dimension finie et posons

$M^n = U^n(\mathfrak{g}) M^0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

LEMME. — *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, $a \in U^m(\mathfrak{g})$ *la relation* $a M^{ms} = 0$ *entraîne* $a M = 0$.

C'est clair pour $m = 0$. Si $m > 0$ on a pour tout $n_i \in \mathbb{N}$ avec $\sum n_i \leq ms$ que $a(X_r^{n_r} X_{r-1}^{n_{r-1}} \dots X_1^{n_1}) M^0 = 0$, et par conséquence $((ad_m X_1)^{n_1} (ad_m X_2)^{n_2} \dots (ad_m X_r)^{n_r} a) M^0 = 0$. Grâce à 6.1.2 il résulte pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathfrak{g}$ que $((ad_m X)^n a) M^0 = 0$ et par conséquence $a X^n M^0 = 0$, de sorte que $a M = a U(\mathfrak{g}) M^0 = 0$.

6.1.4. PROPOSITION. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie ad-algébrique,* M *un* $U(\mathfrak{g})$ *module de type fini*. Alors $d(U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, M) \leq 2d(M)$.

Soient $a \in U^m(\mathfrak{g})$ et s comme dans la conclusion de 6.1.3. Comme $a M^{ms} \subset M^{m(s+1)}$ il en résulte une application de $U^m(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{Hom}_k(M^{ms}, M^{m(s+1)})$ de noyau $\mathrm{Ann}\, M \cap U^m(\mathfrak{g})$. Donc

$$\dim_k \left(U^m(\mathfrak{g}) / (\mathrm{Ann}\, M \cap U^m(\mathfrak{g}))\right) \leq \dim_k M^{ms} \dim_k M^{m(s+1)},$$

d'où l'assertion.

6.2. Problèmes.

1) Montrer que 6.1.4 reste vrai pour car $k > 0$.

2) Montrer que 6.1.3 est faux si $\mathfrak{g}$ est seulement presque algèbrique.

3)* Montrer que 6.1.4 est faux si $\mathfrak{g}$ est seulement presque algèbrique.

4)** Soit $\mathfrak{g}$ ad-algèbrique et M un $U(\mathfrak{g})$ module simple. A-t-on $2d(M) = d(U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, M)$?

6.3. Egalité de dimension pour une sous-catégorie de $U(\mathfrak{g})$ modules.

6.3.1. Désormais on suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple et donc ad-algèbrique. On tâche de trouver une famille assez importante de $U(\mathfrak{g})$ module satisfaisants la conclusion de 6.2.4. Ceci a été déjà vérifier pour les modules de la categorie $\underline{O}$ ([29], Sect. 2) et pour les modules de Harish-Chandra ([47], 4.7). On décrit ici une categorie $\underline{G}$ (fermée pour les sous-quotients) de $U(\mathfrak{g})$ modules de type fini trouvée par Gabber qui contient les modules dans $\underline{O}$ et les modules de Harish-Chandra, telle que tout $M \in \operatorname{Ob} \underline{G}$ satisfait à la conclusion de 6.2.4. L'intérêt de ceci est qu'il en résulte que tout $M \in \operatorname{Ob} \underline{G}$ est de longueur fini.

6.3.2. Soit A un anneau filtré, c'est à dire que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A^n$, où les A^n sont les sous-groupes additifs de A satisfaisants $1 \in A^0$, $A^n \subset A^{n+1}$, $A^m A^n \subset A^{m+n}$, pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$gr\, A := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (A^n / A^{n-1}),$$

admet la structure d'un anneau gradué. Si A est une algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ on va toujours supposer que $\{A^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est sa filtration canonique (6.1.2). Dans ce cas $gr\, A$ coincide avec $S(\mathfrak{g})$.

Soit M un A module. Une filtration F de M est une famille de sous-groupes $\{F^n M\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de M satisfaisants,

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F^n M, \quad A^m F^n M \subset F^{m+n} M, \quad \forall\, m, n \in \mathbb{Z}.$$

On dira qu'une filtration $\{F^n M\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est de type fini si $\mathcal{M} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F^n M$ est de type fini comme $\mathcal{A} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ module. On dira que deux filtrations F, F' sont equivalentes s'ils existent $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$F^{n-c_1} M \subset F'^{n} M \subset F^{n+c_2} M.$$

Par exemple les filtrations de type fini sont toutes equivalentes.

Soit F une filtration de M et posons

$$gr_F M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(F^n M / F^{n-1} M\right)$$

Alors $gr_F M$ admet la structure d'un module gradué sur l'anneau gradué $gr A$. On pose $I_F = \mathrm{Ann}\, gr_F M$.

LEMME. — <u>Soit</u> A <u>un anneau filtré et</u> M <u>un</u> A <u>module</u>. <u>Soient</u> F, F' <u>deux filtrations equivalentes de</u> M. <u>Alors</u> $gr_F M$, $gr_{F'} M$ <u>admettent des suites normaux equivalentes (c'est à dire avec facteurs isomorphes à permutation près)</u>. <u>En particulier</u> $\sqrt{I_F} = \sqrt{I_{F'}}$.

En prenant les filtrations intermediaires (par exemple $F''^n M := F'^n M + F^n M$, $\forall n$) on ramène au cas $c_1 = 0, c_2 = 1$.

