מבוא קונספטואלי למתמטיקה

בעקבות ספרו של א.ה. פרנקל (1942-45)

למדתי תואר ראשון במדעי המחשב בטכניון בסוף שנות השבעים. במהלך לימודי השתתפתי במספר קורסים במתמטיקה, אלא שהדגש בקורסים אלו היה על טכניקות ולא על מושגים. הקורס היחיד שהיה לו אופי מושגי במקצת היה הקורס הראשון בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, אלא שגם בקורס זה לא דנו בצד הרעיוני של המושגים (ובפרט מה הבעיות שהמושגים מנסים להתייחס אליהן ומה הפתרונות שמושגים אלו מציעים).

ספרו של פרנקל מציע גישה שונה בתכלית. הוא פותח בבעיות הקונספטואליות ומסביר את האופן שבו בניית המושגים המתמטיים מנסה להתייחס אליהן. ההתייחסות הזו לעולם אינה מושלמת, משום שלא ניתן לפתח שום תורה פילוסופית/מדעית/מתמטית ללא הנחות מקדימות, ומשום שתורה סדורה ומדויקת באה תמיד במחיר של ויתור על שאיפות דמיוניות מסוימות. אלא שאין זה אומר שכל התורות וכל ההצגות הן שוות ערך. המטרה תהא להניח כמה שפחות, לוותר כמה שפחות, ולהשיג כמה שיותר.

למרות שיש הצדקה לראות ב"תאוריה של מדעי המחשב" חלק אינטגרלי של המתמטיקה, נראה לי שיש מקום להבדיל בינה לבין מה שנקרא "מתמטיקה קלסית" שהיא הנושא של ספרו של פרנקל. מכיוון שאינני מתמטיקאי (במובן המצומצם הזה), הטקסט כתוב בחרדה רבה, ויתכן שזו הסיבה הלא מודעת לכך שבחרתי לכותבו בעברית.

מוטיב מרכזי בספר הוא ***ההבחנה בין האובייקט המתמטי לבין ייצוגיו***, כאשר בדרך כלל יש (במפורש!) מספר אינסופי של ייצוגיים אקוויוולנטיים לכל אובייקט. למעשה מושג המפתח בכל תורה מתמטית הוא ה**שקילות** (**אקוויוולציה**) בין הייצוגים הנ"ל, ואילו האובייקט עצמו מוגדר כקבוצת הייצוגים האקוויוולנטיים זה לזה. לשם פשטות, לפעמים מוצג יחס השקילות הזה כיחס של שוויון. למותר לציין שיחס זה מקיים רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות.

כמובן שאובייקטים גרידא אינם מייסדים תחום/תורה מתמטית. לשם כך נחוצה **פעולה** (או פעולות) על (זוגות של) אובייקטים. דרישה ראשונית/יסודית לגבי הגדרת פעולה כזו היא שתוצאתה אינה תלויה בייצוג של האובייקט, למרות שבדרך כלל תוגדר הפעולה ביחס לייצוג. במילים אחרות, לאחר שנגדיר פעולה על ייצוגיים נראה שתוצאתה משתמרת כאשר מחליפים ייצוג אחד בייצוג השקול לו, הן לגבי הנתונים לפעולה (ה"קלטים") והן לגבי התוצר של הפעולה ("פלט"). אם נדייק יותר, הרי שהדרישה לגבי הנתונים היא "אוניברסלית" (ז"א לכל ייצוג של האובייקט), ואילו לגבי התוצר הדרישה היא "אקסיסטנציאלית" (ז"א: הייצוג המסוים של התוצר שקול לייצוג שמתקבל בהפעלת הפעולה על ייצוגים אשר שקולים לנתונים).

נקודה נוספת הראויה להדגשה היא ***האופי הפרגמטי*** של חלק מהבחירות המתמטיות. במילים אחרות, חלק מן הבחירות הנוגעות לשאלות כגון באילו ייצוגים להשתמש, איזה אובייקטים ופעולות להגדיר, ומה לשאול לגביהן עולות מתוך החוויה האנושית ובעיקר מתוך ***הפרקטיס*** הטכנולוגי. מצד שני, הטיפול המתמטי בשאלות אלו דורש ***בהירות ועקביות*** מחשבתית אשר מצדן מעודדות ***תואם עם עקרונות מתמטיים כלליים*** ועם תורות המתייחסות לתחומים אחרים.

פרנקל יעד את ספרו לבוגרי בית הספר התיכון, אבל נראה לי שכיום גם בוגרי תואר ראשון במדעים (ואפילו במתמטיקה) יכולים לצאת נשכרים ממנו, בעיקר בכל הנוגע לצד הקונספטואלי.

[עודד גולדרייך 2023]

ציטוטים נבחרים

"[הספר] שואף לתת לקוראיו מושג על *מהות* המתמטיקה, בעיותיה ושיטותיה, ולא דווקא על *תוכן* המתמטיקה."

"הגדרה אין משמעותה קביעת עובדה או הבאת ראיה כי אם הכנסת מושג (מונח) באופן שהוא להלכה שרירותי ולמעשה מועיל, דבר היכול להתברר רק אחרי מעשה."

תופעה כללית במתמטיקה היא *שלצורך מענה על שאלות בתחום מסוים יש לפעמים צורך להשתמש בכלים ו/או רעיונות שאינם נמצאים בתחום זה* (אלא נלקחים מתחום אחר).

ה"שפה המתמטית" היא מערכת סימבולית המאפשרת חקירה של הטבע ולמעשה חיונית לחקירה מתקדמת שכזאת. בהקשר זה יש להדגיש את חשיבות התפתחות המתמטיקה כשלעצמה. התפתחות זו יש שהיא נדחפת על ידי צרכים של מדעי הטבע (והחשבון האינפיניטסימלי ותורת האנליזה שצמחה ממנו היא דוגמה מובהקת לכך) ויש שהיא מקדימה את הצרכים (כמו הגאומטריה של רימן ששימשה את איינשטיין בתורת היחסות הכללית).

את המתמטיקה לא צריך לעניין מה מהות הדברים אלא מה הפעולות הנעשות איתם, ובפרט התועלת שיש בפיתוח תורה הנוגעת לפעולות אלו.

מדע ההיסטוריה מסתמך רק על רשומות שנשמרו, ולפיכך הוא מוטה לכיוון של תרבויות אשר התוכנים שלהם נשתמרו. מעבר לשאלה האם תרבויות שונות מייחסות חשיבות שונה לשימור של מורשתם בכתובים, מזדקרת העובדה שהכתובים חשופים לתהליכי השמדה שעוצמתן משתנה לפי המיקום בין אם בשל גורמים אקלימיים או גורמים אחרים.

לגבי תורת המספרים (פרק 3): "לכאורה, מתקבל מאוד על הדעת שמושג המספר, הנוצר בדרך כל כך פשוטה, יהיה ברור ושקוף לשכלנו בכל היקפו: שממלכת המספרים עם כל היחסים והחוקים הקיימים בה, תהא גלויה לעינינו. אלא שאין הדבר כך... אותם המספרים שיצירתם כה פשוטה הינם מלאי חידות בשבילינו."

"... עד כמה פעולותיו הפשוטות של השכל האנושי הן בכל זאת מסובכות ומורכבות, עד כמה הן מכילות צדדים שהשכל ההוגה אינו מרגיש בהם ..."

העניין בפרק 4 אינו היכרות עם המספרים הרציונליים (אשר מוכרים היטב לקוראים) אלא *ביסוס תורת התחום של המספרים האלו בצורה עיונית ומופשטת* שאינה מסתמכת על אנלוגיות (בלתי מבוססות) מעולם התופעות הריאליות.

מפרק 6: הצורך להרחיב את תחום המספרים הרציונליים על מנת לכלול את המספרים האי-רציונליים הנ"ל ברור, אך גם ברור שלא די בכך. עקרון היציבות דורש הרחבה של פעולות החשבון הרגילות (קרי: החיבור והכפל) באופן שתוצריהם יהיו גם הם בתחום החדש.

ביסוס העיוני מן הסוג שהוצג בפרק 7 (וגם בפרק 6) הינו ביסוס בדיעבד. הביסוס הזה מחביא את הדרך שבה הומצאו הרעיונות אשר מבוססים כאן בדיעבד. בדרך כלל, עולים הרעיונות מתוך צרכים פרגמטיים והם אינם נקיים וברורים כל כך בעת לידתם.

מפרק 8: האלגברה המודרנית לא עוסקת בעצמים (כגון מספרים) אלא ביחסים שבין עצמים (כגון פעולות צירוף והאקסיומות החלות עליהן). השקפה זו מטרימה את תוכנו של פרק 5, והיא מקובלת כמעט מובנת מאליה כיום (למרות שלא כך היה המצב לפני כמאה שנה ויותר).

לגבי "החשבון האינפיניטסימלי" (חלק שלישי): למעשה לא נעשה כאן שום שימוש במושג של גודל "קטן (או גדל) לאינסוף" (או "גדלים אינפיניטסימליים"). הגדרת ההתכנסות (והגבול) וההגדרות הנסמכות עליה מנוסחות במונחים של גדלים סופיים, ורק תהליך העיון בהם (כסדרה) הוא אינסופי.

מפרק 11: הסימון Σ בו משתמשים לייצוג טורים הוא סימון בלבד, אך אותו דבר נכון גם לגבי שימוש בסימון זה לסכום סופי. בשני המקרים הסימון מייצג תהליך אשר מגדיר סכום. במקרה הסופי מדובר בתהליך סופי של הפעלת פעולת החיבור, ואילו במקרה האינסופי מדובר בסדרה של תהליכים כאלו. בפרט, המושג של סכום סופי או אינסופי אינו נתון לנו מראש, אלא מוגדר על ידינו באופן מסוים (על בסיס הגדרת החיבור).

לגבי מושג העוצמה (פרק 14): מושג **המספר האינסופי** עורר מראשיתו התנגדויות פילוסופיות ברמות שונות (והשימוש במונח "עוצמה" ביקש להימנע מן הוויכוח הזה), אלא – שכמו שנטען בפרק 7 – השאלה החשובה יותר היא האם הכנסת המושג הזה והתורה אשר נבנתה סביבו הם חסרי סתירות.

ציטוט חוזר מפואנקרה: "המתמטיקאי, בניגוד קיצוני למשורר, מסמן דברים שונים בשם אחד."

הגאומטריה כדיסציפלינה מתמטית אינה חוקרת את המרחב הפיזי הממשי אלא את כל מבני המרחב האפשריים.

ציטוט מראסל: "המתמטיקה היא המדע שבו אינך יודע אף פעם במה אתה דן ואינך בטוח לעולם אם נכונות טענותיך." (האמירה הראשונה מתייחס למופשטות הדיון המתמטי אשר אינו מתייחס לשום תוכן "ריאלי"/"ממשי" ואילו האמירה השנייה מתייחסת לאי-היכיחות של חוסר הסתירה של מערכת פורמלית רחבה מספיק. לדעתי, אין להשתמש באמירות אלו ללא הקשרן או הסברן.)

תודות

אני אסיר תודה לבועז קלרטג ראשית על שהפנה את תשומת ליבי לספרו של פרנקל (וגם העמיד לרשותי עותק של ספר זה). בנוסף לכך, נעזרתי רבות בשיחות עם בועז, הן לצורך ליבון ודיון בתכנים קונספטואליים והן לצורך בירור של פרטים טכניים.

חלק ראשון: מספרים טבעיים

בניגוד להשקפות של דורות קודמים, הדעה כיום הינה שהמספרים הטבעיים אינם הבסיס של המתמטיקה, אלא מצריכים – כשלעצמם – דיון מקדים במושגים כגון קבוצות, יחסים, לוגיקה ועוד. למרות זאת, נראה שיש הצדקה פדגוגית ללכת בדרך הקלסית, אשר פותחת במספרים הממשיים, למרות שבמהלכה נתקל כמעט מיד בשאלות עמוקות על יסודות המתמטיקה. יתר על כן, ספק רב אם אפשר להבין באמת את מהות השאלות היסודיות האלו אם לא מניחים ידע מוקדם של חומר מתמטי שהועבר ללא ביסוס יסודי כזה. במילים אחרות, לפעמים מועיל לעקוב אחר ההתפתחות (האבולוציה) של מקצוע (או תחום) ולא לפתוח בתיאורו מנקודת המבט של הבנתו הנוכחית.

פרק ראשון: מספרים מונים

העניין בפרק זה אינו החומר הטכני אשר מוצג בו, שהרי חומר זה ידוע היטב לקוראים, אלא הפרספקטיבה שממנה החומר הזה מוצג.

סעיף 1.1: שיטת הפוזיציה

נראה שהדיון בנושא זה מתאים יותר לתלמידים ברמה נמוכה יותר, אלא שגם הדיון הזה חושף את המורכבות של דברים שאנו לוקחים כמובנים מאליהם.

המתמטיקה הטהורה יכולה אמנם להסתדר היטב ללא הצגה של מספרים גדולים כסדרות של מספרים קטנים (קרי: שיטת הפוזיציה), אלא שהפרקטיס האנושי התקשה והיה מתקשה מאוד להסתדר בלי קונוונציה זו. יש להדגיש שקושי פרקטי כזה אינו בלתי רלוונטי למתמטיקה הטהורה אשר צומחת בפועל מתוך הקיום האנושי ונעזרת בהרגלים אשר נרכשים בפרקטיקות שלו.

מעניין גם לתת את הדעת על הבחירה בעשר כבסיס לשיטת הפוזיציה (לנוכח העובדה שניתן היה להשתמש בכל מספר טבעי הגדול מ1). קל להצביע על הרצון לאזן בין מספר קטן של סמלים המשמשים לציון של ספרות בודדות לבין אורך המספרים השלמים המיוצגים על ידי סמלים אלו. אולם מדוע מושג איזון זה ב10 ולא ב8 או 12 או 20? נראה שהסיבה המכרעת היא העובדה שלאדם יש 10 אצבעות ידיים. עוד שתי נקודות שכדאי לתת עליהן את הדעת הינן:

1. השימוש בשיטת הפוזיציה מחייב שימוש בספרה אפס, ולפיכך במושג האפס.
   נראה שהפרקטיס של שימוש בשיטה זו תרם לקבלת (קרי: לגיטימציה של) מושג האפס כמספר הנוסף על המספרים הטבעיים.
2. השימוש בסמלים שונים לספרות ולאותיות משחרר את האחרונות לציון של משתנים.
   גם כאן נראה שקונוונציה שמקורה בפרקטיס תרמה להתפתחות המתמטיקה הטהורה.

סעיף 1.2: מושג המספר המונה (הקרדינלי)

המספר המונה מוצג כעונה על השאלה כמה איברים יש בקבוצה (סופית). שאלה זו מוצגת בהתחלה כמתייחסת לאיברים מאותו "סוג", אלא שהמושג מוכלל כמתייחס לכל קבוצה, ולמושג ההתאמה החד-חד-ערכית בין קבוצות (שאינן בהכרח סופיות). יוצא מכך שהגדרת המספר המונה מניחה את מושג הקבוצה וכן את "תורת" היחסים (רלציות) המוגדרים על זוגות של קבוצות.

בחשבון אחרון מוגדר המספר המונה כמחלקת כל הקבוצות שוות הגודל (קרי: המותאמות חד-חד-ערכית אחת לשנייה), וניתן גם לומר שהוא מיוצג על ידי קבוצת כל המספרים המונים הקטנים ממנו כולל אפס. האמירה האחרונה מצביעה על **קבוצה אוניברסלית** המייצגת את המספר המונה. אכן, אוסף הקבוצות האוניברסליות מתחיל בקבוצה הריקה, והקבוצה הבאה באוסף מוגדרת כקבוצת כל הקבוצות הקודמות.

סעיף 1.3: סידור המספרים על פי גודלם

להגדרת סדר בין המספרים המונים נשתמש ביחס סדר (על קבוצות): יחס שאיננו רפלקסיבי והינו אנטי-סימטרי (וגם טרנזיטיבי). היחס המדובר הוא (כמובן) היות קבוצה אחת חלקית-ממש לקבוצה שניה. יחס זה מוכלל כך שמספר מונה אחד קטן ממשנהו אם המספרים הללו מיוצגים על ידי קבוצות הנמצאות ביחס ההכלה-ממש. יודגש, כי בניגוד לתוכן של הסעיף הקודם (קרי: מושג השוויון שנעשה בו שימוש בסעיף 1.2 (אשר תקף גם לגבי קבוצות אינסופיות)), הרי שתוכן הסעיף הנוכחי מתייחס רק לקבוצות סופיות (קרי: יחס הסדר שנעשה בו שימוש כאן הינו אנטי-סימטרי רק עבור קבוצות סופיות).

פרק שני: מספרים סודרים

גם כאן נצא משאלה פשוטה והיא שאלת הסדר שבין איברי קבוצה נתונה. המסלול שנלך בו יהיה הפוך לזה של הפרק הקודם: ניפתח במושג של מספר עוקב, ונציג אקסיומות אשר בהתייחסן למושג זה מגדירות את המספרים הסודרים. לאחר מכן, נגדיר את פעולות החיבור והכפל לגבי המספרים הללו. לבסוף נדון בשאלת הקשר בין המספרים שהוגדרו בפרק זה לבין אלו שהוגדרו בפרק הקודם, ונראה ששני מושגים טבעיים אלו של מספר אינם מתלכדים, אלא במקרה מסוים (וטבעי) מאוד.

סעיף 2.1: האקסיומות של פיאנו

בניגוד לפרק הקודם שפתח בפרקטיס המוחשי וביצע הפשטה עיונית שלו, בפרק הנוכחי נפתח בעיון טהור שיפתח במושג מופשט של **עוקב**. מושג זה מעוגן אף הוא בפרקטיס, אבל ההפשטה לא תתייחס לעיגון זה (ולא תהייה מחויבת אליו, כפי שנראה במפורש בסעיף 2.3). האקסיומות הבאות מגדירות את **המספרים הסודרים** ביחס למושג מופשט של מספר **עוקב** אשר מקבל את תוכנו באקסיומות אלו (ובפרט בראשונה ובשלישית).

1. לכל מספר סודר יש מספר סודר אחד ויחיד אשר עוקב לו. (חד-ערכיות)
2. ישנו מספר סודר שאינו עוקב לשום מספר סודר אחר. (איבר היחידה)
3. שוויון בין העוקבים של זוג מספרים סודרים גורר שוויון של הסודרים עצמם. (חח"ע)
4. אין מספרים סודרים מלבד אלו הנדרשים מהאקסיומות הקודמות. במילים אחרות, סדרת המספרים הסודרים היא הסדרה המינימלית אשר מקיימת את האקסיומות 1-3.

האקסיומה האחרונה קרויה עקרון **האינדוקציה השלמה** משום שהיא מבטיחה שטענה המוכחת באינדוקציה (הפותחת באיבר היחידה) חלה על כל המספרים הסודרים. האקסיומה השלישית מתייחסת למושג ה**שוויון** (אשר מובן שוב כיחס שקילות החל על התחום).

(במונחים של תורת הגרפים מוגדר כאן מסלול מכוון אינסופי יחיד היוצא מצומת התחלה: בפרט, האקסיומה הראשונה אומרת שמכל צומת יוצאת קשת מכוונת בודדת, האקסיומה השנייה אומרת שיש צומת ("צומת התחלה") שאין אליו קשת מכוונת נכנסת, והשלישית אומרת שלכל צומת נכנסת לכל היותר קשת מכוונת אחת. במשולב, שלושת האקסיומות האלו מגדירות אוסף של מסלולים מכוונים אינסופיים ומעגלים מכוונים (חלקם סופיים וחלקם אינסופיים) כך שהאוסף מכיל לפחות מסלול אחד עם צומת התחלה. האקסיומה הרביעית אומרת שהאוסף הינו למעשה מסלול יחיד (מכוון ואינסופי עם צומת התחלה).)

סעיף 2.2: האקסיומות של פיאנו אינן תלויות זו בזו

בסעיף זה יש ערך הן כשלעצמו והן כהדגמה של העיקרון המתמטי אשר שואף לבהירות, מובחנות ואי-יתירות של הגדרות וטיעונים. בנוסף לכך, ההוכחות (במקרה זה של אי-תלות) מבהירות את ההגדרה על ידי הצבעה על מה שעלול היה לקרות לו לא דרשנו אחת מן הדרישות (אקסיומות).

(מעקרון האינדוקציה השלמה ניתן להוכיח כי העוקב של מספר שונה ממנו, וכן כי קיים מספר יחיד אשר מקיים את התנאי שבאקסיומה השנייה (קרי: אינו עוקב של שום מספר אחר). יתר על כן, לכל מספר סדור אחר יש מספר אחד ויחיד שקודם לו (קרי: "פונקציית העוקב" הינה חד-חד-ערכית)).

סעיף 2.3: חיבור וכפל בין מספרים סודרים ושימוש באינדוקציה השלמה

כמובטח לעיל, שתי פעולות החשבון הרגילות (קרי: חיבור וכפל) מוגדרות על ידי שימוש במושג העוקב, ותכונותיהן (קרי: החוקים הפורמליים של חיבור וכפל) מוכחות על ידי שימוש באקסיומות (ובפרט בעיקרון האינדוקציה השלמה), ובהן בלבד. אם נסמן את העוקב של המספר a על ידי S(a), ואת איבר היחידה ב1, הרי ש**חיבור** יוגדר על ידי שתי התכונות הבאות

$$a+1 = S(a)$$

$$a+S(b) = S(a+b)$$

מהנ"ל ניתן לחלץ את ערך החיבור של a+b (לכל זוג מספרים) וכן להוכיח את החוקים הבאים

- Associativity: (a+b)+c = a+(b+c)
- Commutativity: a+b = b+a

באופן דומה יוגדר ה**כפל** על ידי התכונות (האנלוגיות)

$$a*1 = a$$

$$a*S(b) = a*b+a$$

ועל סמך הגדרה זו ניתן לחלץ את ערך המכפלה של a*b (לכל זוג מספרים) ולהוכיח את החוקים האסוציאטיבי והקומוטטיבי של הכפל. התכונה השנייה היא מקרה פרטי של החוק הדיסטריבוטיבי המקשר את הכפל עם החיבור, ובאמצעותה ניתן להוכיח את החוק הדיסטריבוטיבי הכללי (אשר מתייחס לכל שלישיה של מספרים).

ראוי להדגיש כי התכונות שבאמצעותם הוגדרו פעולות החיבור והכפל קובעות (אקסיומטית) שוויון בין שני הצדדים של המשוואות. לדוגמה, a+1=S(a) קובע כי חיבור של יחידה למספר a הוא מספר השווה לעוקב של a.

סעיף 2.4: הקשר בין המספרים המונים למספרים הסודרים

למרות הנטייה הנפוצה לזהות בין המספרים המונים למספרים הסודרים, הרי שזיהוי כזה דורש שימוש במושג עוקב מסוים ואינו תקף למושג הכללי של עוקב כפי שנעשה בו שימוש בפרק זה. במילים אחרות, הסדר של מספרים מונים אשר הוגדר בסעיף 1.3 אינו מתלכד בהכרח עם סדר כלשהו המוגדר ע"י מושג של עוקב. אם נעמיק קצת במחשבה על עניין זה, נראה שאין הוא צריך להפתיע אותנו, משום שהסדר אשר הוגדר בסעיף 1.3 מבוסס על סדר מסוים של קבוצות ואילו הסדר העולה ממושג העוקב אינו קשור לשום דבר אחר (קרי: הוא שרירותי לחלוטין). שורש הדבר הוא בכך שהמספרים המונים מתייחסים לתכונה של קבוצות (ז"א הם בעלי מובן מסוים) ואילו המספרים הסודרים הם סימנים "ריקים" (קרי: הם חסרי כל מובן כשלעצמם).

כמובן ששימוש במושג עוקב אשר משקף תוכן מסוים של הסימנים (קרי: ייצוג על ידי קבוצה מינימלית אשר מכילה ממש את הקבוצה המיוצגת על ידי הסימן הקודם) מביא להתלכדות של הסדר המוגדר על ידו עם הסידור של המספרים המונים.

ראוי לציין שהעיון המופשט מבחין בין שני מושגים של "מספר טבעי" אשר מתלכדים בפרקטיס האנושי. נראה שהסיבה להתלכדות המושגים בפרקטיס הינה העובדה שהסדר של מספרים מונים שהוגדר בסעיף 1.3 עולה באופן טבעי מהשימושים של המניה (קרי: להשוואת גודל קבוצות) וגם מתחזק מהעובדה שייצוג טבעי של קבוצות הוא על ידי סדרות (דבר המקשר אותן עם מושג העוקב).

פרק שלישי: תורת המספרים

"לכאורה, מתקבל מאוד על הדעת שמושג המספר, הנוצר בדרך כל כך פשוטה, יהיה ברור ושקוף לשכלנו בכל היקפו: שממלכת המספרים עם כל היחסים והחוקים הקיימים בה, תהא גלויה לעינינו. אלא שאין הדבר כך... אותם המספרים שיצירתם כה פשוטה הינם מלאי חידות בשבילינו."

סעיף 3.1: המספרים הראשוניים ופילוגם

הגדרת החיבור והכפל מעלה את השאלה של יצוג כל אחד מן המספרים כסכום או כפל של מספרים "בסיסיים" יותר. שאלה זו טריוויאלית במקרה של חיבור (שם יש יחידה "בסיסית" אחת שהיא 1), אך עשירה במקרה של כפל (שם היחידות ה"בסיסיות" הן המספרים הראשוניים). במקרה השני (קרי: של הכפל) עולה השאלה של ***יחידות הייצוג של מספרים טבעיים כמכפלה של מספרים ראשוניים*** ושאלת **צפיפותם של המספרים הראשוניים** בין כל המספרים הטבעיים. בעוד שהשאלה הראשונה היא קלה (למרות שפירוק יחיד לגורמים בסיסיים אינו תופעה אוניברסלית (ז"א אינו תקף בתחומים אחרים של המתמטיקה)), הרי שהשאלה השנייה מובילה לאוסף של שאלות שעל רבות מהן לא ידועה תשובה עדיין.

קל להוכיח קיום של אינסוף מספרים ראשוניים (רמז: בדרך השלילה, על ידי ניסיון לאפיין את המספר P+1 כאשר P היא מכפלת כל המספרים הראשוניים). הוכחה זו תקפה גם לגבי סדרת המספרים האי-זוגיים ועולה השאלה האם היא מתקיימת לגבי כל סדרה חשבונית (מהצורה AX+B), למעט במקרים הפסולים באופן טריוויאלי (קרי: כאשר לA ולB יש מחלק משותף לא טריוויאלי). למרות שתשובה חיובית נחשבה "מובנית מאליה" הדבר הוכח רק בשנת 1837 תוך שימוש בשיטות שמחוץ לתורת המספרים (קרי: אנליזה, שמצידה מבוססת על מספרים מרוכבים (ראו פרק 7)). עניין עדין יותר הוא השימוש של ההוכחה הזו ב"עקרון שובך היונים" (קרי: הכנסת יותר מN עצמים לN תאים מחייבת לשים שני עצמים באותו תא), אשר מבוסס על אופיים של המספרים הטבעיים כמספרים מונים (ראו סעיף 2.4).

כאן מזדקרת (בפעם הראשונה בספר) תופעה כללית במתמטיקה: *לצורך מענה על שאלות בתחום מסוים יש לפעמים צורך להשתמש בכלים ו/או רעיונות שאינם נמצאים בתחום זה* (אלא נלקחים מתחום אחר).

בחזרה לשאלת הצפיפות של מספרים ראשוניים, עצם קיומם בין כל N ל2N הוכח רק בשנת 1852, ואילו היום ידוע קיומם בין כל N לבין N+f(N), כאשר f(N) היא N בחזקת 11/20, אלא שההשערה היא שמספיק שf(N) תהא פולי-לוגריתמית בN (והשערה שמרנית יותר גורסת שניתן להסתפק בf(N) שהיא שורש ריבועי של N). מצד שני, ברור שf(N) צריכה להיות לפחות כמעט-לוגריתמית (רמז: אם N הוא מן הצורה M!+1, אז M-1 המספרים הבאים אחריו אינם ראשוניים).

אם נחזור לאינטרוול [N,2N], הרי שידוע שבאינטרוול כזה ישנם הרבה מספרים ראשוניים: מספרם הוא בסדר גודל של N/(log N). במילים אחרות, רוב האינטרוולים מהצורה [N,N+O(log N)] מכילים מספר ראשוני (ולא יותר מאשר מספר קבוע של מספרים ראשוניים).

בעוד ששאלת הצפיפות מתייחסת למרחק המקסימלי בין מספרים ראשוניים, שאלת הראשוניים **התאומים** מתייחסת למרחק המינימלי (קרי: שתיים) ושואלת האם מספרם של התאומים אינסופי?

(מוזכרת גם **השערת גולדברג** על פיה כל מספר זוגי ניתן לייצוג כסכום של שני מספרים ראשוניים.)

סעיף 3.2: על מספרים ראשוניים מן הצורה 2^m+1

תנאי הכרחי להיות מספר מצורה זאת ראשוני הוא שהמעריך (קרי: m) יהיה חזקה של 2. חמשת המספרים הראשונים מן הצורה הזאת (המתאימים לערכים m=1,2,4,8,16) הם אמנם ראשוניים

(דהיינו 3, 5, 17, 257, 65537), אלא שלא ידוע שום מספר ראשוני נוסף מצורה זו (ה"כשלון של m=32 היה ידוע כבר בשנת 1732, ובסוף המאה ה19 ותחילת ה20 נפסלו גם כעשרה מספרים נוספים). מספרים ראשוניים P מסוג זה מאפשרים לחלק את המעגל לP חלקים שווים על ידי שימוש בסרגל ומחוגה בלבד.

(לטעמי כל השאלות הללו הינן אזוטריות, אלא שלזכותן עומדת העובדה שהן הובילו לפיתוח שיטות מתמטיות מעניינות. דברים דומים תקפים גם לגבי המשפט הגדול של פרמה.)

סעיף 3.3: המשפט הקטן והמשפט הגדול של פרמה

המשפט הקטן של פרמה קובע תנאי הכרחי להיות מספר ראשוני: *אם P ראשוני אז לכל מספר טבעי A מתקיים כי A^P-A מתחלק בP.* (הצורה המועדפת עלינו מתייחסת למקרה בו A זר לP (ז"א אין להם מחלק משותף) וטוענת כי במקרה זה A^{P-1}-1 מתחלק בP). נוח לנסח את הנ"ל שימוש במושג של קונגרואנציה מודולו P (ראו הגדרה בהמשך): במקרה כזה, נאמר כי *אם P ראשוני אז לכל מספר A בקבוצה* {0,1,…,P-1} *המספר A^P קונגרואנטי למספר A מודולו P.* (בנוסף, ניתן לראות כי כאשר P הינו ראשוני, ה"חבורה הכפלית מודולו P" מכילה P-1 איברים.)

תנאי מספיק והכרחי להיות מספר ראשוני ניתן ע"י **משפט וילסון** הקובע כי *P הינו ראשוני אם ורק אם מתקיים כי 1+!(P-1) מתחלק בP.* הכרחיות התנאי (המוצג על ראשוניות P) הינה מיידית ואילו את המספיקות אפשר להוכיח על ידי האבחנה כי ניתן לחלק את השלמים שבין 2 לבין P-2 לזוגות שמכפלתם קונגרואנטית ל1 מודולו P (ואילו המכפלה 1*(P-1) הינה קונגרואנטית ל-1 מודולו P).

אכן, מושג ה**קונגרואציה** וקצת ידע בתורת החבורות מפשטים את הצגת המשפטים הנ"ל והוכחתם. נאמר שA קונגרואנטי לB מודולו M אם שארית החלוקה של A ושל B בM הינה שווה. הקונרואנציה מודולו M היא אכן יחס שקילות על המספרים הטבעיים (וגם השלמים) וגם משמרת את פעולות החיבור והכפל (קרי: A+B קונגרואנטי מודולו M ל (A mod M)+(B mod M) וכך גם ביחס לכפל).

(העובדה שקונגרואנציה מודולו מספר קבוע משמרת את תוצאות החיבור והכפל היא בסיס להיוריסטיקה של בדיקת חשבונות אריתמטיים על ידי חזרה עליהם מודולו 9, כאשר היתרון של 9 הוא שסכום הספרות של מספר בייצוג עשרוני קונגרואנטי מודולו 9 למספר עצמו (משום ש10 קונגרואנטי ל1 מודולו 9))

המשפט הגדול של פרמה שהוכח מאות שנים לאחר מותו קובע כי עבור שלם N הגדול מ2, אין למשוואה הבאה פתרון בשלמים

$$X^N + Y^N = Z^N$$

וזאת (כמובן) בניגוד למקרה של N=2.

סעיף 3.4: מספרים משוכללים ורעים

(העניין בנושא זה, מעבר לתרומתו לפיתוח שיטות מתמטיות, הוא שכאן עולה שוב (ובאופן דרמטי יותר מאשר במקרה של סעיף 3.2) התופעה של קיום מספרים גדולים מאוד אשר מקיימים תכונה מסוימת בצד אי-הידיעה ביחס לקיום מספרים אחרים כאלו. במילים אחרות, כאן מודגמת שוב חוסר התוחלת של עדויות אמפיריות לגבי ידע מתמטי כללי.)

מספר **משוכלל** הוא מספר שסכום מחלקיו (כולל 1) שווה לגודלו. הדוגמאות הראשונות הן

$$1+2+3=6 \qquad 1+2+4+7+14=28$$

ושתי דוגמאות נוספות היו ידועות כבר לקדמונים (ואילו החמישית היא בת 8 ספרות עשרוניות). כיום ידועים כמה עשרות מספרים משוכללים אך לא ידועים מספרים משוכללים אי-זוגיים. *לגבי מספרים משוכללים זוגיים* ידוע (וההוכחה מובאת בספר) כי *הם זהים למספרים מן הצורה*

$$2^{N-1} * (2^N-1)$$

*כאשר הגורם השני הוא מספר ראשוני, הקרוי מספר **מרסן***. במילים אחרות, החיפוש אחר מספרים משוכללים (זוגיים) הוא החיפוש אחר מספרי מרסן (וחמשת המספרים שהוזכרו לעיל מתאימים לערכי N=2,3,5,7,13). מסתבר כי המספר 2^N-1 יכול להיות ראשוני רק אם N עצמו הינו ראשוני, אלא שתנאי הכרחי זה אינו מספיק (בפרט: N=11 הוא המקרה הראשון בו התנאי לא מספיק (ז"א:2047 אינו ראשוני)).

(זוגות **רעים** (הכוונה לידידים) של מספרים הם זוגות שסכום מחלקי האחד שווה לשני, ולהיפך. הזוג הקטן ביותר הינו (220,284), וכיום ידועים למעלה ממיליון זוגות.)