On considère l'anneau gradué

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n .$$

On pose u l'image de l'identité dans A' considérée comme élément de $\mathcal{A}$. C'est un élément central non-diviseur de zéro. On voit facilement que $\mathcal{A}/u\mathcal{A}$ est isomorphe à $\operatorname{gr} A$ comme anneau gradué. On pose

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F^n M \,, \qquad \mathcal{M}' = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F'^n M$$

qui sont les modules gradués sur l'anneau gradué $\mathcal{A}$. On a des isomorphismes $\mathcal{M}/u\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_F M$, $\mathcal{M}'/u\mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} \operatorname{gr}_{F'} M$ de modules sur l'isomorphisme $\mathcal{A}/u\mathcal{A} \to \operatorname{gr} A$ d'anneaux. D'après l'hypothèse sur c_1, c_2 on a $u\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ et puis $u\mathcal{M} \subset u\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Vu de l'isomorphisme $\mathcal{M}'/\mathcal{M} \cong u\mathcal{M}'/u\mathcal{M}$, ceci démontre l'assertion recherchée.

6.3.3. Soit M un $U(\mathfrak{g})$ module de type fini. Choisissons un sous-espace M^0 de M de dimension finie qui engendre M comme $U(\mathfrak{g})$ module. On pose $M^n := U^n(\mathfrak{g}) M^0$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ (où $U^n(\mathfrak{g}) = 0\ \forall n < 0$). Alors $\{M^n\}$ est une filtration de M de type fini, et son classe d'equivalence est independante du choix de M^0. Si I est un idéal de $S(\mathfrak{g})$ on pose $\mathcal{V}(I)$ l'ensemble des zéros de I dans $\mathfrak{g}^*$. On a $d_{S(\mathfrak{g})}(S(\mathfrak{g})/I) = \dim \mathcal{V}(I)$, où dim est la dimension définit à partir des fonctions réguliers sur $S(\mathfrak{g})/I$ (voir [1], Chap. II). On pose $\mathcal{V}(M) := \mathcal{V}(\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}\, gr\, M)$ qui ne dépend pas du choix de la filtration de type fini sur M, Comme $S(\mathfrak{g})$ est commutative on a que $\mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}\, gr\, M = \mathrm{Ann}_{S(\mathfrak{g})}\, gr\, M^0 \left(= gr\left(\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})} M^0\right) \text{ si } \dim_k M^0 = 1\right)$.

LEMME. — Pour tout $U(\mathfrak{g})$ module de type fini, on a

(i) $d(M) = \dim \mathcal{V}(M)$.

(ii) $\mathcal{V}(M) = \mathcal{V}(M') \cup \mathcal{V}(M/M')$, pour tout sous module M' de M.

(iii) $\mathcal{V}(E \otimes M) = \mathcal{V}(M)$, pour tout $U(\mathfrak{g})$ module E de dimension finie.

(ii). En prenant la filtration sur M' (resp. M/M') définit par $M'^n = M^n \cap M'$ (resp. $(M^n + M')/M'$) on trouve une suite exacte

$$0 \to gr\, M' \to gr\, M \to gr(M/M') \to 0.$$

Grâce à 7.1.6 les filtrations sur M' et M/M' sont de type fini. D'où (ii).

(i). Grace à (ii) on ramène au cas où M est cyclique. Comme

$d_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g})/I) = d_{S(\mathfrak{g})}(S(\mathfrak{g})/gr\, I)$ pour tout idéal à gauche I de $U(\mathfrak{g})$,

(i) en résulte.

(iii) En prenant la filtration sur $E \otimes M$ définit par $(M \otimes E)^n = M^n \otimes E$ on trouve $gr(M \otimes E) \cong gr\, M \otimes E$, où E est définit comme $S(\mathfrak{g})$ module selon $1e = e$, $Xe = 0$,

$\forall e \in E$, $X \in \mathfrak{g}$. Il en résulte que $\mathcal{V}(M \otimes E) = \mathcal{V}(M)$.

6.3.4. On suppose désormais que k est algébriquement clos. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble de sous-groupes de Borel de $\mathfrak{g}$. C'est une variété algébrique et même une seule orbite pour l'action du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ ([7], 1.10.20). Pour tout $\underline{b} \in \mathcal{B}$ on pose $\underline{n}(\underline{b}) := [\underline{b}, \underline{b}]$.

On désigne par $\underline{G}$ la catégorie des $U(\mathfrak{g})$ modules de type fini satisfaisants les deux conditions suivantes. Pour tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}$ on a

(i) Il existe $\underline{b} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{V}(M) \cap \underline{n}(\underline{b}) \subset \{0\}$.

(ii) L'action du centre $Z(\mathfrak{g})$ sur M est localement finie.

On remarque que comme M est de type fini, (ii) entraîne que l'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur M est finie et donc M admet une suite normale $M = M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_{t+1} = \{0\}$ telle que $Z(\mathfrak{g})$ agit par scalaires sur chaque facteur M_i/M_{i+1}.

Il résulte de 6.3.3 que $\underline{G}$ est fermée pour les sous-quotients est donc en particulier $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{G} \Rightarrow (M_i/M_{i+1}) \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}$, $\forall i$.

6.3.5. L'origine de la condition (i) de 6.3.4 s'explique par le lemme suivant

LEMME. — <u>Soient $\underline{b} \in \mathcal{B}$ et $\underline{a}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ tel que $\underline{a} + \underline{b} = \mathfrak{g}$. Soit M un $U(\mathfrak{g})$ module de type fini qui est localement fini comme $\underline{a}$ module. Alors</u> $\mathcal{V}(M) \cap \underline{n}(\underline{b}) \subset \{0\}$.