סעיף 3.5: מספרים אלגבריים ואידאלים

בפרק 8 יובא דיון מורחב יותר ב**מספרים האלגבריים** אשר מוגדרים בסעיף הנוכחי כפתרונות של משוואות אלגבריות עם מקדמים שלמים (או: שורשים של פולינום בעלי מקדמים שלמים). בסעיף הנוכחי מסופר על הצגתם במסגרת ניסיון להוכחת המשפט הגדול של פרמה ועל התופעה הבלתי צפויה שהתגלתה בהקשר זה. בפרט, מספרים אלו (קרי: האלגבריים) אינם מקיימים את המשפט הבסיסי של תורת המספרים הגורס *פירוק יחיד* של כל מספר לגורמים ראשוניים, כאשר מספר בתחום מסוים נקרא ראשוני אם אין לו מחלקים לא טריוויאליים בתחום. לדוגמה, בתחום המוגדר על ידי מספרים מהסוג a+b*sqrt(-6) כאשר a,b הם מספרים שלמים, למספר 6 יש שני פירוקים שונים למספרים ראשוניים:

$$2 * 3 = (-\mathrm{sqrt}(-6)) * \mathrm{sqrt}(-6)$$

הפתרון שהוצע הוא להרחיב את תחום המספרים על ידי צירוף "**מספרים אידאליים**" אשר מאפשרים פירוק יחיד של המספרים האלגבריים, כל זאת כאשר הפעולות שהוגדרו בתחום המקורי מורחבות באופן תואם לתחום המורחב.

העקרונות הבסיסיים אשר הודגמו כאן הם: ההכרח בהרחבה על מנת לפתור בעיה (עניין בו כבר נתקלנו), ביצוע ההרחבה באופן ששומר על תכונות המערכת המקורית, וההצדקה של ההרחבה על ידי התועלת שבה (קרי: גישה פרגמטית). עקרונות אלו יומחשו היטב בפרק הבא.

בסיום הפרק טוען פרנקל לחוסר הצדקה עקרוני לכישלון האנושי לפתור בעיות העולות מתוך מודל עיוני פרי רוחנו, אלא שבדומה להוגי דעות אחרים הוא מתעלם משאלת הסיבוכיות (קרי: מיכולתנו להציג בקלות יחסית בעיות אשר קשה לפתור אותן). ואולי בכל זאת פרנקל חש בכך כאשר הוא כותב "... עד כמה פעולותיו הפשוטות של השכל האנושי הן בכל זאת מסובכות ומורכבות, עד כמה הן מכילות צדדים שהשכל ההוגה אינו מרגיש בהם ..." אלא שנראה לי שהוא מתיר את החידה ללא פתרון: הוא מדבר על פשוטות ומורכבות כמצויות בכפיפה אחת ואפילו רומז ללא-מודע.

בניגוד לכך, אני טוען שפעולת הבניה של תורות (קרי: בחירת הגדרות) אינה מתקיימת בו זמנית עם פתרון הבעיות העולות מתורות אלו, שניסוח פשוט של בעיה אינו מבטיח ניסוח פשוט של פתרון, קל וחומר מציאתו, שפער הזמן בין ניסוח הבעיה לפתרונה משקף את פער הסיבוכיות (או המורכבות) שבין הבעיה לפתרונה, ושפער זה הינו מהותי ועקרוני (ולא רק אמפירי). מיותר לציין שהשקפתי הנ"ל מושפעת באופן מכריע מן העיסוק שלי בתורת הסיבוכיות החישובית.

(למי שמכירים קצת את תורת הסיבוכיות החישובית, אעיר כי הפער העיוני הנ"ל (שבין פשטות הניסוח של בעיות מסוימות לבין הקושי בפתרונן) הינו אנלוגי לפער שבין מחלקות הסיבוכיות P וNP. כמובן, אדגיש כי אינני טוען ליותר מאשר אנלוגיה קונספטואלית.)

חלק שני: הרחבת מושג המספר ואלגברה

בחלק זה נעסוק בהרחבת מושג המספר, תחילה למספרים הרציונליים (פרק 4) ואחר כך למספרים הממשיים (פרק 6) ולמספרים המרוכבים (פרק 7). הפרקים האלגבריים (פרק 5 ופרק 8) נותנים פרספקטיבה רחבה ומופשטת יותר על התהליך הנעשה בפרקים האחרים.

פרק רביעי: שברים רגילים ומספרים שליליים

התוכן הקונקרטי של פרק זה מוכר לכולם, אבל עדיין טוב לקרוא בו בעיון כדי לראות את המהלך של הרחבה ועקרונותיה דווקא במקרים פשוטים ומוכרים (קרי: ממספרים טבעיים למספרים רציונליים). כפי שנרמז בדברי הפתיחה, ההרחבות יוצגו בסדר היסטורי ואבולוציוני אשר שונה מן הסדר ההגיוני כפי שהוא נראה לנו היום: מנקודת מבטינו, השלמים קרובים יותר לטבעיים, והחיבור פשוט יותר מן הכפל; אלא, שמנקודת המבט של (ההיסטורית של) הפרקטיס האנושי, פעולת החלוקה (בשלמים חיוביים) בעייתית פחות מחיסור המוביל לתוצאה שלילית. (אני משער כי הלגיטימציה למספרים השליליים גדלה עם התפשטות הפרקטיקה של ניהול ספרי חשבונות בנקאיים ובפרט עם הופעת האשראי הבנקאי.)

סעיף 4.1: השברים החיוביים

במהלך העיוני, נצא מהניסוח המפורש של חוקי הכפל, כפעולת צירוף של שני עצמים בתחום, צירוף אשר קובע תוצר (בתחום) באופן חד-ערכי (ז"א A וB קובע את A*B). פעולת הצירוף היא אסוציאטיבית, קומוטטיבית, ויש איבר ניטרלי לגביה. בנוסף לכך, נדרוש כי A*B=A*C גורר B=C. הצגת יחס השוויון באופן מפורש מעלה את השאלה האם היחס C=A*B קובע את A (או את B) כאשר נתונים שני האחרים.

על מנת לאפשר תשובה חיובית תמיד (או "כמעט כך") אנו מרחיבים את התחום. ההרחבה כוללת הכנסת עצמים חדשים, הרחבת פעולת הצירוף לתחום המורחב, ושמירת תוקפם של החוקים הקיימים ("עד כמה שאפשר"). למעשה הייצוג של כל העצמים ישתנה, אבל תהא התאמה (איזומורפיזם) בין התחום המקורי לבין הייצוגים החדשים של העצמים המקוריים.

הייצוג שנבחר בו למקרה זה (של שברים חיוביים) הוא של זוגות (של מספרים טבעיים), אלא שנכתוב אותם כזוגות ולא כשברים כפי שנהוג. הייצוג הזה ידרוש להגדיר שוויון גם בין זוגות שלא זהים. הגדרת שוויון זה (והרחבת פעולת הכפל) תקיים:

1. (a,b) = (a’,b’) holds if and only if a * b’ = a’ * b (over the natural numbers).
2. (a,b) * (a’,b’) = (a * a’, b * b’)   (ditto).

(אכן, התנאים הללו ברורים יותר בכתיב השברים הרגיל, אלא שאנחנו מנסים להימנע ממראית עין כאילו אנו מסתמכים על היכרות עם פעולת החילוק הרגילה (אשר ידועה לנו משכבר).)

נדגיש כי המספרים המקוריים (קרי: המספרים הטבעיים) מוצגים כעת באופן שונה מאשר קודם, וכי לכל מספר בתחום החדש יש אינסוף ייצוגיים אפשריים (שביניהם מתקיים שוויון). נדגיש כי פעולת הכפל שהוגדרה משמרת שוויון בין ייצוגים (ז"א הפעלתה על שני זוגות אשר מייצגים את אותם שני מספרים בתחום החדש נותנת כתוצר ייצוגים של אותו מספר). נוכל להשתמש בייצוג "קנוני" בו האיבר השני קטן עד כמה שאפשר (ז"א אין לו מחלק משותף עם הראשון), כך שהייצוג של המספרים השלמים יהי עם איבר שני שהינו 1 (ואכן מתקיים (a,1)*(a’,1)=(a*a’,1)).

(אפשר גם להגדיר חיבור עבור המספרים החדשים, וניתן לסמוך על הקוראים שיעשו זאת כהלכה.)

סעיף 4.2: המספרים השליליים

כאן הבעיה היא עם פעולת החיבור והיא תיפתר על ידי הרחבה שונה של תחום המספרים הטבעיים. גם כאו נשתמש בייצוג ע"י זוגות, אלא ששיווין ופעולות החשבון יוגדרו באופן שונה. בפרט:

1. (a,b) = (a',b') holds if and only if a + b' = a' + b (over the natural numbers).
2. (a,b) + (a',b') = (a + a', b + b') (ditto).

הערות אנלוגיות לאלו שהופיעו בסעיף 4.1 תקפות גם כאן. שתי ההרחבות ישולבו בסעיף הבא (שיעסוק בהרחבת המספרים הטבעיים למספרים רציונליים).

סעיף 4.3: שדה המספרים הרציונליים

בסעיף זה משולבות שתי ההרחבות. למעשה אנו מניחים כבר את ההרחבה של המספרים הטבעיים למספרים השלמים (כפי שבוצעה בסעיף 4.2) וחוזרים על המהלך של סעיף 4.1 (קרי: מבצעים אותו עבור המספרים השלמים במקום עבור המספרים הטבעיים), אלא שכאן אנחנו מוותרים או מאבדים קצת (קרי: אנו לא מתירים זוגות שבהם האיבר השני הוא 0, ומוותרים על קיום הופכי כפלי של 0).

סעיף זה פותח בהרחבת פעולת הכפל מתחום הטבעיים לתחום השלמים תוך שמירה על התכונות התקפות בתחום המקורי (קרי: עקרון היציבות מוכל על התוכן של סעיף 2.3). דבר זה מחייב להגדיר את תוצאת הכפל ב0 כ0. כמו כן, יש להגדיר חיבור של שברים חיוביים (משימה שהטלנו על הקוראים בסוף סעיף 4.1). מכאן גם עולה ההצדקה לאי-הגדרת הופכי כפלי ל0 (כרע במיעוטו), מה שמוביל להגדרות הבאות

1. מספר **רציונלי** מיוצג על ידי זוג של מספרים שלמים שאיברו השני אינו אפס.
2. **שוויון** בין ייצוגים מתקיים כמו בסעיף 4.1 (ראו תנאי 1 שם).
3. **חיבור** מקיים (a,b) + (a',b') = (a * b' + a' * b, b * b')
4. **כפל** מוגדר כמו בסעיף 4.1 (ראו תנאי 2 שם).

על בסיס הגדרות אלו (והגדרות חיבור וכפל בשלמים כפי שהוגדרו בסעיף 2.3) ניתן להראות כי התחום שהוגדר (קרי: המספרים הרציונליים עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל) הינו שדה (כפי שיוגדר בסעיף 5.4); בפרט מתקיימות התכונות הבאות:

1. פעולות הצירוף (חיבור וכפל) אשר הוגדרו ביחס לייצוגים הנ"ל אינם תלויים בייצוגים עצמם (ז"א הפעלתם על ייצוגים שווים נותנת תוצרים שווים).
2. פעולות הצירוף ניתנות להפיכה (פרט להפיכה של כפל באפס). במילים אחרות, יש איברים ניטרליים לחיבור וכפל (אפס ואחד, בהתאמה) ואיברים הופכיים ביחס לחיבור ולכפל (מלבד היוצא מן הכלל הנ"ל).
3. החיבור והכפל הינם אסוציאטיביים וקומוטטיביים.
4. החוק הדיסטריבוטיבי חל על הפעולות הנ"ל.
5. מכפלת שני מספרים רציונליים שווה לאפס אם ורק אם לפחות אחד הגורמים שווה לאפס.

מודגש שתחום המספרים הרציונליים מרחיב את תחום המספרים השלמים במובן שהוא כולל תת-תחום אשר איזומורפי (ביחס לחיבור ולכפל) לתחום המקורי. תת-תחום זה מיוצג ע"י זוגות שהאיבר השני בהם הוא אחד. ייצוג קנוני (או "מצומצם") של כל הרציונליים ניתן על ידי זוגות של מספרים שאין להם מחנה משותף ושהמספר השני בהם הינו חיובי, וקל להראות כי ייצוג זה הינו יחיד.

בנוסף לנ"ל נוכל להגדיר את פעולת ה**חיסור** (וה**חילוק**, בהתאמה) כחיבור של הופכי חיבורי (ומכפלה בהופכי כפלי, בהתאמה). לבסוף, ניתן להגדיר יחס **סדר** על המספרים הרציונליים באופן המרחיב את הסדר שהוגדר על המספרים הטבעיים בסעיף 1.3: נאמר שמספר אחד קטן ממשנהו אם הפרשם (ז"א חיסור השני מן הראשון) הינו מספר שלילי.

כפי שנאמר בפתיחת הפרק, העניין בפרק זה אינו היכרות עם המספרים הרציונליים (אשר מוכרים היטב לקוראים) אלא *ביסוס תורת התחום של המספרים האלו בצורה עיונית ומופשטת* שאינה

מסתמכת על אנלוגיות (בלתי מבוססות) מעולם התופעות הריאליות. בפרט, יחסים כגון $(-a)*(-b)=$ $a*b$ נגזרים כאן מהכרחיות של הפיתוח העיוני, אשר מבוסס על עקרונות יסוד כגון הרחבה ויציבות.

פרק חמישי: חבורות ושדות

למרות שהפרקים הקודמים עסקו במספרים הטבעיים ובהרחבות שלהם, הרי שבמקומות רבים הופיעו מושגים אשר יש להם תכולה רחבה יותר. הכוונה בפרט היא למושג השוויון, ולתכונות כגון אסוציאטיביות וקומוטטיביות של פעולות צירוף. פה ושם היה אפילו נוח להתייחס במפורש למושגים כגון חבורה כפלית והימנעות מכך אכן מסבכת את ההצגה. אכן, תהליך ההפשטה והעיון מוביל אותנו באופן טבעי לתורות העוסקות בעצמים עיוניים/מופשטים כלשהם.

סעיף 5.1: מושג החבורה

נקודת הפתיחה היא **קבוצה** S שבה מוגדר יחס **שוויון** (שהוא כזכור יחס שקילות (קרי: רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי)) ולגביה מוגדרת **פעולת צירוף** F (אשר מעתיקה זוג איברים בקבוצה לערך כלשהו (אשר כרגע לא נדרוש עדיין שגם הוא בקבוצה (קרי: **סגירות**))). שלישיה כזו (הנקראת **תחום**) תקרא **חבורה** אם מתקיימים התנאים הבאים:

- פעולת הצירוף הינה חד-ערכית ונותנת תוצר בקבוצה. תנאי החד-ערכיות דורש ששיווין בין הזוגות המצורפים ייתן שוויון בתוצרים (קרי: $(a,b)=(a',b')$ גורר $F(a,b)=F(a',b')$).
- הפעולה F הינה אסוציאטיבית (קרי: $F(F(a,b),c)=F(a,F(b,c))$).
- הפעולה F ניתנת להפיכה באופן חד-ערכי:
  למשוואות $F(x,b)=c$ ו $F(a,x)=c$ יש פתרון יחיד (עד כדי שוויון) בקבוצה.

למעשה נהוג להחליף את התנאי השלישי בתנאי השקול הבא אשר דורש קיום איבר **ניטרלי** יחיד (מימין ומשמאל) וקיום **הופכי** יחיד (מימין ומשמאל). קרי:

- קיים איבר יחיד e כך שמתקיים $F(a,e)=F(e,a)=a$ וכן לכל איבר a קיים איבר יחיד 'a אשר מתקיים $F(a,a')=F(a',a)=e$.

(השקילות בין שני הניסוחים של תנאי ההפיכות מוכחת במקור בסעיף 5.3.)

תנאי הסגירות מוצג במפורש (ולא במובלע ע"י הגדרת פעולת הצירוף כנותנת תוצר בקבוצה) משום שבהרבה מקרים "טבעיים" פעולת צירוף טבעית אינה נותנת תוצר בקבוצה (לדוגמה: חיסור וחלוקה בין טבעיים). תנאי החד-ערכיות עלול להיות מופר כאשר יחס השוויון אינו טריוויאלי (קרי: הקבוצה מכילה הרבה ייצוגים שאינם זהים אבל שווים זה לזה). התנאים הנוספים של אסוציאטיביות והפיכות הינם שימושיים מאוד בהרבה חקירות מתמטיות.

אכן, מושג החבורה (או למצער התנאי של חד-ערכיות וסגירות) מופיע במובלע בהרבה חקירות מתמטיות שקדמו להצגתו המפורשת של המושג המופשט הזה. הצגתו המפורשת ושימוש מפורש בו מבהירים את הטיעונים המתמטיים על ידי הצבעה מפורשת על התנאים שבם נעשה שימוש בטיעון: בפרט, מתאפשרת הפרדה בין טענות המתייחסות לעקרונות כלליים (כגון, היות התחום חבורה) לבין טענות אשר מתייחסות לתוכן קונקרטי מסוים.

בסעיף זה מוגדר **סדר** של חבורה (כמספר מחלקות השקילות (תחת יחס השוויון) בקבוצה) ומוגדרת גם חבורה **קומוטטיבית** (חבורה **אבלית**). כמו כן, מודגמת אי-התלות של שלושת התנאים הראשיים הנ"ל (ע"י הצגה של תחומים בהם מתקיימות שתיים מן התכונות אבל לא השלישית).

בהמשך כאשר נדבר על איברי החבורה הכוונה תהא למחלקות השקילות שתחת הגדרת יחס השוויון.

סעיף 5.2: דוגמאות של חבורות

בסעיף זה מוצגות כמה חבורות גאומטריות ושתי חבורות אריתמטיות (מסדר סופי, שהוזכרו בסעיף 3.3): ה**חבורה החיבורית מודולו M** לכל מספר טבעי M, ו**החבורה הכפלית מודולו P** לכל מספר ראשוני P. כמוכן, מוזכרות חבורות של **תמורות** (**פרמוטציות**) והעובדה *שכל החבורות מסדר קטן מ6 הינן קומוטטיביות* (אך ישנן חבורות לא קומוטטיביות מסדר 6 (לדוגמה: חבורת כל התמורות על שלושה איברים)).

סעיף 5.3: מושג האיזומורפיזם ומשפט קיילי

המופשטות של מושג החבורה מגיעה לשיאה כאשר מתעלמים לחלוטין מאיבריה ומתייחסים רק לתכונות פעולת הצירוף. דבר זה נעשה על ידי הגדרה של מושג האיזומורפיזם.

נאמר שחבורה עם פעולה F **איזומורפית** לחבורה עם פעולה G אם קיימת התאמה חד-חד-ערכית של איברי החבורה הראשונה לאיברי החבורה השנייה אשר משמרת את תוצאות הפעולות. קרי

There exist a bijection φ from the elements of the first group to the elements of the second group such that for every *a* and *b* in the first group it holds that φ(F(*a*,*b*))=G(φ(*a*),φ(*b*)).

נגדיש כי תנאי הכרחי אך לא מספיק לאיזומורפיזם בין חבורות הוא קיום התאמה חד-חד-ערכית בין הקבוצות (של איבריהן).

משפט קיילי: *כל חבורה איזומורפית לחבורת תמורות.*
יתר על כן, אלו תמורות על איברי החבורה המקורית.

(לאיבר a של החבורה המקורית עם הפעולה F נתאים את התמורה π כך שיתקיים π(b)=F(a,b).)

(תזכורת: בחבורת תמורות ("פרמוטציות") האיברים הם התמורות והפעולה היא פעולת ההרכבה של תמורות.)

סעיף 5.4: חוגים ושדות

מושג החבורה מתייחס לפעולת צירוף יחידה, אלא שבפרקים הקודמים (וגם בתחומים אחרים במתמטיקה) מופיעות שתי פעולות צירוף (קרי: חיבור וכפל). מגוון של מושגים מתייחס לאפשרויות שונות של דרישות מופשטות משתי הפעולות האלו (ובפרט ליחס ביניהן). בפרט, מדובר בסוגים שונים של חוגים ובמושג השדה.

לשם פשטות נקרא לשתי פעולות הצירוף בשמות חיבור וכפל ונשתמש בסימונים המתאימים, תוך כדי הדגשה שכוונתנו לשתי פעולות צירוף כלשהן שאינן מתלכדות בהכרח עם החיבור והכפל הרגילים.

קבוצה שלגביה מוגדר יחס שוויון ושתי פעולות צירוף, שיקראו להלן חיבור וכפל, נקראת **חוג** אם

1. הקבוצה עם פעולת החיבור מהווה חבורה.
2. הקבוצה עם פעולת הכפל מקיימת את שני התנאים הראשונים של חבורות (ראו סעיף 5.1); ז"א פעולת הכפל הינה חד-ערכית (נותנת תוצר בקבוצה) והינה אסוציאטיבית.
3. החיבור והכפל מקיימים את החוק הדיסטריבוטיבי (ז"א: a*(b+c)=a*b+a*c וכן (b+c)*a=b*a+c*a).

אכן, לגבי הכפל דרשנו רק את שני התנאים הראשונים של הגדרת חבורה, ונמנענו במתכוון מן התנאי השלישי (שלמעשה לא ניתן לעמוד בו בשילוב עם (3) אלא ב"מקורב" (ראו דיון בשדות)). בנוסף לכך, דרשנו את התנאי הדיסטריבוטיבי, ונעיר כעת כי ללא כל תנאי על היחס שבין שתי הפעולות אין להגדרת החוג כל תוכן ממשי.

תכונות היסוד של חוגים (הוכחו בספר והן) כוללות

1. כפל (הן מימין והן משמאל) ב**אפס** (קרי: האיבר הניטרלי של החיבור) נותן אפס.
2. אם החוג מכיל איבר ניטרלי לכפל, שיקרא **איבר היחידה**, אז החיבור הינו פעולה קומוטטיבית, בין אם הכפל קומוטטיבי או לא.

החוג נקרא **קומוטטיבי** אם פעולת הכפל היא קומוטטיבית. מושג מרכזי נוסף הוא המושג של **מחלק אמיתי של אפס**: אלו מספרים שאינם אפס אשר מכפלתם שווה לאפס.
להלן כמה דוגמאות של חוגים:

- קבוצת כל המספרים השלמים מהווה חוג קומוטטיבי (לגבי החיבור והכפל הרגילים).
  במקרה זה החוג כולל איבר יחידה ואינו כולל מחלקים אמיתיים של אפס.
- קבוצת כל המספרים השלמים שהם כפולה שלמה של מספר טבעי הגדול מ1 מהווה חוג קומוטטיבי לגבי החיבור והכפל הרגילים), אלא שחוג זה אינו מכיל איבר יחידה (ולמרות זאת (גם) החיבור הוא קומוטטיבי).
- עבור כל מספר טבעי M הגדול מ1, קבוצת המספרים {0,1,…,M-1} עם פעולות החיבור והכפל מודולו M מהווה חוג קומוטטיבי אשר כולל איבר יחידה.
  חוג זה כולל מחלקים אמיתיים של אפס אם ורק אם M אינו ראשוני.

לאפס עצמו לא יכול להיות הופכי כפלי (בשום חוג), ואותה עובדה חלה על מחלקי אפס אמיתיים ככל שהם קיימים. מכאן שהמיטב שנוכל לקוות לו הוא שבחוג שלא כולל מחלקים אמיתיים של אפס, יהיה לכל מספר מלבד אפס הופכי כפלי. תקווה זאת ניתנת למימוש ומובילה להגדרת ה***שדה*** כחוג קומוטטיבי המקיים את כל הדרישות הנ"ל. דהיינו, קבוצה שלגביה מוגדר יחס שוויון ושתי פעולות צירוף, שיקראו להן חיבור וכפל, נקראת **שדה** אם

1. הקבוצה עם פעולת החיבור מהווה חבורה (קומוטטיבית).
2. הקבוצה עם פעולת הכפל מקיימת את כל התנאים של חבורה קומוטטיבית מלבד קיום פתרון (יחיד) למשוואה מן הסוג ax=0.
   (עבור a שונה מאפס אין למשוואה זו פתרון, ואילו עבור a=0 הפתרון (בדרך כלל) אינו יחיד.)
3. החיבור והכפל מקיימים את החוק הדיסטריבוטיבי.

(הקומוטטיביות של החיבור נובעת מתכונת היסוד השנייה של חוגים שהוזכרה לעיל.)

משפט מור: *מספר האיברים בשדה סופי הוא חזקה של מספר ראשוני, ולכל חזקה של מספר ראשוני קיים שדה יחיד (עד כדי איזומורפיזם) שזה מספר איבריו.*

(מושג האיזומורפיזם בין שדות מוגדר באופן אנלוגי להגדרתו עבור חבורות. נציין כי הוכחת המשפט אינה פשוטה, למרות שרבים מן הקוראים מכירים את השדות הללו: בפרט, עבור כל ראשוני P, קבוצת המספרים {0,1,…,P-1} עם פעולות החיבור והכפל מודולו P מהווה שדה.)

נציין במפורש כי, עבור כל ראשוני P ומספר שלם e גדול מ1, השדה של P איברים מהווה *שדה חלקי* של השדה המכיל P^e איברים (קרי: השדה הגדול מכיל P איברים אשר מהווים שדה ביחס לאותן הפעולות).

כנרמז בסעיף 4.3 המספרים הרציונליים (עם פעולות החיבור והכפל שהוגדרו שם) מהווים שדה אינסופי. מסתבר שלשדה זה אין "שדה חלקי" (קרי: אם נשמיט חלק מאיברי השדה הרי שהקבוצה שנותרת לא תהווה שדה ביחס לאותן הפעולות). בשני פרקים הבאים נעסוק בשני שדות אינסופיים אשר מרחיבים את שדה המספרים הרציונליים (קרי: שדה המספרים הממשיים ושדה המספרים המרוכבים).

פרק שישי: רציפות – המספרים האי-רציונליים הממשיים

אנחנו חוזרים כעת לפרויקט של הרחבת מושג המספר מתוך הצורך לתת תשובות לשאלות העולות באופן טבעי ממושג המספר שהוצג עד כה (קרי: המספר הרציונלי). נקודת המוצא שלנו היא האבחנה שהשורש הריבועי של 2 אינו מספר רציונלי (וכך גם הדבר לגבי כל מספר טבעי שאינו ריבוע של מספר טבעי אחר).

סעיף 6.1: הצגת הבעיה – איך להגדיר את המספרים הממשיים?

נקודת המוצא הנ"ל מוצגת בצורה גיאומטרית (שהיא הצורה בה הוצגה לראשונה): מקורה בעובדה שהיחס בין אורך היתר של משולש ישר זווית ושווה שוקיים לאורך הצלעות האחרות שווה לשורש הריבועי של 2. העובדה ששורש זה אינו מספר רציונלי ניתנת להוכחה (בדרך השלילה), וזאת למרות שבין כל זוג מספרים רציונליים יש אינסוף מספרים רציונליים אחרים.

(הערת אגב: מצד שני, יש התאמה חד-חד-ערכית בין המספרים הרציונליים למספרים הטבעיים.)

הממשיות (או המציאותיות) של אורך היתר אינה ניתנת להכחשה. משמע שקיימים גדלים ממשיים (או מציאותיים) שאינם מספרים רציונליים. עובדה זו מחייבת אותם להרחיב את תחום המספרים על מנת לכלול מספרים המתאימים לגדלים אלו.

(פרנקל מציין שמנקודת מבט גאומטרית אם נחוג מעגל מקצה אחת משוקי המשולש הנ"ל כאשר היתר משמש לו רדיוס, הרי שנחתוך את הישר הממשיך את אותה שוק. אם נאמר שהישר מכיל רק נקודות רציונליות, נקבל גאומטריה משונה בה לקווים שחוצים זה את זה אין בהכרח נקודת חיתוך.)

הצורך להרחיב את תחום המספרים הרציונליים על מנת לכלול את המספרים האי-רציונליים הנ"ל (קרי: כל השורשים של כל המספרים הטבעיים) ברור, אך גם ברור שלא די בכך. עקרון היציבות דורש הרחבה של פעולות החשבון הרגילות (קרי: החיבור והכפל) באופן שתוצריהם יהיו גם הם בתחום החדש. מהו התחום הזה? הקוראים יודעים בוודאי את התשובה (קרי: מדובר בתחום המספרים הממשיים) אך האם הם יודעים איך מגדירים את התחום הזה (שלא באמצעות נפנוף ידיים)? ואיך מבססים בו את ההרחבה של פעולות החשבון הרגילות ושל יחס הסדר?

לצורך משימה זו נשתמש בכלים מתחום האנליזה (שלו מוקדש החלק השלישי). בפרט, נסקור שתי שיטות שונות להשגת המטרה: "תורת החתכים" של דידקינד (ראו סעיף 6.2) ותורת הסדרות היסודיות (של קנטור, ראו סעיף 6.3).

סעיף 6.2: תורת החתכים

חתך דידקינד הוא חלוקה של כל המספרים הרציונליים לשתי קבוצות (הנקראות כאן מחלקות), שתסומן (L,H), כך שכל מספר במחלקה L (הנקראת **תחתונה**) קטן מכל מספר במחלקה (**העליונה**) H. נבחין בין שלושה מקרים אפשריים ביחס לשאלה האם יש במחלקות אלו איבר אחרון וראשון:

1. L כולל איבר אחרון (הגדול מכל האחרים) אבל H אינו כולל איבר ראשון (הקטן מכל האחרים).
2. L אינו כולל איבר אחרון אבל H כולל איבר ראשון.
3. L אינו כולל איבר אחרון וגם H אינו כולל איבר ראשון.

(המצב בו L כולל איבר אחרון וגם H כולל איבר ראשון אינו אפשרי, משום שבמצב כזה הממוצע האריתמטי של שני איברים אלו (שהינו מספר רציונלי) לא יהיה באף אחת מן המחלקות.)

החתכים משני הסוגים הראשונים נקראים **חתכים רציונליים**, והם **נקבעים** ע"י האיבר האחרון של L או הראשון של H (לפי המקרה התקף). חתכים מהסוג השלישי נקראים **אי-רציונליים.**

*שני חתכים רציונליים נקראים **שווים** אם הם נקבעים על ידי אותו מספר* (רציונלי). במקרה זה האיבר האחרון של המחלקה התחתונה בחתך אחד זהה לאיבר הראשון שבמחלקה העליונה של החתך השני, ומלבד לכך החתכים זהים. מכאן שיש התאמה חד-חד ערכית בין המספרים הרציונליים לבין החתכים הרציונליים (שאינם שווים).

המספרים האי-רציונליים מיוצגים על ידי החתכים האי-רציונליים, כאשר כל חתך אי-רציונלי שאינו זהה לחתך אחר מוגדר כשונה (קרי: "לא שווה") לו. יודגש שאין צורך לקבוע מה הם אותם מספרים אי-רציונליים; מספיק להגדיר את פעולות החשבון ויחס הסדר על כל החתכים באופן יציב (קרי: באופן שההרחבה תשמור על פעולות החשבון והסדר של המספרים הרציונליים (אשר קובעים את ומיוצגים על ידי החתכים הרציונליים)).

בהמשך הסעיף משורטטים הפרטים של הרחבה כזו. צעד טכני ראשון הוא צמצום הדיון לחתכים משני הסוגים האחרונים (קרי: הסוגים 2-3), דבר המוצדק על ידי השוויון שבין כל חתך מסוג 1 לחתך מסוג 2. עניין טכני נוסף הוא הגדרת הכפל למקרה הפרטי של "חתכים חיוביים" (קרי: חתכים ששתי המחלקות שלהם מכילות מספרים חיוביים), והגדרת החתך הנוצר על ידי הכפל באמצעות המחלקה העליונה בלבד (והגדרת המחלקה התחתונה המייצגת את המכפלה כמשלימה למחלקה העליונה). לבסוף, מוגדר המקרה הכללי על ידי "רדוקציה" למקרה הפרטי (של חתכים חיוביים). אוסף כל החתכים עם פעולות החשבון שהוגדרו כאן הוא שמגדיר את השדה של **המספרים הממשיים**.

יודגש כי המספרים הממשיים שהוגדרו כאן יוצגו כל אחד על ידי חתך אשר מכיל מספר אינסופי של מספרים רציונליים (וזאת בניגוד להגדרת המספרים הרציונליים שיוצגו על ידי זוגות של מספרים שלמים, אשר יוצגו על ידי זוגות של מספרים טבעיים). בנוסף נדגיש כי השדה שהוגדר בסעיף זה הינו איזומורפי לשדה שיוגדר בסעיף הבא. למרות שההגדרות שבשני הסעיפים דומות מבחינה עקרונית, זו שבסעיף הבא נוחה יותר לשימוש.

סעיף 6.3: המספר הממשי כזוג של סדרות יסודיות

כאן נזדקק למושג הסדרה ולמושג ההצטופפות: נתמקד ב*סדרות של מספרים רציונליים* (בהן לכל מספר טבעי מותאם מספר רציונלי יחיד), ונשתמש במושג **הצטופפות** אשר מוגדר כהתקרבות אינסופית של איברי הסדרה (לכל מספר רציונלי חיובי ε קיים מיקום בסדרה אשר ממנו והלאה ההפרשים בין איברים עוקבים בסדרה קטן מאותו ε). זוג סדרות כאלו **מייצג מספר ממשי** אם מתקיימים התנאים הבאים:

- הסדרה הראשונה (שתקרא **עולה** (למרות שהיא לא עולה באופן מוחלט)) הינה מונוטונית לא יורדת: כל איבר בסדרה זו קטן או שווה לאיבר הבא אחריו בסדרה.
- הסדרה השנייה (שתקרא **יורדת**) הינה מונוטונית לא עולה: כל איבר בסדרה זו גדול או שווה לאיבר הבא אחריו בסדרה.
- כל איבר של הסדרה העולה קטן או שווה לאיבר התואם של הסדרה היורדת.
- סדרת ההפרשים בין האיברים התואמים של שתי הסדרות מקיימת את תנאי ההצטופפות.

נדגיש כי ההגדרה אינה מוציאה מן האפשר סדרות זהות שבהן כל האיברים שווים. זוג סדרות כזה מייצג מספר רציונלי (שהוא אותו מספר המופיע בכל איברי שתי הסדרות).

*שני ייצוגים יקראו **שווים*** (קרי: מייצגים את אותו מספר ממשי) *אם ורק אם כל איבר בסדרה העולה של ייצוג אחד קטן או שווה לאיבר התואם בסדרה היורדת של הייצוג השני.*
(הערה: יש להוכיח שהגדרה זו של שוויון הינה יחס שקילות; הרפלקסיביות והסימטריות הינן טריוויאליות, אך תנאי הטרנזיטיביות דורש הוכחה.)

דוגמא: המספר הממשי אפס מיוצג הן על ידי זוג הסדרות שבהם כל האיברים שווים לאפס, והן על ידי זוג סדרות שהעולה שבהן היא סדרה של מספרים שלילים אשר "מתכנסת" לאפס ואילו היורדת היא סדרה של מספרים חיוביים אשר "מתכנסת" לאפס.