Comme l'action de $\underline{a}$ est localement finie on a que $\underline{a} \subset \sqrt{\operatorname{Ann} \operatorname{gr} M}$. On identifie $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g}^*$ par la forme de Killing. Alors $\mathcal{V}(M) \subset \underline{a}^{\perp}$ et comme $\underline{a} + \underline{b} = \mathfrak{g}$ on a $\underline{a}^{\perp} \cap \underline{b}^{\perp} = 0$. Enfin $\underline{b}^{\perp} = \underline{n}(\underline{b})$, d'où l'assertion.

6.3.6. Il résulte de 6.3.5 que tout module de la catégorie $\underline{O}$ (3.11.15) est un objet de $\underline{G}$. En outre soit θ une involution (de Cartan) de $\mathfrak{g}$ et posons $\underline{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta(X) = X\}$. C'est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ ([7], 1.13.3). D'une manière analogue à 5.5.2

on peut définir un module de Harish-Chandra par rapport au couple $(\underline{g}, \underline{k})$. Comme dans 5.5.4 il résulte que tout module de Harish-Chandra est de type fini. D'autre part ([7], 1.13.11) on peut toujours trouver $\underline{b} \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{g} = \underline{b} + \underline{k}$ et il en résulte que tout module de Harish-Chandra est un objet de $\underline{G}$.

6.3.7. On identifie $\underline{g}$ avec $\underline{g}^*$ par la forme de Killing. On dira que $X \in \underline{g}$ (donc $X \in \underline{g}^*$) est nilpotent si $\mathrm{ad}_{\underline{g}} X$ est un endomorphisme nilpotent. On dira qu'un G orbit $\mathcal{O} \subset \underline{g}^*$ est nilpotente si un element (donc tout élément) de $\mathcal{O}$ est nilpotent. On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble d'éléments de $\underline{g}^*$. C'est un réunion de G-orbites nilpotentes. On désigne par $Y(\underline{g})$ l'algèbre des éléments G invariants de $S(\underline{g})$. C'est une algèbre de polynôme ([7], 7.3.7, 11.1.14). On désigne par Y_+ son idéal d'augmentation. On aura besoin des résultats classiques suivants. Dans ceci on fixe $\underline{b} \in \mathcal{B}$ et on pose $\underline{n} = \underline{n}(\underline{b})$.

THEOREME. — ([7], 8.1.3 ; [45]).

(i) $\mathcal{V}(Y_+ S(\mathfrak{g})) = \mathcal{N}$.

(ii) Le groupe G n'admet dans $\mathcal{N}$ qu'un nombre fini d'orbites.

(iii) $\dim(\mathcal{O} \cap \underline{n}) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}$, pour tout G orbite nilpotent $\mathcal{O}$.

6.3.8. Soit M un $W(\mathfrak{g})$ module. On pose $(\mathcal{V}\mathcal{A})(M) = \mathcal{V}(\mathrm{gr\,Ann}\, M)$.
On a $\overline{(\mathcal{V}\mathcal{A})(M)} = (\mathcal{V}\mathcal{A})(M)$, où bar désigne l'adhérence pour la topologie de Zariski.

LEMME. — Pour tout $W(\mathfrak{g})$ module M, on a

(i) $(\mathcal{V}\mathcal{A})(M)$ est réunion de G orbites dans $\mathfrak{g}^*$.

(ii) $(\mathcal{V}\mathcal{A})(M) = (\mathcal{V}\mathcal{A})(M') \cup (\mathcal{V}\mathcal{A})(M/M')$, pour tout sous-module M' de M.

(iii) $\overline{G\,\mathcal{V}(M)} \subset (\mathcal{V}\mathcal{A})(M)$, si M est de type fini.

(iv) $(\mathcal{V}\mathcal{A})(M) \subset \mathcal{N}$ si l'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur M est finie.

(i). Comme Ann M est un idéal bilatère de $W(\mathfrak{g})$, alors gr (Ann M) est un idéal G-stable de $S(\mathfrak{g})$ et (i) résulte par transport de structure.

(ii). On pose $I = \mathrm{Ann}(M/M')$, $J = \mathrm{Ann}\, M'$, $K = \mathrm{Ann}\, M$.

D'une part $K \supset JI$, donc $\sqrt{gr K} \supset \sqrt{gr J} \cap \sqrt{gr I}$.

D'autre part $\sqrt{K} = \sqrt{J} \cap \sqrt{I}$, donc $gr\sqrt{K} \subset gr\sqrt{J} \cap gr\sqrt{I}$.

Comme $\sqrt{gr\sqrt{K}} = \sqrt{gr K}$, etc., ceci donne l'inclusion opposée, d'où (ii).

(iii). Grâce à (ii) et 6.3.3 (ii) on ramène au cas où M est cyclique de vecteur cyclique v. On pose $M^0 = kv$, puis

$$gr(\operatorname{Ann} M) \subset gr(\operatorname{Ann} M^0) = \operatorname{Ann}(gr M),$$

donc

$$\overline{G\mathcal{V}(M)} \subset \overline{G((\mathcal{V}A)(M))} = (\mathcal{V}A)(M), \text{ d'après (i).}$$

(iv). Grâce à (ii) on ramène au cas où $Z(\mathfrak{g})$ agit par scalaires. Dans ce cas $Y^+ \subset gr \operatorname{Ann} M$, puis

$(\mathcal{V}A)(M) \subset \mathcal{V}(Y^+ Y(\mathfrak{g})) = \mathcal{N}$, d'après 6.3.7 (i).