כמו בסעיף 6.2, הגדרת הכפל בין ייצוגים של מספרים ממשיים נעשית דרך מקרה פרטי. המקרה הפרטי כאן הוא של זוגות סדרות אשר מכילות רק איברים חיוביים. הרדוקציה למקרה פרטי זה מתאפשרת על ידי העובדה שאם נשמיט מייצוג נתון של מספר ממשי (קרי: מזוג סדרות כנ"ל) את האיבר הראשון בכל סדרה, נקבל ייצוג של אותו מספר ממשי. עובדה זאת מאפשרת לצמצם את הדיון לייצוגים שבהם כל האיברים (בשתי הסדרות!) הם בעלי אותו סימן (קרי: בכל סדרה או שכל האיברים חיוביים, או שכולם שליליים או שכולם אפס). כמובן שהמספר הממשי שזוגות סדרות כאלו מייצגות הוא בעל אותו סימן.

בשלב זה ניתן להגדיר את החיבור והכפל בין ייצוגים של מספרים ממשיים ולהוכיח כי התוצרים המתקבלים הם אמנם ייצוגים של מספרים ממשיים, שחיבור וכפל של זוגות של ייצוגים שווים נותן תוצרים שווים (כאשר כל ייצוג הוא זוג סדרות), ושההרחבה הזו תואמת את הגדרת החיבור והכפל בין מספרים רציונליים.

סדר בין ייצוגים של מספרים ממשיים יוגדר על פי הסימן של ההפרש שלהם (השוו סעיף 4.3, שם נהגנו כך לגבי המספרים הרציונליים). (יחס הסדר הזה מקיים את החוק של ארכימדס אשר קובע שאם שני מספרים חיוביים אז קיימת מכפלה של כל אחד מהם (במספר טבעי גדול מספיק) שגדולה מן המספר שני.)

בנקודה זו ראוי לציין כי בין כל שני מספרים ממשיים (שונים) קיים מספר רציונלי (ולכן אינסוף כאלו). עובדה זו עולה מתוך הייצוגים של המספרים הנתונים: היותו של הראשון קטן מן השני גוררת קיום איבר בסדרה היורדת של הראשון שהינו קטן ממש מהאיבר התואם בסדרה העולה של השני (והממוצע האריתמטי של איברים אלו הוא המספר הרציונלי המבוקש).

שאלה עקרונית שעולה לנוכח הגדרת הייצוגים הנ"ל היא מה יקרה אם נתיר להשתמש בסדרות היסודיות הנ"ל באיברים שהם מספרים ממשיים (ולא רק במספרים רציונליים). התשובה היא ששדה המספרים שיתקבל יהיה איזומורפי לשדה המספרים הממשיים. (תופעה דומה תקפה גם לייצוג על ידי חתכים שבו השתמשנו בסעיף הקודם.) למעשה, תחת הגדרה אנלוגית של מושג השוויון, מתקיים כי לכל ייצוג המוגדר על ידי זוג סדרות של מספרים ממשיים קיים ייצוג שווה לו אשר משתמש באיברים רציונליים בלבד.

סעיף 6.4: שברים עשרוניים

(פרנקל מעיר במפורש שניתן לדלג על סעיף זה ואני שותף לדעתו.)

חשוב להדגיש כי מושג השבר העשרוני מניח את קיומם וביסוסם של המספרים הממשיים ואינו יכול לשמש לתכלית זו עצמה, משום ששבר עשרוני של מספר ממשי מוגדר כ"טור" אינסופי (מסוג מסוים) אשר "מתכנס" למספר הממשי הזה. (ודוק: לא רק שאנו נצרכים כאן למושגים שהושמו במירכאות, אלא שההתכנסות למספר מסוג מסוים מניחה את המושג של מספר מסוג זה.)

לחילופין, ניתן היה להגדיר את המספרים הממשיים על ידי סדרות של טורים סופיים של מספרים רציונליים, ובפרט ע"י טורים המורכבים מפיתוחים עשרוניים של מספרים (קרי: כל טור סופי כזה הוא סכום של מספר שלם וכפולות של חזקות יורדות של 10 במספרים מהקבוצה {0,1,2…,9}). מכאן, משדובר במקרה פרטי של הייצוגים בהם עסקנו בסעיף 6.3.

למרות מגבלה זו (על סוג הסדרות), גם כאן יהיו מספרים רציונליים שיש להם יותר מייצוג יחיד (כשבר עשרוני). למעשה אפשריים רק שני ייצוגים: אחד המכיל מספר סופי של ספרות שאינן 0, ואחד שמכיל אינסוף ספרות כאלו (שהינן כולן 9). (נציין גם כי למספר אפס יש ייצוג יחיד שמכיל רק את הספרה 0, ואילו למספרים רציונליים שאינם כפולה שלמה של חזקה של 0.1 יש ייצוג יחיד שמכיל אינסוף ספרות שאינן 0.)

פרק שביעי: המספרים המרוכבים

ההרחבות של מושג המספר שנידונו בפרקים הקודמים נתמכו בפרקטיס האנושי שהבטיח את *ממשותם* (ובפרט את ההנחה שאנחנו בונים תורות שאינן כוללות סתירה פנימית). בפרט, המציאות של מספרים רציונליים ומספרים ממשיים חיוביים הם תופעות שהופיעו בפרקטיקות אנושיות רבות ושונות כבר בשלבים היסטוריים קדומים יחסית. גם המספרים השלילים הופיעו בפרקטיקות מסוימות, ובכל מקרה לא היה קשה להבחין ב*ממשותם*. לבסוף נציין כי גם כאשר נדרשו מספרים לשם סיפוק פתרונות למשוואות אלגבריות, היו אלו משוואות שקיום פתרונות להן הובטח על ידי המציאות הממשית (לדוגמא: האורך של היתר של משולש ישר זווית שאורך צלעותיו האחרות ידוע הוא דבר שבמציאות). בניגוד לכך *הממשות* של המספרים המרוכבים (שאינם ממשיים) אינה מוחשית, ולא בכדי הם זכו לכינוי "מדומיינים".

הערה מקדמית נוספת נוגעת למורכבות העיונית של ביסוס ההרחבה החדשה של מושג המספר. כזכור, ההרחבות מן המספרים הטבעיים אל המספרים הרציונליים (בהן עסקנו בפרק 4) היו פשוטות למדי, ובניגוד לכך ההרחבה של המספרים הרציונליים למספרים ממשיים הייתה קשה למדי: עניין זה היה הלוז של תוכן פרק 6, ואף בו לא אמרנו את המילה האחרונה בנושא. לעומת זאת, ההרחבה שתוצג בפרק הנוכחי פשוטה למדי. הקושי נעוץ, כפי שנאמר לעיל, בשאלת *ממשותה*.

סעיף 7.1: הצגת הבעיה – מה מבטיח את חוסר הסתירה הפנימית?

ניתן לומר כי ההתנגדות לקבלת ההרחבות הקודמות של מושג המספר (אשר נדונו בפרקים 4 ו6) מקורן באידאולוגיות חוץ-מתמטיות שהמושגים המורחבים היו לצנינים בעיניהן. במקרים אלו לא היה חשש שהגדרת התחום המורחב תוביל לסתירה הגיונית משום (שעם כל הכבוד לאידאולוגיה) הרי שההרחבות האלו נתמכו בפרקטיס האנושי שהבטיח את ממשותם. בניגוד לכך, בעת שבה "התקבלו" המספרים המרוכבים במתמטיקה היו האידאולוגית החוץ-מתמטיות הרבה יותר חלשות, ומה שנחוץ היה אז (ואף נחוץ לנו היום) הוא בטחון (ולו חלקי) שאין אנו בונים תורה אשר כוללת סתירה פנימית.

ברור מתוך הגדרת הכפל של מספרים ממשיים כי למשוואה $X^2+1=0$ לא יכול להיות פתרון ממשי. הדרך בה הלכנו עד כה אמרה שאם אין למשוואה אלגברית (ראו פרק 8) פתרון בתחום בו היא מוצגת אז יש להרחיב את התחום על ידי פתרונות מתאימים. אכן, במקרה הנוכחי די יהיה להרחיב את התחום על ידי הוספת מספר מדומיין שמוגדר כשורש הריבועי של 1-. מכיוון שהמציאות אינה מספקת לנו עדות ישירה לחוסר הסתירה של הרחבה כזו, ננסה למצוא עדות עקיפה על ידי אנלוגיה לתחום מתמטי אחר. סעיף 7.2 מציג אנלוגיה כזו, אך אני מעדיף אנלוגיה אשר מופיעה בסעיף (י) של פרק המילואים. (שימו לב כי, למרות כותרתו המקורית, סעיף 7.3 לא מספק אנלוגיה אחרת.)

האנלוגיה שהוזכרה לעיל היא לשדה הפולינומים הממשיים (במשתנה X) מודולו הפולינום X^2+1. בשדה זה שני פולינומים מוגדרים כשווים אם שארית החלוקה שלהם בפולינום X^2+1.הינה שווה (קרי: נותנת פולינומים ממעלה 1 לכל היותר אשר מקדמיהם שווים כמספרים ממשיים). הגדרת שדה זה נראית חסרת סתירות וממשותו עולה על כל ספק, והיא מספקת לנו עדות לחוסר הסתירה של תחום המספרים המרוכבים משום ששדה הפולינומים הזה איזומורפי לשדה המספרים המרוכבים (ושניהם מכילים כשדה חלקי את שדה המספרים הממשיים).

סעיף 7.2: אנלוגיה לתורה של וקטורים במישור

התורה הזו דנה בשתי פעולות צירוף המוגדרות על קבוצת הוקטורים במישור, אך בעוד שהחיבור מוגדר באופן מאוד טבעי (כוקטור המתקבל כאשר מצמידים לנקודת הסיום של הוקטור הראשון את נקודת ההתחלה של הוקטור השני), הרי שהגדרת הכפל מסתורית בשלב זה. לפיכך, אינני רואה טעם רב בסעיף זה.

(הוקטורים במישור מוצגים כזוג של מספרים ממשיים המציינים גודל וזווית, ומכפלה של וקטורים מוגדרת כזוג המורכב ממכפלת הגדלים וסכום הזוויות. הגדרת הכפל מבוססת, למעשה, על ההצגה של וקטורים (במישור) כמכפלה של גודל ממשי ופונקציה אקספוננציאלית אשר מעתיקה זוויות (המיוצגות על ידי מספרים ממשיים) למספרים מרוכבים (ב"גודל" אחד). הצגה זו מניחה את המבוקש, אבל ממנה ברור מדוע כפל של וקטורים מוגדר כמכפלת גודליהם וסכום זוויותיהם.)

סעיף 7.3: הצגה אקסיומטית של המספרים המרוכבים

המספרים המרוכבים מוגדרים באופן הבא (השוו הגדרת הרציונליים בסעיף 4.3):

1. מספר **מרוכב** מיוצג על ידי זוג של מספרים ממשיים, כדוגמת (a,b).
   הוא נקרא **ממשי** אם b=0, **ומדומה** (דמיוני) אחרת..
2. **שוויון** בין ייצוגים מתקיים רק באופן טריוויאלי (קרי: אם a=a' וגם b=b').
3. **חיבור** מקיים $(a,b) + (a',b') = (a + a', b + b')$
4. **כפל** מקיים $(a,b) * (a',b') = (a * a' – b * b', a * b' + a' * b)$

(הגדרת הכפל נראית מפתיעה רק אם שוכחים את הכוונה שלנו לייצג ע"י זוגות כאלו מספרים שהם סכום של מספר ממשי וכפולה ממשית של השורש הריבועי של 1-. אם נסמן, כנהוג, את השורש הזה על ידי ι, הרי שיתקיים $(a+b\iota)*(a'+b'\iota) = (a*a' – b*b')+(a*b' + a'*b)\iota$.)

נדגיש כי מכפלת המספר המדומיין המיוצג על ידי הזוג (0,1) בעצמו שווה למספר הממשי 1- אשר מיוצג על ידי הזוג (1,0-).

מושג חשוב (אשר מופיע במקור בסעיף 7.2) הוא מושג המספר הצמוד של מספר מרוכב.
המספר **הצמוד** למספר אשר מיוצג ע"י הזוג (a,b) הוא המספר מיוצג ע"י הזוג (a,-b).
עובדות יסוד ביחס למושג זה כוללות

- $(a,-b) * (a',-b') = (c,-d)$, where $(c,d) = (a,b) * (a',b')$.
- $(a,b) * (a,-b) = a^2 + b^2$

מהעובדה הראשונה נובע כי פעולת הכפל ופעולת הצימוד "מתחלפים" (ז"א מכפלה של מספרים צמודים שווה לצמוד של מכפלת המקוריים). העובדה השנייה אומרת שמכפלת מספר בצמוד לו היא מספר ממשי (שהוא ריבוע ה"גודל" של כל אחד משני המספרים המרוכבים שהוכפלו).

פרנקל מסיים את הסעיף הנוכחי בהודאה בכך שביסוס העיוני מן הסוג שהוצג בפרק זה (וגם בפרק הקודם) הינו ביסוס בדיעבד. הביסוס הזה מחביא את הדרך שבה הומצאו הרעיונות אשר מבוססים כאן בדיעבד. בדרך כלל, עולים הרעיונות מתוך צרכים פרגמטיים והם אינם נקיים וברורים כל כך בעת לידתם. הוא משער שהם נוצרים על ידי "כוח ספון ונפלא הנמצא כביכול בתוך [המתמטיקה גופא]." לי נראה שההקשר החברתי הכללי, אשר כולל גם רעיונות ותורות של תחומי ידע אחרים, משחק כאן תפקיד חשוב יותר.

כמובן שאין באמור לעיל בכדי להוריד מהחשיבות הגדולה של ביסוס הרעיונות, לאחר שהושגו, באופן סדור ובהיר.

סעיף 7.4: הבעיה של הרחבה נוספת של מושג המספר

בסעיף זה נסקרות שתי תוצאות אשר מצדיקות את עצירת התהליך של הרחבה מושג המספר בנקודה אליה הגענו (קרי: עם המספרים המרוכבים). התוצאה הראשונה אומרת ששדה המספרים הממשיים הוא התחום המקיף ביותר שיש בו יחס סדר מלא אשר מקיים את החוק של ארכימדס (ראו: סוף סעיף 6.3). אכן, יחס הסדר של המספרים המרוכבים (עפ"י גודלם/אורכם כוקטורים) הינו חלקי ואילו כל יחס סדר מלא החל עליהם אינו מקיים את החוק של ארכימדס.

התוצאה השנייה אומרת שבמובן מסוים לא ניתן להרחיב את תחום המספרים הממשיים מעבר למספרים המרוכבים. המובן שבו מדובר מתייחס לתחום היפותטי אשר "נפרש" (ע"י קומבינציות לינאריות עם מקדמים ממשיים) על ידי "מספרים מיוחדים" המקיימים יחסים כפליים מסוימים ביניהם. לדוגמא, המספרים המרוכבים שהוגדרו בפרק זה מתאימים לשני "מספרים מיוחדים" כאלו שאחד הוא איבר היחידה (של הממשיים) והשני הוא איבר שמכפלתו בעצמו היא ההופכי החיבורי של איבר היחידה. מסתבר שלא ניתן לקבל הרחבה של שדה הממשיים על ידי שימוש ביותר משני "מספרים מיוחדים" ואילו שימוש בשני "מספרים מיוחדים" אינו יכול לתת שדה אשר "שונה מהותית" משדה המספרים המרוכבים.

פרק שמיני: משוואות אלגבריות

המושג של משוואות אלגבריות הוזכר כבר בפרקים הקודמים, אך בפרק זה נגדיר אותו במפורש ונדון בשאלות העולות ממנו.

סעיף 8.1: מספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים

משוואה אלגברית היא משוואה שבצידה האחד פולינום עם מקדמים שלמים ממעלה מסוימת (שאינה אפס) ובצידה השני אפס. מספר ממשי נקרא **אלגברי** אם הוא פתרון של משוואה כזו, והוא נקרא **אלגברי שלם** אם המקדם של החזקה הגדולה ביותר בפולינום הינו 1.

מושג המספר האלגברי אינו משתנה אם מתירים משוואות עם מקדמים רציונליים. ה**מעלה** של מספר אלגברי היא המעלה הנמוכה ביותר של משוואה שמספר זה הוא פתרון שלה. בפרט, המספרים האלגבריים ממעלה 1 הם המספרים הרציונליים (שהם ורק הם הינם פתרונות למשוואה ממעלה 1).

לשם ניתוח משוואות אלגבריות יש להגדיר חשבון בפולינומים (ובפרט חילוק בהם). עובדה יסודית היא שמעלת השארית של חלוקת פולינום אחד בפולינום השני קטנה ממעלת הפולינום השני. מכך נובע כי ***למשוואה אלגברית ממעלה n יש לכל היותר n פתרונות שונים*** (אשר יכולים להיות מספרים מרוכבים). מכך נובע גם כי ***קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין המספרים האלגבריים לבין המספרים הטבעיים*** (משום ששתי הקבוצות מותאמות חד-חד-ערכית לקבוצת הסדרות הסופיות של מספרים שלמים).

בניגוד לנ"ל, "רוב" המספרים הממשיים אינם אלגבריים. מספרים אלו נקראים **טרנסצנדנטיים**. בפרט, המספרים π (יחס הקוטר להיקף המעגל) ו"בסיס הלוגריתם הטבעי" (קרי: e) הינם טרנסצנדנטיים.

סעיף 8.2: המשפט היסודי של האלגברה

המשפט שבכותרת אומר כי ***לכל משוואה אלגברית*** (אפילו עם מקדמים מרוכבים) ***יש לפחות פתרון אחד*** (שיכול להיות מספר מרוכב) ומכך נובע כי ***כל פולינום ניתן לפירוק*** (מעל המרוכבים) ***לגורמים לינאריים*** (קרי: למשוואה ממעלה n יש בדיוק n פתרונות אשר עשויים להיות שווים).

הסעיף מציג כמה צעדים בדרך להוכחת המשפט הנ"ל. בפרט מוכחים שלושת המשפטים הבאים:

1. אם המשפט היסודי נכון לגבי משוואות עם מקדמים ממשיים,
   אז הוא נכון גם לגבי משוואות עם מקדמים מרוכבים.
   [ההוכחה "מפצלת" את הפולינום שבמשוואה לשני פולינומים ממשיים, ומשלבת אותם חזרה (ע"י שימוש ב"משוואה הצמודה") לפולינום ממעלה כפולה.]

2. אם למשוואה עם מקדמים ממשיים יש פתרון שהוא מספר מרוכב, אז גם המספר המרוכב הצמוד (ראו סעיף 7.3) הוא פתרון שלה. [רמז: הכפל של מספרים צמודים שווה למספר הצמוד של מכפלת המספרים המקוריים.] מסקנה מן המשפט הנוכחי: תחת הנחת המשפט, ניתן לפרק את הפולינום שבמשוואה לגורמים לינאריים וגורמים ריבועיים כך שבכל הגורמים מופיעים רק מספרים ממשיים.
3. המשפט היסודי נכון לגבי משוואות ממעלה אי-זוגית עם מקדמים ממשיים. יתר על כן, במקרה זה קיים פתרון שהוא מספר ממשי. [ההוכחה מסתמכת על שימור הסימן של פולינום עם מקדם מוביל חיובי תחת הצבה של ערכים ממשיים (חיוביים ושליליים) גדולים וקטנים מספיק, וכן על "משפט ערך הביניים".]

נותר "רק" המקרה של משוואה ממעלה זוגית, אשר מוכח בשיטות אריתמטיות למהדרין (אך באופן שמסובך מדי להצגה בספר). מכאן שרק הוכחת משפט 3, אשר הסתמכה על "משפט ערך הביניים" (מן האנליזה), השתמשה בכלים שמחוץ לאריתמטיקה.

סעיף 8.3: בין הקונקרטי למופשט

הכותרת המקורית של סעיף זה שונה, ואילו הכותרת שבחרתי מצביעה על כך *שהמשפט היסודי של האלגברה* מצוי בתווך שבין שתי השקפות מנוגדות: ההשקפה הראשונה (שהיא ההשקפה ההיסטורית) שואלת לא רק על קיום הפתרונות אלא גם על אפשרות הצגתם כפונקציה רציונלית של שורשים של מספרים ממשיים. פתרונות כאלו נקראים אלגבריים (ונידונים בתת-הסעיף הראשון). ההשקפה הנגדית (שהינה "מודרנית") רואה את המשפט היסודי של האלגברה כמקרה פרטי של משפט כללי יותר ומופשט יותר (ראו את תת-הסעיף השני).

תת-סעיף א: פתרון אלגברי של משוואות אלגבריות

פרנקל מספר שבמשך מאות שנים הייתה אי בהירות לגבי תוכנו של המשפט היסודי של האלגברה ובלבול בין שאלת קיום הפתרונות לשאלת הצגתם כפונקציה רציונלית של שורשים של מספרים ממשיים. הפתרון של משוואות ממעלה שניה היה ידוע גם לקדמונים, ומציאת דרכי פתרון למשוואות ממעלה גבוהה יותר היה עיסוק מרכזי של מתמטיקאים במשך כמה מאות שנים עד שהוכח (במפתיע) כי למשוואות ממעלה חמישית עשוי שלא להיות "פתרון אלגברי" (במובן של פתרון הניתן להצגה כפונקציה רציונלית של שורשים של מספרים ממשיים). האפיון של משוואות אלגבריות שיש להן פתרון כזה ניתן כידוע ע"י גלואה בראשית שנות ה1830.

עובדה ראויה לציון היא שגם במקרה שלמשוואה ממעלה שלישית יש פתרון ממשי, הרי הצגתו באופן אלגברי (כנ"ל) דורשת שימוש במספרים מרוכבים.

תת-סעיף ב: הפשטה והכללה של המשפט היסודי של האלגברה

פרנקל סבור שהמשפט היסודי של האלגברה אינו ראוי לכינוי זה בשל ההתייחסות המפורשת שלו למספרים מרוכבים, אשר עצם ביסוסם העיוני דורש טכניקות של תחום האנליזה. בניגוד לכך, המשפט הכללי יותר שידון להן ראוי בהחלט לכינוי הנ"ל (קרי: המשפט היסודי של האלגברה).

הניסוח הכללי יותר עולה מן האבחנה כי הפתרונות של משוואה אלגברית עם מקדמים רציונליים הינם אלגבריים (עפ"י עצם ההגדרה של מושג זה (כשהוא מתייחס למקדמים רציונליים)), ולפיכך די היה להרחיב את תחום המספרים הרציונליים לתחום המספרים האלגבריים (ע"י הרחבה עקבית ("קונסיסטנטית") של פעולות החיבור והכפל) במקום להרחיבו לתחום המספריים המרוכבים (כפי שעשינו בשני הפרקים האחרונים). הרחבה כזו, הייתה "חסכונית יותר" (קרי: הייתה יוצרת שדה שהוא חלקי לשדה המרוכבים "וקטן בהרבה" ממנו), כפי שנפרט להלן.

כאמור לעיל, מסתבר שאין ממש צורך להשתמש בשדה המספרים המרוכבים (כולו) לתכלית של פתרון משוואות אלגבריות (אם כי יש לשדה המספרים המרוכבים הרבה שימושים אחרים). בפרט, ניסוח חריף יותר של המשפט היסודי של האלגברה ביחס למשוואות אלגבריות עם מקדמים רציונליים יאמר כי ***קיים שדה K*** ("קטן ביותר" ביחס למספרים המרוכבים) ***אשר מכיל את שדה המספרים***

הרציונליים (כשדה חלקי) ***כך שלכל משוואה אלגברית עם מקדמים בשדה K יש פתרון בשדה K.***
השדה המובטח (קרי: K) נקרא **הרחבה סגורה באופן אלגברי של שדה המספרים הרציונליים**.

יתר על כך, הניסוח הנ"ל יכול להיות מוכלל לכל שדה F. זאת אומרת, ***לכל שדה F יש הרחבה יחידה הסגורה באופן אלגברי של F, אשר תסומן K, כך שלכל משוואה אלגברית עם מקדמים בשדה K יש פתרון בשדה K.***

פרנקל מגדיש כי הניסוח המופשט הזה לא מדבר על מספרים ולא מזהה את פעולות השדה עם חיבור וכפל במובנם הרגיל. ניסוח זה אופייני לאלגברה המודרנית אשר לא עוסקת בעצמים (כגון מספרים) אלא ביחסים שבין עצמים (כגון פעולות צירוף והאקסיומות החלות עליהן). השקפה זו מטרימה את תוכנו של פרק 5, והיא מקובלת ככמעט מובנת מאליה כיום (למרות שלא כך היה המצב לפני כמאה שנה ויותר).

סעיף 8.4: חילוק המעגל

(לא מצאתי עניין בסעיף זה, אשר מתקשר בסופו של דבר לתוכן סעיף 3.2 אשר עסק במספרים ראשוניים מן הצורה 2^m+1.)

(ראו סעיף 17.4 אשר עוסק באותו נושא מנקודת יציאה גאומטרית.)

[בהדפסה המצויה בידי (משנת 1953) הופיע הכרך הראשון הכולל את שלושת החלקים הראשונים (קרי: פרקים 1-12) בשתי "מחציות", כאשר המחצית הראשונה כוללת את הפרקים 1-8 ואילו השנייה את הפרקים 9-12.]

חלק שלישי: פונקציות ומושג הגבול (אנליזה)

למרות שפונקציות מרוכבות מוזכרות במספר מקומות בחלק זה, הנושא שלו הוא האנליזה של פונקציות ממשיות, ובפרט הביסוס של מושגי הנגזרת והאינטגרל ושל המניפולציה שלהם. הסגנון של חלק זה שונה מהסגנון של החלקים הקודמים: הקשר למדעי הטבע מובלט הרבה יותר, ואילו העקרונות המנחים המתמטיים מובלטים פחות. סגנון הסקירה שלי ישתנה בהתאם. בפרט, בפרקים 9-10 אני סוטה באופן משמעותי מאופן הצגת החומר בספר המקורי. סטיות נוספות מן המקור מופיעות גם בפרקים 11-12, אך אלו משמעותיות פחות.

פרק תשיעי: פונקציות ממשיות

המטרה המוצהרת כאן היא לתת ביטוי ל***יחסים פונקציונליים בין גדלים*** משתנים שונים, כאשר ההקשר החוץ-מתמטי קובע מיהם הגדלים המשתנים ואילו גדלים הם קבועים. (פרנקל דן בפירוט במספר דוגמאות של יחסים פונקציונליים כאלו אשר מופיעים בתורות מדעיות שונות.) הגדלים המשתנים מיוצגים על ידי **משתנים** פורמליים שטווח ההשתנות שלהם היא תת-קבוצה של המספרים הממשיים. המקרים האופייניים הם ***אינטרוול סגור*** (הכולל את קצותיו) או ***אינטרוול פתוח*** (שלא כולל אותם) או אינטרוול סגור למחצה. (קבוצת כל הממשיים נחשבת, לשם נוחות, אינטרוול פתוח.)

אם היחס הפונקציונלי מבטא משתנה אחר כפונקציה של שאר המשתנים נאמר שביטוי זה הוא **מפורש**, ואם הביטוי מוצג באמצעות משוואה כלשהיא (אשר קובעת שפונקציה של כמה משתנים שווה לאפס) נאמר שהביטוי **סתום**. בביטויים עשויים להופיע קבועים מפורשים (כגון: 2) וגם קבועים אשר מסומנים באותיות (בדרך כלל מתחילת הא"ב, בניגוד למשתנים אשר מסומנים באותיות מסוף הא"ב). ההבחנה בין משתנים לקבועים (בלתי מפורשים) "נתונה מבחוץ".

(אם פונקציה (במשתנה אחד) הינה מונוטונית (ממש), אז היא הפיכה. במקרה זה ניתן לעבור מייצוג של ערך משתנה אחד כפונקציה של השני לייצוג של ערך השני כפונקציה של הראשון.)

פונקציה נקראת **רציונלית** אם ניתן לבטא אותה באמצעות מספר סופי של קבועים ממשיים ופעולות חשבון (של הממשיים אשר מורחבות לפונקציות אלו). פונקציות אלו ניתנו לביטוי כמנה של פולינומים, ובייצוג הקנוני שלהם יידרש שלשני הפולינומים לא יהיה גורם משותף ושהמקדם המוביל של המונה הוא 1. נאמר ששני פונקציות רציונליות שוות אם הייצוג הקנוני שלהן זהה (לחילופין ניתן להגדיר שיווין באופן אנלוגי לנעשה בסעיף 4.3).

פונקציה f נקראת **אלגברית** אם היא מהווה פתרון של משוואה אלגברית (קרי: F(x,f(x))=0, עבור פונקציה רציונלית F). בפרט, פונקציה רציונלית היא אלגברית (רמז: F(x,y)=y-f(x)). מן הנאמר בסעיף 8.3 (תת-סעיף (א)) נובע כי לא בהכרח ניתן לבטא את f באמצעות מספר סופי של פעולות חשבון כולל הוצאת שורשים (טבעיים).

הפונקציות האלגבריות הינן אינהרנטיות לאריתמטיקה שהוגדרה על המספרים הממשיים. בניגוד לכך, הפונקציות ה**טריגונומטריות** מוגדרות על בסיס הגאומטריה האוקלידית, וקל להראות שאינן אלגבריות על ידי שימוש במחזוריות שלהן (אשר עומדת בסתירה לעובדה שלמשוואות אלגבריות יש מספר חסום של שורשים). פונקציות שאינן אלגבריות נקראות **טרנסצנדנטיות**. גם פונקציית המעריך (פונקציה אקספוננציאלית) הינה טרנסצנדנטית.

באופן שרירותי מבחינה עיונית (אך לא שרירותי מבחינה מעשית/פרקטית) מכנים את אוסף הפונקציות הרציונליות בצירוף עם הפונקציות הטריגונומטריות (וההפוכות להן) והפונקציה המעריכית (וההפוכה לה) בשם **בסיסיות**, ואת הפונקציות המתקבלות מהן במספר סופי של פעולות חשבון והרכבה בשם **אלמנטריות**.

לשם הרחבת התמונה, נציין שבמקרה של פונקציות מרוכבות, ניתן לייצג את כל הפונקציות האלמנטריות בעזרת מספר סופי של פעולות חשבון והרכבה של פונקציית המעריך וההפוכה לה. רמז

לשימושיות של הגדרת פונקציות מרוכבות ניתן על ידי העובדה שבעוד שפונקציית המעריך הממשית מקבלת רק ערכים חיוביים, הרי שפונקציית המעריך המרוכבת מקבלת גם ערכים שליליים, למרות שאינה מקבלת את הערך אפס. (רמז: היא עוברת מן החיוביים אל השליליים דרך ערכים לא ממשיים (קרי: דימיוניים).)

פרק עשירי: הקדמה לחשבון האינפיניטסימלי

החשבון האינפיניטסימלי נותן מענה לשתי שאלות טבעיות הנוגעות לפונקציות ממשיות. השאלה הראשונה היא שאלת "קצב ההשתנות" של פונקציה נתונה בנקודה נתונה (קרי: הנגזרת שלה), והשאלה השנייה נוגעת ל"שטח שכלוא בין הפונקציה ובין קו אופקי" באינטרוול נתון (קרי: האינטגרל שלה). שתי השאלות הן בעלות מובן רק בהנחה שהפונקציה "לא מתפרעת" בסביבה (ה"אינפיניטסימלית") הרלוונטית (קרי: בסביבת הנקודה במקרה הראשון ובסביבת כל נקודה בתחום האינטרוול במקרה השני), אך מושגי ה"התפרעות" שונים בשני המקרים (למרות שהם מתלכדים בדרך כלל לגבי הפונקציות המסוימות שהוזכרו עד כה). (פרנקל מדגים את מושג הנגזרת במקרה של נפילה חופשית ואת מושג האינטגרל במקרה של חישוב שטח של עיגול.)

המושג של **סביבה אינפיניטסימלית** (קרי: "קטנה לאין שיעור" או "קטנה כרצוננו") מרכזי לביסוס הרעיונות המעורפלים הנ"ל. מושג זה הוא בסיס אפשרי להגדרת מושג ה**גבול של פונקציות**. לחילופין, אפשר להגדיר את הגבול של פונקציות על ידי הסתמכות על מושג ה**גבול של סדרות**.

מושג הגבול של פונקציות משמש להגדרת מושג ה**רציפות** של פונקציות (שהינו תנאי מספיק לאינטגרליות שלהן) ומושג ה**גזירות** של פונקציות (אשר חזק ממנו). אינטואיטיבית, רציפות בנקודה אומרת שערך הפונקציה בנקודה מקורב "טוב כרצוננו" על ידי ערכה בסביבה (האינפיניטסימלית) של הנקודה, בעוד שגזירות בנקודה אומרת שהפונקציה "מתנהגת כמו פונקציה לינארית" בסביבה (האינפיניטסימלית) של הנקודה.

כאשר הפונקציה רציפה באינטרוול מסוים, ניתן לקרב (טוב כרצוננו) את האינטגרל ע"י סכומים (סופיים) של ערכי הפונקציה בסדרות של נקודות צפופות מספיק של האינטרוול, ואילו כאשר הפונקציה גזירה בנקודה מסוימת ניתן לקרב את קצב ההשתנות שלה בנקודה זו על ידי קצב ההשתנות של הפונקציה הלינארית הרלוונטית. שימו לב כי במקרה של רציפות אנחנו מתעניינים בגבול של פונקציה שיורית (אשר מתארת את סטיית ערך הפונקציה המקורית מן הערך בנקודה הנתונה כפונקציה של המרחק מן הנקודה הנתונה), ואילו במקרה של גזירות אנחנו מתעניינים בגבול של היחס שבין הפונקציה השיורית הזו לבין הפונקציה הלינארית הזהותית (קרי: $I(x)=x$).

מכיוון שמושג הגבול של סדרות נתפס ב"פשוט" או "בסיסי" יותר ממושג הגבול של פונקציות ממשיות, אשר מניח את מושג המספרים הממשיים (ראו: פרק 6), נהוג לפתוח בדיון בו.

סעיף 10.1: סדרות וטורים אינסופיים

כבר השתמשנו בסדרות אינסופיות וגם (במובלע) במושג הגבול שלהן (בסעיף 6.3). כאן יוגדרו מושגים אלו במפורש. סדרה אינסופית (של מספרים מתחום מסוים) הינה התאמה חד-חד-ערכית של מספרים טבעיים למספרים (מן התחום הזה). סדרה כזו **מתכנסת** למספר L, אשר קרוי **הגבול** שלה, אם לכל מרווח חיובי קיים מיקום בסדרה כך שהחל ממנו כל איברי הסדרה קרובים עד כדי מרווח זה למספר L. להלן כמה דוגמאות לסדרות מתכנסות ולא מתכנסות:

- הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא $1/\mathbf{n}$ מתכנסת לאפס.
- הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא **n** אינה מתכנסת (ואפילו אינה "חסומה").
- הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא $(-1)^n$ אינה מתכנסת (למרות שהיא "חסומה").
- הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא $(1+(1/\mathbf{n}))^n$ מתכנסת לבסיס הלוגריתם הטבעי (קרי: e).

- "הפרדוקס של זנון" (ראו התאמה לטורים בהמשך): הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא הסכום $b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}+\ldots+b^{-n}$, כאשר b>1, מתכנסת למספר b/(b-1).