6.3.9. COROLLAIRE. — <u>Soit</u> $M \in \operatorname{Ob} \underline{G}$. <u>Alors il existe</u> $\underline{b} \in \mathcal{B}$ <u>telle que</u> $\mathcal{V}(M) \cap \underline{b} \subset \{0\}$.

D'après hypothèse (i) de 6.3.4 il existe $\underline{b} \in \mathcal{B}$ telle que $\mathcal{V}(M) \cap \underline{n}(\underline{b}) \subset \{0\}$. D'après l'hypothèse (ii) et 6.3.8 (iii), (iv), on a $\mathcal{V}(M) \subset \mathcal{N}$.

Enfin tout élément nilpotent de $\underline{b}$ se trouve dans $\underline{n}(\underline{b})$, puis l'assertion.

6.3.10. Soit $\underline{b} \in \mathcal{B}$. On désigne par $\underline{n}^-$ l'orthogonal de $\underline{b}$ pour la forme de Killing. On sait que $\underline{n}^-$ est conjuguée à $\underline{n}(\underline{b})$ et en particulier 6.3.7(iii) s'applique à $\underline{n}^-$.

LEMME. — *Soient $\mathcal{W}$ une sous-variété G stable de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{V}_0'$ une sous-variété de $\mathcal{W} \cap \underline{n}^-$. Alors* $\dim \mathcal{V}_0' \leq \frac{1}{2} \dim \mathcal{W}$.

D'après l'hypothèse sur $\mathcal{W}$ et 5.3.7 (ii), ils existent un nombre fini d'orbites nilpotentes $\mathcal{O}_i : i = 1, 2, \ldots, r$, telles que

$$\mathcal{W} = \coprod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i .$$

Alors $\dim \mathcal{V}_0' \leq \dim(\underline{n}^- \cap \mathcal{W}) = \max_i \dim(\underline{n}^- \cap \mathcal{O}_i)$

$= \frac{1}{2} \max_i (\dim \mathcal{O}_i) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{W}$.

6.3.11. Soit $M \in \mathrm{ob}\,\underline{G}$. Au cas où $\mathcal{V}(M) \subset \underline{n}^-$, il résulte de 6.3.10 en prenant $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}(M)$, $\mathcal{W} = (\mathcal{V}\mathcal{A})(M)$ que $\dim \mathcal{V}(M) \leq \frac{1}{2} \dim (\mathcal{V}\mathcal{A})(M)$. Tenant compte de 6.3.9 nous pouvons reduire à ce cas par une déformation.

En détail soit $\varphi : k^* \to T$ un isomorphisme du groupe multiplicatif k^* de k dans un sous-groupe algébique T de G. On pose $\mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$, $\mathcal{W} = (\mathcal{V}\mathcal{A})(M)$ qui sont les sous-variétés fermées de $\underline{g}^*$. On pose

$$\mathcal{S} = \{ (t, \varphi(t)y) : t \neq 0, y \in \mathcal{V} \} \subset \mathbb{A}^1 \times \underline{g}^*.$$

D'après 6.3.8 (iii) on a $\mathcal{S} \subset (\mathbb{A}^1 - \{0\}) \times \mathcal{W}$.

On pose $\mathcal{V}_0 = \overline{\mathcal{S}} \cap (\{0\} \times \mathcal{W})$. Le groupe k^* agit sur $\mathcal{S}$ selon $t' \times (t, \varphi(t)y) \mapsto (t't, \varphi(t't)y)$ et $\mathcal{S} = k^*(1, \mathcal{V})$.

LEMME. — $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}_0$.

Comme T est un groupe algébrique et $\mathcal{V}$ est fermé, $\mathcal{S}$ est ouverte ([3],) dans son adhérence $\overline{\mathcal{S}}$, d'où $\dim \mathcal{S} = \dim \overline{\mathcal{S}}$. Grâce à l'isomorphisme $\mathcal{S} \cong (\mathbb{A}^1 - \{0\}) \times \mathcal{V}$ on a $\dim \mathcal{S} = 1 + \dim \mathcal{V}$. Comme $\mathcal{V}_0$ est un fermé propre de $\overline{\mathcal{S}}$ on a $\dim \mathcal{V}_0 < \dim \overline{\mathcal{S}}$. D'autre part

$\mathcal{S}$ est contenue dans la fermée $\mathbb{A}^1 \times \mathcal{V}$, d'où $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathbb{A}^1 \times \mathcal{V}$ et il résulte que $\dim \mathcal{V}_0 \geq \dim \overline{\mathcal{S}} - 1$. Grâce aux inégalités précédentes $\dim \mathcal{V}_0 = \dim \overline{\mathcal{S}} - 1 = \dim \mathcal{V}$.

6.3.12. PROPOSITION. — _Soit_ $M \in \underline{G}$, _alors_

$$\dim \mathcal{V}(M) \leq \frac{1}{2} \dim (\mathcal{V}A)(M).$$

Soit $\underline{b} \in \mathcal{B}$ comme dans la conclusion de 6.3.9. On prende $\underline{n}^-$ comme dans 6.3.10. On pose $\underline{n}^+ = \underline{n}(\underline{b})$. On a $\underline{b} = \underline{h} \oplus \underline{n}^+$ pour une sous-algèbre de Cartan $\underline{h}$ de $\mathfrak{g}$. Soient $R \subset \underline{h}^*$ l'ensemble des racines non-nulles, R^+ le système de racines positives par rapport à la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \underline{n}^+ \oplus \underline{h} \oplus \underline{n}^-$, $H_\alpha \in \underline{h}$ la coracine de $\alpha \in R$, $H = \sum_{\alpha \in R^+} H_\alpha$,

$\mathfrak{g}_m = \{ X \in \mathfrak{g} : [H, X] = mX \}$. Alors $\mathfrak{g}_0 = \underline{h}$,

$$\underline{n}^+ = \sum_{m \in \mathbb{N}^+} \mathfrak{g}_m, \quad \underline{n}^- = \sum_{m \in \mathbb{N}^+} \mathfrak{g}_{-m}.$$

On définit φ dans l'hypothèse de 6.3.11 par linéarité et selon $\varphi(t)X := t^m X$, $\forall X \in \mathfrak{g}_m$. On identifie $\mathfrak{g}^*$ avec $\mathfrak{g}$ par la forme de Killing et pour tout $X \in \mathfrak{g}^*$ on désigne par $s(X)$ le plus petit entier tel que $t^{s(X)}\varphi(t)X$ est polynôme en t, et on pose $\theta(X) = t^{s(X)}\varphi(t)X\big|_{t=0}$.

Soit $\pi : \mathbb{A}^1 \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ la projection canonique.

En prenant $\mathcal{V}, \mathcal{V}_0$ selon 6.3.11 il résulte que $\theta(\mathcal{V}) = \pi(\mathcal{V}_0)$.

D'après 6.3.9 et le choix de $\underline{b}$ on a $s(X) > 0$, $\forall X \in \mathcal{V}$ de sorte que $\theta(\mathcal{V}) \subset \underline{n}^-$. La conclusion de la proposition résulte donc de 6.3.10 et 6.3.11.

6.3.13. THEOREME. — (<u>Gabber</u>, <u>non-publié</u>). Pour <u>tout</u> $M \in \underline{\mathcal{G}}$, <u>on a</u> $2d(M) = d(U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, M)$.

L'inégalité $2d(M) \geq d(U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}\, M)$ résulte de 6.1.4. L'inégalité opposée résulte de 6.3.12 et 6.3.3 (i).

6.3.14. COROLLAIRE. — <u>Soit</u> $M \in \underline{\mathcal{G}}$. Admettons que $(\mathcal{V}\mathcal{A})(M)$ <u>soit irréductible</u>, <u>alors</u>

$$(\mathcal{V}\mathcal{A})(M) = \overline{G\, \mathcal{V}(M)}.$$

6.4. Problèmes.

1)* Montrer que $\underline{G}$ est fermée pour les extensions.

2)* Montrer que $\underline{G}$ est fermée pour le produit tensoriel avec un module de dimension finie.

6.5. Théorème de longueur fini pour la categorie $\underline{G}$.

6.5.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Si M est un $U(\mathfrak{g})$ module de type fini on désigne par $d(M)$ sa dimension de Gelfand-Kirillov sur $U(\mathfrak{g})$ (3.2).

LEMME. — Soit M un $U(\mathfrak{g})$ module critique (de type fini). Alors

(i) $\operatorname{Ann} M$ est un idéal premier. (Gabber, non-publié).

(ii) $\operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann} N$ pour tout sous-module $N \neq 0$ de M.

(i). Soient I, J les idéaux de $U(\mathfrak{g})$ tels que

$\mathcal{J} I M = 0$. On a donc un homomorphisme surjectif

$\mathcal{J} \otimes_{U(\mathfrak{g})} (M/IM) \twoheadrightarrow \mathcal{J} M$ défini selon

$j \otimes (m + IM) \mapsto jm$, $\forall j \in \mathcal{J}$, $m \in M$. Comme M est critique

$IM \neq 0 \Rightarrow d(M/IM) < d(M)$ et puis d'après 3.3.4 on a

$d(\mathcal{J} M) \leq d(\mathcal{J} \otimes_{U(\mathfrak{g})} (M/IM)) < d(M)$. Comme M

est critique il résulte que $\mathcal{J} M = 0$, d'où (i).

(ii). On pose $\mathcal{J} = \operatorname{Ann} N$. Comme dans (i) on a

un homomorphisme surjectif $\mathcal{J} \otimes_{U(\mathfrak{g})} M/N \twoheadrightarrow \mathcal{J} M$. Comme $N \neq 0$ et

M est critique, il résulte de 3.3.4 que

$d(\mathcal{J} M) \leq d(\mathcal{J} \otimes_{U(\mathfrak{g})} (M/N)) \leq d(M/N) < d(M)$.

Comme M est critique $\mathcal{J} M = 0$ ce qui donne $\operatorname{Ann} M = \mathcal{J}$.

6.5.2. Désormais supposons k algébriquement clos et $\mathfrak{g}$

semi-simple.

LEMME. — $\mathcal{J} \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow \mathcal{J} \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$ <u>et</u>

$\mathcal{J} \cap Z(\mathfrak{g}) \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$.