טור אינסופי הוא "הסכום האינסופי" של סדרה אינסופית (ז"א המחובר ה**n**י בטור הוא האיבר ה**n**י בסדרה המקורית). טור כזה מתכנס אם סדרת הסכומים הסופיים המתאימה (קרי: האיבר ה**n**י בסדרה המוגדרת עפ"י הטור הוא סכום **n** המחוברים הראשונים בטור) מתכנסת. (אכן, הפרדוקס של זנון הוצג לעיל על ידי הצגת סדרת הסכומים הסופיים.) מצד שני, לכל סדרה אינסופית ניתן להתאים טור שאיבריו הם ההפרשים של מספרים עוקבים בסדרה המקורית (כאשר המספר הקודם לראשון מוגדר כאפס) כך שהטור מתכנס אם ורק אם הסדרה המקורית מתכנסת.

סעיף 10.2: להגדרת הנגזרת

כפי שנאמר לעיל, קצב ההשתנות של פונקציה בנקודה נתונה (קרי: הנגזרת שלה) מוגדר כקצב ההשתנות של הפונקציה הלינארית אשר מקרבת את הפונקציה המקורית בסביבה האינפיניטסימלית של הנקודה הנתונה. השאלה היא אם קיימת פונקציה כזאת (קרי: האם ניתן "לקרב" את הפונקציה המקורית על ידי פונקציה לינארית). אינטואיטיבית, השאלה היא האם קיימת פונקציה לינארית כך שלכל מידת קירוב רצויה, בסביבה קטנה מספיק, הפונקציה הלינארית אינה סוטה מן הפונקציה המקורית יותר מאשר במידה זו.

השאלה הנ"ל מנוסחת במונחים של התכנסות של פונקציות. עבור הפונקציה המקורית f והנקודה המקורית x, נגדיר פונקציה שיורית R המתארת את ההפרש בין הערך של f בנקודה x+d לערך f(x) כפונקציה של d, ונשאל האם הפונקציה R(d)/d מתכנסת בסביבת הנקודה 0, כאשר אנו מסתמכים על הגדרת מושג ההתכנסות של פונקציה בסביבת נקודה.

הגדרת **ההתכנסות של פונקציות** אומרת כי פונקציה g מתכנסת לערך L בנקודה a, אשר קרוי **הגבול** שלה בנקודה, אם לכל סביבה קטנה כרצוננו של g(a) קיימת סביבה של a אשר בה ערך הפונקציה g נמצא בסביבה (שנקבעה לעיל) של g(a).

(לסיכום: הפונקציה f **גזירה** בנקודה x אם הפונקציה g(d)=(f(x+d)-f(x))/d מתכנסת בנקודה 0. במקרה כזה, הערך של f(x+d) מקורב על ידי f(x) + L*d, כאשר L הוא הגבול של הפונקציה g בנקודה 0, והקירוב הוא עבור סביבה אינפיניטסימלית של x. במקרה זה, L הוא הנגזרת של f בנקודה x.)

סעיף 10.3: להגדרת האינטגרל

כפי שנאמר לעיל, כאשר פונקציה רציפה באינטרוול מסוים, ניתן לקרב (טוב כרצוננו) את האינטגרל שלה ע"י סכומים (סופיים) של ערכי הפונקציה בסדרות של נקודות צפופות מספיק של האינטרוול. הרציפות של הפונקציה באינטרוול מוגדרת כהתכנסות שלה בסביבה של כל נקודה לערכה בנקודה עצמה. במקרה של פונקציה רציפה, הקירוב של האינטגרל שלה על ידי סדרות של סכומים סופיים מושג ע"י בניה של זוג סדרות לכל מספר שלם כך שזוג הסכומים ה**n**י מתאים לחלוקת האינטרוול ל**n** קטעים שווי אורך. בסכום הראשון נלקחים חסמים עליונים (הדוקים) על ערך הפונקציה בכל אחד מן הקטעים (כשהוא מנורמל על ידי מכפלה באורך הקטע), ובסכום השני נלקחים החסמים התחתונים התואמים. תנאי הרציפות מבטיח ששתי הסדרות יתכנסו לערך זהה, אשר מוגדר כאינטגרל של הפונקציה באינטרוול.

הנירמול הנ"ל משקף את השטח של המלבנים המוגדרים כבעלי בסיס שהוא אורך הקטע של כל אחד מ**n** הקטעים ובעלי גובה שהוא החסם העליון או התחתון בהתאמה. בהנחה שהפונקציה חיובית בכל האינטרוול, השטח שכלוא בין הפונקציה לקו האופקי כלול במלבן הראשון וכולל את המלבן השני.

נעיר כי פעולת הגזירה והאינטגרציה, ככל שהן מוגדרות, הופכות זו את זו. בפרט, האינטגרל של פונקציה על סביבה קטנה מספיק משקף את ערך הפונקציה (עד כדי נרמולו באורך האינטרוול), מה שאומר שהקצב ההשתנות (קרי: הנגזרת) של האינטגרל בסביבה הזו הוא ערך הפונקציה בנקודה.

סעיף 10.4: על האופי החמקמק של המושגים

מהצורה בה הצגנו את מושגי הרציפות והגזירות ניתן לראות כי רציפות היא תנאי הכרחי אך לא בהכרח מספיק לנגזרות. מצד אחד, ראינו כי קיום נגזרת מאפשר לקרב את ערך הפונקציה עפ"י ערכים בסביבתה. אם נדייק יותר, הרי שקיום הגבול המוגדר ע"י הנגזרת גורר את קיום הגבול אשר נטען בהגדרת הרציפות ואת השוויון בינו לבין ערך הפונקציה. (באופן כללי יותר, אם לשתי פונקציות יש גבול בנקודה אז גם לסכומם ולמכפלתם יש גבול בנקודה.) מצד שני, קיום גבול עבור הפונקציה השיורית R בנקודה אפס אינו מבטיח את קיום הגבול של הפונקציה g(d)=R(d)/d בנקודה אפס (מכיוון שהפונקציה 1/d אינה מתכנסת בנקודה אפס).

לשם הרחבת התמונה, נציין כי **משפט ערך הביניים** (אשר חל על פונקציות רציפות) מציג תנאי חלש יותר מרציפות. (תזכורת: תנאי ערך הביניים אומר כי, בכל אינטרוול סגור, הפונקציה מקבלת באינטרוול כל ערך אשר מצוי בין הערכים שלה בקצות האינטרוול.) שלושת הפונקציות הבאות מדגימות את הפערים שבין המושגים (כאשר בכל הדוגמאות ערך הפונקציה מוגדר כאפס בנקודה אפס).

- הפונקציה sin(1/x) מקיימת את תנאי ערך הביניים אך אינה רציפה בנקודה x=0.
- הפונקציה x*sin(1/x) רציפה אך אינה גזירה בנקודה x=0.
- הפונקציה x^2 * sin(1/x) גזירה בנקודה x=0.

אבחנת המפתח היא שהפונקציה הראשונה "משתוללת" סביב ה0: היא עוברת מהערך 1+ לערך 1-, במחזוריות הולכת וקטנה (או "צפופה"). ה"השתוללות" הזו מרוסנת כאשר מכפילים בכפולות של x. דוגמאות "טבעיות" פחות אך קלות יותר לניתוח כוללות את הבאות:

- **פונקציית מדרגות** כגון הפונקציה F(x) אשר ערכה הוא המספר השלם הגדול ביותר אשר קטן או שווה למספר הממשי x. פונקציה זו אינה רציפה.
  שם לב שהערך x-F(x) נופל באינטרוול החצי-סגור [0,1).
- **פונקציה משוננת** כגון הפונקציה S(x) אשר ערכה הינו x-F(x) אם ערך זה קטן מחצי ואחרת מתקיים S(x)=1-(x-F(x)). פונקציה זו רציפה אך אינה גזירה בנקודות שהן מכפלה שלמה של המספר 0.5.

פרק אחד-עשר: ביסוס החשבון האינפיניטסימלי

פרק זה מציג ניסוחים מדויקים יותר לנאמר בפרק הקודם, וכן מציג הגדרות ומשפטים נוספים.

סעיף 11.1: מושג הגבול של סדרות ופונקציות והגדרת הנגזרת והאינטגרל

בסעיף זה נחזור על הנאמר בסעיפים 10.1-10.3 תוך שימוש בניסוחים מפורשים יותר.

תת-סעיף א: התכנסות של סדרות ופונקציות

אכן נחזור על הנאמר סעיף 10.1 תוך שימוש בניסוחים מפורשים יותר. סדרה אינסופית (של מספרים מתחום מסוים) הינה התאמה חד-חד-ערכית של מספרים טבעיים למספרים (מן התחום הזה).

הגדרה (התכנסות של סדרות): סדרה אינסופית **מתכנסת** למספר L, אשר נקרא **הגבול** שלה, אם לכל מספר ε חיובי קיים מיקום בסדרה כך שהחל ממנו והלאה כל איברי הסדרה נמצאים באינטרוול [L-ε,L+ε].

משפט (מבחן ההתכנסות של קושי): סדרה אינסופית מתכנסת אם ורק אם לכל מספר ε חיובי קיים מיקום בסדרה כך שהחל ממנו ההפרש בין שני איברים בסדרה קטן (בערך מוחלט) מ-ε.

הגדרה (התכנסות של פונקציות): סביבה של נקודה a היא אינטרוול פתוח המכיל את a. תהא f פונקציה המוגדרת על סביבה של a אך לא בהכרח על a עצמה. הפונקציה f **מתכנסת** למספר L בנקודה a, אשר נקרא **הגבול** של הפונקציה בנקודה a, אם לכל מספר ε חיובי קיים מספר חיובי δ כך שלכל x באינטרוול $[a-\delta,a+\delta]$, למעט אולי a עצמו, הערך של f(x) נמצא באינטרוול $[L-\varepsilon,L+\varepsilon]$.

משפט (שקילות ההגדרות): תהא f פונקציה המוגדרת על סביבה של a אך לא בהכרח על a עצמה. הפונקציה f מתכנסת למספר L בנקודה a אם ורק אם לכל סדרה בסביבה של a אשר מתכנסת ל-a הסדרה המתאימה של ערכי f מתכנסת לערך L.

(הגדרות מתאימות חלות על סדרות החסומות מצד אחד ופונקציות אשר מוגדרות על "חצאי סביבות" (כדוגמת האינטרוול $[a,a+\varepsilon]$, ובמקרה זה חלה שקילות דומה.)]

כפי שהוזכר בסעיף 10.4, אם לשתי פונקציות יש גבול בנקודה אז גם לסכומם ולמכפלתם יש גבול בנקודה. אותה טענה תקפה גם ביחס להעלאה בחזקה (כאשר פונקציה אחת משמשת כבסיס והשנייה כמעריך).

תת-סעיף ב: רציפות, גזירות ואינטגרביליות של פונקציות

כעת נחזור על הנאמר בסעיפים 10.2-10.3 תוך שימוש בניסוחים מפורשים יותר.

הגדרה (רציפות): תהא f פונקציה המוגדרת על סביבה של a (כולל על a עצמה). הפונקציה f **רציפה בנקודה a** אם היא מתכנסת בנקודה a וערך הגבול שווה למספר f(a).
נאמר שהפונקציה f רציפה באינטרוול מסוים אם היא רציפה בכל נקודה באינטרוול.

הגדרה (גזירות ונגזרת): תהא f פונקציה המוגדרת על סביבה של a. הפונקציה f **גזירה** בנקודה a, אם הפונקציה $F_a(z)=(f(z+a)-f(a))/z$ מתכנסת בנקודה 0. במקרה זה, הגבול של F_a בנקודה a נקרא **הנגזרת של f בנקודה a**.
אם f גזירה בכל נקודה באינטרוול מסוים, אז הפונקציה המתאימה לכל נקודה באינטרוול את הנגזרת של f בנקודה זו נקראת הנגזרת של f באינטרוול.

הערה: למרות שהנגזרת מוגדרת בהתבסס על התכנסות בסביבה, הרי שנוח (ונהוג) לחשב אותה על סמך "חצי הסביבה" של המספרים הגדולים מהנקודה.

הגדרה פשטנית (אינטגרל): תהא f פונקציה המוגדרת באינטרוול [a,b] וחסומה בו (קרי: קיימים חסמים $L \le U$ כך שלכל x באינטרוול מתקיים $L \le f(x) \le U$). לכל חלוקה של האינטרוול ל**n** קטעים שווי-אורך נגדיר את **החסם התחתון (בהתאמה: העליון) של החלוקה** כסכום של מכפלת אורכי הקטעים (קרי: **n**/(b-a)) בערך הגבוה (בהתאמה: הנמוך) ביותר של הפונקציה בקטע הרלוונטי. הפונקציה f היא **אינטגרבילית** באינטרוול [a,b] אם סדרת החסמים התחתונים (שבה האיבר ה**n**י מתייחס לחלוקה ל**n** קטעים שווי-אורך) מתכנסת לאותו גבול כמו סדרת החסמים העליונים. גבול זה נקרא האינטגרל (המסוים) של f באינטרוול.

ההגדרה ה"אמיתית" (למעשה קיימות כמה כאלו) משתמשת בסדרות אשר האיבר ה**n**י שלהן מתייחס לחלוקה כלשהי ל**n** קטעים (קרי: לא בהכרח שווי-אורך). לחסמים התחתונים (בהתאמה: עליונים) נלקחות הסדרות אשר נותנות את החסמים ה"טובים" ביותר.

בסעיף 12.1 מוכח כי רציפות היא תנאי הכרחי לגזירות ותנאי מספיק לאינטגרביליות.

לשם הרחבת התמונה, נציג גם את ההגדרה הבאה.

הגדרה (רציפות במידה שווה): תהא f פונקציה המוגדרת באינטרוול (סגור או פתוח). הפונקציה f **רציפה במידה שווה באינטרוול** אם לכל מספר ε חיובי קיים מספר חיובי δ כך שלכל זוג מספרים x<y באינטרוול המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

שימו לב כי הגדרת רציפות בכל הנקודות של האינטרוול אומרת כי לכל x באינטרוול ולכל מספר ε חיובי קיים מספר חיובי δ (אשר עשוי להיות תלוי בx) כך שלכל y באינטרוול אשר מקיים $|x-y|<\delta$ מתקיים גם $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. מכאן, שרציפות במידה שווה גוררת רציפות, אך ההפך אינו בהכרח נכון (אלא אם האינטרוול המדובר סגור (ראו: "משפט קנטור" (שבו מדובר בפסקה הבאה))).

(ההוכחה של משפט קנטור מדגימה את הנוחות שבשימוש בהגדרת התכנסות של פונקציות במונחים של התכנסות של סדרות (ראו משפט השקילות בתת-סעיף א). אם נניח בדרך השלילה אי-קיום של רציפות במידה שווה, נקבל $\varepsilon>0$ וסדרה של זוגות איברים (באינטרוול) אשר ההפרש ביניהם מתכנס לאפס אך ההפרש בין ערכי הפונקציה שלהם הוא לפחות ε. הסדרה של האיברים הראשונים בזוגות האלו מכילה תת-סדרה מתכנסת, והגבול של תת-סדרה זו מצוי באינטרוול (משום שהוא סגור). אם נסתכל על תת-הסדרה התואמת של האיברים השניים בזוגות, נקבל סדרה אשר מתכנסת לאותו גבול, אלא שערכי הפונקציה לא מתכנסים לערך בנקודת הגבול, וזאת בסתירה להנחת הרציפות.)

סעיף 11.2: הלוגריתמים הטבעיים

כפי שנאמר בסעיף 10.1, הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא $(1+(1/\mathbf{n}))^{\mathbf{n}}$ מתכנסת לבסיס הלוגריתם הטבעי (קרי: e), אשר מוגדר על ידה, שהינו מספר טרנסצנדנטי (ובפרט: אי-רציונלי). למעשה, עבור כל מספר ממשי r הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא $(1+(r/\mathbf{n}))^{\mathbf{n}}$ מתכנסת למספר e^r, ובאופן דומה מוגדרת הפונקציה e^x. ראוי לציין כי לפונקציה e^x יש את התכונה הייחודית (בין הפונקציות האקספוננציאליות) שהנגזרת שלה שווה לפונקציה עצמה.

פונקציית הלוגריתם (הטבעי) היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה האקספוננציאלית הנ"ל (קרי: e^x).

(הערה: התכנסות הסדרה שהאיבר ה**n**י שלה הוא $(1+(1/\mathbf{n}))^{\mathbf{n}}$ מוכחת על ידי שימוש בנוסחת הבינום וניתוח הטור האינסופי שהמחובר ה**m**י שלו הוא **1/m!**.)

סעיף 11.3: טורים של מספרים ושל פונקציות

כפי שנאמר בסעיף 10.1, המושג של טור (אינסופי) מתכנס אינו מוסיף דבר מעבר למושג של סדרה מתכנסת, אבל הוא (קרי: מושג הטור המתכנס של מספרים) משמש נקודת התחלה להגדרה של טור פונקציות מתכנס. פרנקל מציין כמה שימושים של טורי פונקציות מתכנסים. הראשון שבהם הוא הצגה של פונקציות שונות (ובפרט "לא אלמנטריות") כגבול של טורים של פונקציות אלמנטריות (כגון טורי חזקות וטורי פורייה). הצגה כזו גם מאפשרת לקרב את הפונקציות המקוריות על ידי סכומים חלקיים מתאימים (ראו קירובי טיילור ופורייה). שימוש נוסף שהוזכר הוא לשם בנייה של דוגמאות נגדיות להשערות שונות. (בנוסף יש להם שימושים רבים באנליזה של פונקציות ממשיות ומרוכבות.)