Soit $\mathcal{J} \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$. Alors il existe un $U(\mathfrak{g})$.

module simple M tel que $\mathcal{J} = \operatorname{Ann} M$. D'après ([7], 2.6.8) l'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur M est réduite aux scalaires et donc $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{J} \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$. D'autre si $KL \subset \mathcal{J}$ avec K, L les idéaux bilatères, alors $KLM = 0$. Comme M est simple, soit $LM = 0$ et $L \subset \mathcal{J}$, soit $LM = M$ et $K \subset \mathcal{J}$. Inversement soit $\mathcal{J} \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, avec $\mathcal{J} \cap Z(\mathfrak{g}) \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$. D'après ([7], 3.1.15) $\mathcal{J}$ est intersection d'idéaux primitifs. D'autre part pour $\mathfrak{g}$ semisimple il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux primitifs contenants un idéal maximal de $Z(\mathfrak{g})$ donné. Alors $\mathcal{J}$ est intersection finie d'idéaux primitifs et comme $\mathcal{J}$ est premier il est donc primitif.

6.5.3. (Notation et conventions de 5.5.1, 5.5.2). D'une manière évidente $U(\mathfrak{g})$ est muni de la structure d'un $\mathcal{U}$ module et les sous-modules sont des idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g})$.

LEMME. — <u>Soit</u> $I \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$. <u>Alors</u> $M := (U(\mathfrak{g}) / U(\mathfrak{g}) I)$ <u>est de longueur fini comme</u> $\mathcal{U}$ <u>module</u>.

D'après 5.5.4 il suffit de montrer que M est un module de Harish-Chandra pour le couple $(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}, \underline{k})$.

Comme l'action de ad $\mathfrak{g}$ sur $U(\mathfrak{g})$ est localement finie la condition (i) de 5.5.2 est vérifiée. La condition (iii) résulte du fait que $I \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$. Enfin la condition (ii) résulte de ([31], 4.3).

6.5.4. COROLLAIRE. — <u>Soit</u> $J \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$ <u>tel que</u> $I := J \cap Z(\mathfrak{g}) \in \operatorname{Max} Z(\mathfrak{g})$.

(i) <u>Il existe un et un seul idéal minimal $\tilde{J}$ de</u> $U(\mathfrak{g})/IU(\mathfrak{g})$ <u>contenant strictement</u> $J/IU(\mathfrak{g})$.

(ii) <u>On a</u> $\tilde{J}^2 = \tilde{J}$.

(i). L'existence résulte de 6.5.3. Si $\tilde{J}, \tilde{J}'$ sont deux idéaux distincts admettant cette propriété, alors $\tilde{J}\tilde{J}' \subset \tilde{J} \cap \tilde{J}' \subset J/IU(\mathfrak{g})$ et il résulte que soit $\tilde{J} \subset J/IU(\mathfrak{g})$, soit $\tilde{J}' \subset J/IU(\mathfrak{g})$ (comme J est premier). D'où (i).

(ii). On a $\tilde{J} \supset \tilde{J}^2 \supsetneq J/IU(\mathfrak{g})$ (comme dans (i)). Comme $\tilde{J}$ est minimal, (ii) en résulte.

6.5.5. (Notation 6.3.4).

THEOREME. — *Soit* $M \in \operatorname{Ob} \underline{G}$. *Alors* M *est de longueur fini*.

Sans restriction de généralité on peut supposer que l'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur M est réduite aux scalaires et grâce à 3.1.3 que M est critique. D'après 6.5.1, $J := \operatorname{Ann} M \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, qui satisfait donc les hypothèses de 6.5.4. Soit $\tilde{J}$ dans sa conclusion et posons $N = \tilde{J} M$. C'est un sous-module non-nul de M. D'après 6.5.1 (ii), $J = \operatorname{Ann} N$. Montrons que N est simple. Sinon il existe un sous-module N_0 propre de N. Comme M est critique, N le soit aussi et par conséquence $d(N/N_0) < d(N)$. D'après 6.3.13 il en résulte que $\operatorname{Ann}(N/N_0) \supsetneq \operatorname{Ann} N = J$, d'où $\tilde{J}(N/N_0) = 0$. Par conséquence $N_0 \supset \tilde{J} N = \tilde{J}^2 N = \tilde{J} N = N_0$ (d'après 6.5.4 (ii)) qui est une contradiction. Nous avons montré que si $M \in \operatorname{Ob} \underline{G}$, alors $\operatorname{Soc}_{U(\mathfrak{g})} M \neq 0$.

Comme $U(\mathfrak{g})$ est noethérienne, il en résulte que tout $M \in \mathrm{Ob}\,\underline{G}$ est de longueur fini.

6.5.6. Ce théorème est interessante dans la mesure qu'on trouve une assez grande catégorie de modules de type fini. Cependant ce n'est pas une forme trop utile. Par exemple pour montrer qu'un module de Harish-Chandra V est un objet de $\underline{G}$ il faut tout d'abord montrer que V est type fini. La seule méthode générale connue est de montrer d'abord que V est de longueur fini !

LECON 7. — Théorème de separation de Gabber et modules de Harish-Chandra.

Les résultats principals de 7.1-7.7 sont dûs à Gabber. Toutes les démonstrations sont tirées de ses conferences à Paris VI et quelques conversations privées.

7.1. Le lemme d'Artin-Rees — Mc Connell.

Soit $\underline{n}$ une algebre de Lie nilpotente de dimension finie.

7.1.1 Pour tout $s \in \mathbb{N}$ on pose $B_s = \underline{n}^s\, U(\underline{n})$. Comme $B_s B_t \subset B_{s+t}$ il résulte que

$$B = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} B_s$$

admet la structure d'une k-algebre graduée.

LEMME. — B est noetherienne.

Il suffit de construire une sous-algèbre de Lie $\underline{m}$ de B de dimension finie qui engendre B comme algèbre associative. En effet ceci donne une surjection $\mathcal{U}(\underline{m}) \twoheadrightarrow B$ et comme $\mathcal{U}(\underline{m})$ est noethérienne ([9], V, Thm. 4) B le sera aussi.

On désigne par $\underline{n}_0$ (resp. $\underline{n}_1$) l'algèbre de Lie $\underline{n}$ considérée comme sous-espace de B_0 (resp. B_1). Alors $\underline{n}_0$ et $\underline{n}_1$ sont les sous-espaces de B et on désigne par $\underline{m}$ la sous-algèbre de Lie qu'elles engendrent (où le crochet de Lie se fait par commutation).

C'est clair que $\underline{n}_0$ engendre $B_0 \cong \mathcal{U}(\underline{n})$. Comme $B_s = \underline{n}_1^s B_0$ il en résulte que $\underline{m}$ engendre B. Il reste donc à démontrer que $\dim \underline{m} < \infty$. Comme tout $\operatorname{ad} X : X \in \underline{n}_0$ est une dérivation localement nilpotente de B et $\underline{n}_1$ est stable pour cette action, il suffit de démontrer que l'algèbre de Lie engendrée par $\underline{n}_1$ est de dimension finie. Comme $\dim \underline{n} < \infty$ les espaces $\underline{n}_1 \subset B_1$, $[\underline{n}_1, \underline{n}_1] \subset B_2$, $[\underline{n}_1, [\underline{n}_1, \underline{n}_1]] \subset B_3, \dots,$ sont tous de dimension finie et ils sont eventuellement nuls car $\underline{n}$ est nilpotente (c'est la condition nécessaire et suffisante pour nilpotence). Le lemme est donc démontré.

7.1.2. LEMME.– (dite de Artin-Rees). Soient $N \subset M$ les $\mathcal{U}(\underline{n})$ modules de type fini. Alors il existe $r \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de M, N) tel que

$$\underline{n}^s M \cap N = \underline{n}^{s-r}(\underline{n}^r M \cap N), \quad \forall s \geq r.$$

L'inclusion $\underline{n}^{s-r}(\underline{n}^r M \cap N) \subset \underline{n}^s M \cap N$ est évidente. Démontrons l'inclusion inverse. Comme M est de type fini comme $\mathcal{U}(\underline{n})$ module, le module gradué $K = \oplus\, \underline{n}^s M$ est de type fini comme $B := \oplus\, \underline{n}^s \mathcal{U}(\underline{n})$ module. De 7.1.1, il résulte que le sous-B-module $L = \oplus(\underline{n}^s M \cap N)$ de K est de type fini. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\bigoplus_{t=0}^{r} W_t\right) : W_t \subset \underline{n}^t M \cap N,$$

engendre L. Puis pour tout $s \geq r$ on a

$$(\underline{n}^s M \cap N) = \sum_{t=0}^{r} \underline{n}^{s-t} W_t \subset \sum_{t=0}^{r} \underline{n}^{s-t}(\underline{n}^t M \cap N) \subset \underline{n}^{s-r}(\underline{n}^r M \cap N).$$

Remarque. Dans ce cadre non-commutatif, le résultat est dû à McConnell ([39],).

7.1.3. COROLLAIRE. — Soit M un $U(\underline{n})$ module de type fini. On pose $N = \bigcap \underline{n}^s M$. Alors $N = \underline{n} N$.

On a $\underline{n}^t M \supset N$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Puis d'après 7.1.2 on trouve $N = \underline{n}^s M \cap N = \underline{n}^{s-r}(\underline{n}^r M \cap N) = \underline{n}^{s-r} N$, $\forall s \geq r$.

7.1.4. LEMME. — Soit $B = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} B_s$ un anneau gradué. Les deux conditions suivantes sont équivalentes

(i) B est noethérien pour les idéaux gradués à gauche.

(ii) B est noethérien à gauche.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $b \in B$. On dira que le degré de b est le plus grand entier $r \geq 0$ tel que $b \in \bigoplus_{s \geq r} B_s$. Soit $b \in B$ de degré r. On dira que le terme principale b_r de b est l'unique élément de B_r tel que $b - b_r \in \bigoplus_{s > r} B_s$. On dira que la longueur t de b est le plus petit entier tel que $b \in \bigoplus_{s < r+t} B_s$. Soit I un idéal à gauche de B. Pour chaque entier t soit $I(t)$ l'idéal gradué à gauche de B formé des termes principaux d'élément de I de longueur $\leq t$. D'après l'hypothèse, c'est à dire (i), la suite croissante d'idéaux gradués à gauche $I(0) \subset I(1) \subset \dots$, est stationnaire. Choisons $r \in \mathbb{N}$ tel que $I(r+t) = I(r+t+1)$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Choisons pour chaque

$I(t)$: $t \leq r$ une système finie de générateurs $\{a_{t1}, a_{t2}, \dots a_{ti_t}\}$.

Pour chaque $t \leq r$ et pour chaque $s \leq i_t$ choisissons $b_{ts} \in I$ de longueur $\leq t$ tel que a_{ts} est le terme principale de b_{ts} (un tel b_{ts} existe d'après la définition de $I(t)$). Nous allons montrer que $\{b_{t1}, b_{t2}, \dots b_{ti_t}\}_{t=0}^{r}$ est une système de générateurs de I. Soit $b \in I$ de longueur t. Alors son terme principale a est dans $I(t)$. Puis ils existent $c_s \in B_s$ tels que $a = \sum c_s a_{ts}$. Donc l'élément $\sum c_s b_{ts} \in I(t)$ admet a pour terme principale et est de longueur t. Puis $b - \sum c_s b_{ts}$ est de longueur $\leq t-1$ et l'assertion résulte par recurrence. (ii) $\Rightarrow$ (i) est évident.

7.1.5. LEMME. — <u>Soit</u> $B = \bigoplus_{s \in \mathbb{N}} B_s$ <u>un anneau gradué de contre</u> $Z(B)$. <u>Soit</u> $f \in B_r \cap Z(B)$: $r > 0$. <u>Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u>

(i) B/fB <u>est noetherien à gauche</u>.

(ii) B <u>est noetherien à gauche</u>.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Grâce à l'hypothèse de (i) et le théorème de base de Hilbert, l'anneau $(B/fB)[t]$ est noethérien à gauche. L'application $\bar{b} \mapsto f^s \bar{b}$ de $(B/fB)t^s$ sur $f^sB/f^{s+1}B$ se prolonge comme épimorphisme de $(B/fB)[t]$ sur $C := \oplus (f^sB/f^{s+1}B)$ d'anneaux gradués. Il en résulte que C est noethérien à gauche.

Soit $I \subset B$ un idéal à gauche que d'après 7.1.4 on peut supposer gradué sans restriction de généralité. Alors $J = \oplus J_s$

$J_s := (I \cap f^sB)/(I \cap f^{s+1}B)$ est un idéal à gauche gradué de C.

Soit $\{a_{is}\}$ un système fini de générateurs homogènes de J : $a_{is} \in J_s$

Alors ils existent $b_{is} \in I \cap f^sB$ homogènes tels que $b_{is} - a_{is} \in I \cap f^{s+1}B$.

Soit I' l'idéal à gauche gradué engendré par les b_{is}.

Pour tout $b \in I$ homogène (disons de degré t) et pour tout $k \in N$ ils existent $a_k \in I'$ homogène de degré t tels que $b - a_k \in I \cap f^kB$. En prenant $k+ > t$ il en résulte que $b = a_k$ et puis $I = I'$. (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente.

<u>Remarque</u>. Bien entendu ce résultat reste vrai pour les

idéaux à droite et des ideaux bilatères.

7.1.6. COROLLAIRE. — Soit $\underline{m}$ une algèbre de Lie de dimension finie. On désigne par $\{U^j(\underline{m})\}_{j\in\mathbb{N}}$ la filtration canonique de $U(\underline{m})$. Alors l'anneau gradué

$$B = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} U^j(\underline{m})$$

est noetherien.

Soit u comme dans 6.3.2 et prenons $f = u$ dans 7.1.5. Alors $B/uB \cong S(\underline{m})$ qui est noetherien, donc B est noetherien.

7.1.7. Soient $\underline{m}$ une algèbre de Lie de dimension finie et $\delta \in Der_k(\underline{m})$, c'est à dire une k-dérivation de $\underline{m}$. Soit M un $U(\underline{m})$ module. On dira que $\Delta \in Der_k(M)$ est une δ-dérivation de M si $\Delta(Xm) = \delta(X)m + X\Delta(m)$, $\forall\ X \in \underline{m}$, $m \in M$. Par exemple, si M est un $U(\underline{m} \oplus k\delta)$ module où $m \mapsto \Delta(m)$ désigne l'action de δ sur M. Rappelons qu'une filtration $\{F^jM\}_{j\in\mathbb{N}}$ (compatible avec la filtration canonique de $U(\underline{m})$) est de type fini si the module gradué $\bigoplus (F^jM)$ est de type fini comme $\bigoplus U^j(\underline{m})$ module.

On rappel que deux filtrations de type fini sont equivalentes au sense de 6.3.2.

LEMME. — Soient M un $U(\underline{m})$ module $\Delta \in \mathrm{Der}_\rho(M)$ et $\{F^iM\}$ une filtration de M de type fini. On suppose pour tout $m \in M$ qu'il existe $c(m) \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^i(m) \in (F^{i+c(m)}M), \forall i$. Alors il existe une filtration $\{G^iM\}$ de M de type fini telle que $\Delta(G^iM) \subset G^{i+1}M, \forall i$.

On pose $G^iM = \sum_{r+s=i} U^r(\underline{m})\,\Delta^s S$, où S est un système fini de générateurs de $\oplus(F^iM)$ comme $\oplus U^i(\underline{m})$ module. Alors $\Delta(G^iM) \subset G^{i+1}M$ et $\cup(G^iM) = M$. Il reste à démontrer que $\{G^iM\}$ est de type fini. Soit $c = \sup\{c(m) : m \in S\}$. Alors $G^iM \subset F^{i+c}M, \forall i$ et donc $\oplus(G^iM)$ est un sous-module de $\oplus F^{i+c}M$ qui est un $\oplus U^i(\underline{m})$ module de type fini. L'assertion résulte alors de 7.1.6.

Remarque. La condition du lemme est stable pour les sous $\underline{n}, \Delta$ modules.