תת-סעיף א: טורים של מספרים

הגדרה (התכנסות טור של מספרים): בהינתן סדרה אינסופית של מספרים, הטור האינסופי המתאים מוגדר כסדרה של הסכומים החלקיים של הסדרה המקורית (קרי: האיבר ה**n**י בטור הוא סכום **n** האיברים הראשונים בסדרה הנתונה). הטור **מתכנס** אם הסדרה המוגדרת כאן (קרי: סדרת הסכומים החלקיים) מתכנסת.

תנאי הכרחי להתכנסות של טור המוגדר ע"י סכומים חלקיים של סדרה נתונה, היא שהסדרה הנתונה תתכנס לאפס. תנאי מספיק לכך הוא שהיחס בין איברים עוקבים הינו חיובי וחסום מלעיל על ידי מספר קבוע הקטן מ1. (שימו לב שטור מתכנס אם ורק אם הטור המתקבל כאשר משמיטים מספר סופי של איברים (מן הסדרה המקורית) מתכנס.) לסדר של האיברים בסדרה המקורית יכולה להיות חשיבות לגבי שאלת ההתכנסות (ראו המקרה של הסדרה המקורית בה האיבר ה**n**י הוא $(-1)^{\mathbf{n}+1}/\mathbf{n}$ וסידור מחדש שלה בבלוקים כך שהבלוק ה**m**י מכיל את $2^{\mathbf{m}}$ האיברים הבאים עם הסימן $(-1)^{\mathbf{m}+1}$). דבר זה נמנע במקרה של טור מתכנס בהחלט.

הגדרה (התכנסות בהחלט): בהינתן סדרה אינסופית של מספרים, הטור האינסופי המתאים **מתכנס בהחלט** אם הטור אשר מתאים לערכים המוחלטים של הסדרה המקורית מתכנס.

הסימון Σ בו משתמשים לייצוג טורים הוא סימון בלבד, אך אותו דבר נכון גם לגבי שימוש בסימון זה לסכום סופי. בשני המקרים הסימון מייצג תהליך אשר מגדיר סכום. במקרה הסופי מדובר בתהליך סופי של הפעלת פעולת החיבור, ואילו במקרה האינסופי מדובר בסדרה של תהליכים כאלו. בפרט, המושג של סכום סופי או אינסופי אינו נתון לנו מראש, אלא מוגדר על ידינו באופן מסוים (על בסיס הגדרת החיבור).

תת-סעיף ב: טורים של פונקציות

הגדרה (התכנסות טור של פונקציות): בהינתן סדרה אינסופית של פונקציות המוגדרות כולן מעל אינטרוול מסוים, נגדיר את טור הפונקציות המתאים כסדרה של הסכומים החלקיים של הסדרה המקורית. הטור **מתכנס** בנקודה מסוימת באינטרוול אם הטור של ערכי הפונקציות בנקודה זו מתכנס, ונקודה זו נקראת **מקום התכנסות**. אם הטור מתכנס בכל נקודה באינטרוול נאמר שהוא מתכנס באינטרוול, והאינטרוול יקרא **תחום התכנסות** (ובהא הידיעה אם הוא מקסימלי).

דוגמה חשובה של טורים מתכנסים ניתנת על ידי ההגדרה הבאה.

הגדרה (טור חזקות): טור הפונקציות המוגדר על ידי הסדרה שהפונקציה ה**n**י שלה היא כפולה של מספר ממשי (להלן: המקדם ה**n**י) בפונקציה $\mathbf{x^{n-1}}$ נקרא **טור חזקות.**

משפט (התכנסות של טור חזקות): לכל טור חזקות ישנו אינטרוול (פתוח או סגור או סגור למחצה) סביב האפס שהוא תחום ההתכנסות שלו (בהא הידיעה). בפרט:

- כאשר המקדם ה**n**י הוא **n**/1! תחום ההתכנסות הוא אינסופי.
- כאשר המקדם ה**n**י הוא **n**! תחום ההתכנסות מכיל רק את הנקודה 0.
- כאשר כל המקדמים שווים, תחום ההתכנסות הוא האינטרוול הפתוח (0,1).

בניגוד לציפיות, "ההתנהגות" של טור של פונקציות שמתכנס באינטרוול אינה משקפת בהכרח את "התנהגות" של הפונקציות באינטרוול (לדוגמא: הטור יכול להתכנס לפונקציה ששונה מהותית מכל אחת מן הפונקציות שבסדרת הסכומים הסופיים אשר מגדירה את הטור). שורש הדבר בהתכנסות ב"מידה לא שווה" של הטור בנקודות שונות. באנלוגיה לנאמר בסעיף 10.1, שימו לב כי הגדרת התכנסות בכל הנקודות של האינטרוול אומרת כי לכל x באינטרוול קיים ערך F(x) כך שלכל מספר ε חיובי קיים מיקום בסדרה (קרי: קיים **n**) כך שממקום זה והלאה כל הסכומים החלקיים של ערכי הפונקציות השונות בנקודה x נמצאים באינטרוול $[F(x)-\varepsilon,F(x)+\varepsilon]$. תיקון לאי-האחידות של מיקומי ההתכנסות מוצג על ידי ההגדרה הבאה.

הגדרה (התכנסות במידה שווה של טור פונקציות): טור פונקציות **מתכנס במידה שווה באינטרוול** אם כי לכל מספר ε חיובי קיים **n** כך שלכל נקודה x באינטרוול קיים ערך F(x) כך שכל הסכומים החלקיים של ערכי n או יותר הפונקציות בנקודה x נמצאים באינטרוול $[F(x)-\varepsilon,F(x)+\varepsilon]$.

בפרט, אם טור של פונקציות שכולן רציפות באינטרוול מסוים מתכנס במידה שווה אז הפונקציה המוגדרת על ידי התכנסות זו הינה רציפה.

סעיף 11.4: פיתוח פונקציות על ידי טורים של פונקציות אלמנטריות

התועלת שבהצגת פונקציות כטורים של פונקציות אלמנטריות הוא שהאחרונות קלות יחסית לניתוח. בפרט, התכנסות של הטור מאפשרת לקרב את ערך הפונקציה הנתונה על ידי סכום סופי של פונקציות פשוטות יותר. בפרט, מוכרת ההצגה של פונקציה כלשהיא כטור חזקות (עם מקדמים הנקבעים על ידי הנגזרות העוקבות של הפונקציה) והקירוב הנובע מכך (קרי: טור טיילור).

פרק שנים-עשר: צעדים נוספים בחשבון האינפיניטסימלי

לאחר ביסוס המושגים היסודיים של החשבון האינפיניטסימלי, נפנה לסקירה של צעדים ראשוניים בתחום זה. בפרט, בסעיף 12.1 נסקור כמה משפטים בסיסיים, ובסעיף 12.2 נסקור את חישוב הנגזרת והאינטגרל של פונקציות אלמנטריות. בסעיפים האחרונים תינתן סקירה שטחית ביותר של נושאים שמעבר לנ"ל.

סעיף 12.1: משפטים בסיסיים

בסעיף זה (במקור) מוכח כי רציפות היא תנאי הכרחי לגזירות ותנאי מספיק לאינטגרביליות. בנוסף מוכחים משפטי ערך ביניים לנגזרת ולאינטגרל. מודגש כי קיימת פונקציה רציפה על כל הממשיים אשר אינה גזירה בשום נקודה.

משפט ערך ביניים של החשבון הדיפרנציאלי: אם f גזירה באינטרוול [a,b] אז קיימת נקודה x באינטרוול שהנגזרת שלה שווה לערך (f(b)-f(a))/(b-a).

משפט ערך ביניים של החשבון האינטגרלי: אם f אינטגרבילית וחסומה (מלעיל ומלרע) באינטרוול [a,b] אז קיים ערך v כך שערך האינטגרל באינטרוול [a,b] שווה לערך v * (b-a). אם f גם רציפה באינטרוול אז קיימת נקודה x באינטרוול אשר מקיימת f(x)=v.

פרנקל מציג את **"המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי"** (המוזכר בסוף סעיף 10.3) בהקשר של סעיף 12.2 (אלא שנראה לי שהמיקום הנוכחי הולם יותר). בכל מקרה, המשפט אומר כי *עבור f שהינה אינטגרבילית באינטרוול [a,b], נגדיר את F באינטרוול כך שיתקיים כי F(x) שווה לערך האינטגרל של f באינטרוול [a,x]. אז F גזירה בכל נקודה בה f רציפה, וערך הנגזרת של F בכל נקודה כזו שווה לערכה של f בנקודה.*

פרנקל מדגיש כי למעשה לא נעשה שום שימוש במושג של גודל "קטן (או גדל) לאינסוף" (או "גדלים אינפיניטסימליים"). הגדרת ההתכנסות (והגבול) וההגדרות הנסמכות עליה מנוסחות במונחים של גדלים סופיים, ורק תהליך העיון בהם (כסדרה) הוא אינסופי.

סעיף 12.2: הנגזרת והאינטגרל של פונקציות אלמנטריות

סעיף זה הוא טכני במהותו. מוכחות בו הנוסחאות הידועות לנגזרת של סכום, מכפלה, מנה, והרכבה של פונקציות. בנוסף, מטופלות הפונקציות האלמנטריות האחרות (ובפרט הטריגונומטריות והלוגריתם וההופכיות שלהן). בפרט, התברר שהנגזרות של הפונקציות הרציונליות הן פונקציות רציונליות, והנגזרות של הפונקציות האלמנטריות הן פונקציות אלמנטריות.

הדיון בחישוב האינטגרל (המסוים) של פונקציות, ובפרט הרצון להציע נוסחאות שאינן תלויות בתחום מסוים, מוביל להגדרת האינטגרל הלא מסוים של פונקציה (אשר מופיע במובלע ב"משפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי" (ראו לעיל)). השרירותיות של נקודת ההתחלה (שבהגדרת הפונקציה F במשפט הזה), מובילה לכינוי "לא מסוים" (כאשר השוני בנקודות התחלה (בתחום בו f רציפה) מתרגם לקבוע חיבורי) ולראיית האינטגרל הלא מסוים כאוסף פונקציות (השוות עד כדי קבוע חיבורי כאשר לכל אחת F מהן מתקיים כי F(b)-F(a) הינו ערך האינטגרל של f באינטרוול [a,b]).

בניגוד למצב ביחס לנגזרת, האינטגרל של פונקציה רציונלית אינו בהכרח פונקציה רציונלית (ראו לדוגמא את הפונקציה 1/x שהאינטגרל שלה הוא ln x), והאינטגרל של פונקציה אלמנטרית אינו "בדרך כלל" פונקציה אלמנטרית. מצב זה מצריך פיתוח שיטות לחישוב אינטגרלים.

פרנקל דן ארוכות ב"פרדוקס" שבין הפשטות העיונית של אינטגרל (המבוסס על חיבור ומסתפק ברציפות) לעומת הנגזרת (המבוססת על חיסור ואינה מסתפקת ברציפות (אשר חיונית גם עבורה)) לבין הקושי המעשי בחישוב אינטגרלים לעומת המצב עם נגזרות.

סעיף 12.3: ערכי קיצון והנגזרת השנייה

השימושים בנגזרת הראשונה לקביעת אופן ההשתנות של הפונקציה (כאשר הנגזרת אינה מתאפסת) ובנגזרת השנייה לקביעת נקודות קיצון (כאשר הנגזרת השנייה לא מתאפסת) ידועים היטב. פרנקל מדגיש כי התאפסות שתי הנגזרות משאירה אותנו באי-ידיעה, אשר יכולה "להיפתר" על ידי שימוש בנגזרות גבוהות יותר. (בחשבון אחרון, סעיף זה הוא טכני במהותו.)

סעיף 12.4: משוואות דיפרנציאליות

משוואה דיפרנציאלית היא משוואה שבה הנעלם הוא פונקציה, ואילו המשוואה מתארת תלות בין הפונקציה ונגזרותיה. במקרה כזה הפונקציה הנעלמת מוצגת כמשתנה בודד, אך מדובר במשתנה שהוא פונקציה של המשתנים האחרים. לדוגמא, אם נסמן את הנגזרת של f על ידי f', הרי שניתן לרשום משוואות כגון $f'(x) + p(x) * f(x) = q(x)$, ואם נחליף את f(x) על ידי y ניתן לכתוב את המשוואה $y' + p(x) * y = q(x)$. התיאור הנ"ל מתאים למשוואות מ**מעלה** ראשונה (קרי: החזקה שבה הפונקציה מופיעה במשוואה), מ**סדר** ראשון (קרי: הנגזרת הגבוהה ביותר אשר מופיעה), והיא משוואה **רגילה** (קרי: הפונקציה המופיעה בה היא של משתנה יחיד). מקרים כלליים יותר נפוצים ביישומים; בפרט, **משוואות דיפרנציאליות חלקיות** מתייחסות לפונקציות בכמה משתנים ונגזרות חלקיות (ראו אזכור מפורש בסעיף 12.5).

סעיף 12.5: כיווני התפתחות

מעבר לאיזכור הנ"ל, מוזכרת גם התורה של אנליזה של פונקציות מרוכבות והקשר שלה לתורה המטפלת במשוואות דיפרנציאליות חלקיות. בהקשר זה עולה גם תורה של משוואות אינטגרליות.

בסיום, מהרהר פרנקל בחשיבות ה"שפה המתמטית" כמערכת סימבולית המאפשרת חקירה של הטבע, ומציין את חשיבות התפתחותה כשלעצמה. התפתחות זו יש שהיא נדחפת על ידי צרכים של מדעי הטבע (והחשבון האינפיניטסימלי ותורת האנליזה שצמחה ממנו היא דוגמה מובהקת לכך) ויש שהיא מקדימה את הצרכים (כמו הגאומטריה של רימן ששימשה את איינשטיין בתורת היחסות הכללית).

חלק רביעי: תורת הקבוצות והאינסוף המוחלט

בניגוד לדעות קדומות, בחלק השלישי (קרי" "אנליזה") לא נעשה למעשה שום שימוש במושג של גודל "קטן (או גדל) לאינסוף" (או "גדלים אינפיניטסימליים"). מושגים אלו יהיו למעשה במוקד של החלק הנוכחי העוסק בתורת הקבוצות, משום שהמוקד של עיסוק זה הוא בקבוצות אינסופיות (ובמספרים אשר מתייחסים אליהם).

חלק זה והבאים אחריו, נכתבו בשנת 1945, והובאו לדפוס לראשונה בשנת 1953. סגנון הכתיבה בחלק זה שונה מן הסגנון של החלקים הקודמים: בפרט, ההצגה איטית יותר, וכוללת הרבה דוגמאות וכן תרגילים. בהתאם לכך, הסקירה שלי תהא רחוקה יותר מן הטקסט המקורי.

כמו כן, בחרתי להמשיך את מספור הפרקים מן ה"כרך הראשון" וכדי להדגיש עובדה זו השתמשתי במספור בספרות במקום במילים.

פרק 13: קבוצות סופיות ואינסופיות

מושג הקבוצה לא מוגדר למעשה. מה שמוגדר הוא יחס השייכות (של איבר לקבוצה), וכללים החלים עליו (קרי: אקסיומות). חוסר העניין ב"מהותם" של דברים כשלעצמם הוא בבסיסה של המתמטיקה, ואילו חוסר ההגדרה של מושגים כשלעצמם (בניגוד לאופן שהם מתייחסים או פועלים זה על זה) הינו אופייני ל"מתמטיקה החדשה" (שעוד כונתה כך בזמן כתיבת הספר).

על בסיס יחס השייכות מוגדרים המושגים של קבוצה חלקית וקבוצות זרות. המושג של שקילות ("אקוויוולנציה") בין קבוצות (שכבר הופיע בפרקים קודמים) מוגדר תוך הסתמכות על המושג של ההתאמה החד-חד-ערכית (אשר מוצג כראשוני ו/או כמובן מאליו). דברים אלו, חוזרים על הנאמר בפרק הראשון. בנוסף מוגדר המושג של קבוצה **בת-מניה** (כאקוויוולנטית לקבוצת המספרים השלמים), ונובע מהגדרת קבוצת השלמים שזו העוצמה הקטנה ביותר, כאשר עוצמה היא מספר מונה אינסופי (ראו הפרקים הבאים).

סעיף התנצלות: על חשיבותה והשפעתה של תורת הקבוצות

נראה שהצורך בהתנצלות (אפולוגטיקה) נובע מן הדעה הנפוצה בחוגים מתמטיים מסוימים. כמענה לדעה הזו, מציין פרנקל כי הכוח המניע הראשוני להתפתחות תורת הקבוצות נבע מתורת האנליזה של פונקציות ממשיות (ראו חלק שלישי). בנוסף, הייתה לתורת הקבוצות השפעה חשובה על התפתחות הגיאומטריה והאלגברה המופשטת (ראו: פרק 5), וכמובן שבביסוס המושגים הראשוניים של המתמטיקה (כגון: מספר, פונקציה, סדר ועוד).

פרק 14: מספרים אינסופיים

האם יש טעם בכלל במושג השקילות? אם כל הקבוצות האינסופיות הן בנות-מניה, אז מושג השקילות לקבוצות אינסופיות הוא טריוויאלי (קרי: כל הקבוצות האינסופיות שקולות זו לזו). אלא, שבניגוד להשערות קודמות, התברר שאין הדבר כך. למעשה קיימים אינסוף גדלים של "אינסוף" שכל אחד מהם גדול מקודמו במובן שהקטן שקול לתת-קבוצה חלקית של הגדול, אבל הגדול אינו שקול לתת-קבוצה חלקית של הקטן. אכן מוגדר כאן יחס סדר בין גדלים, אבל אין אנחנו קובעים מסמרות בשלב זה לגבי השאלה האם יחס הסדר הזה הוא מלא (קרי: יתכן שזה סדר חלקי).

ה"גדלים" השונים הללו נקראים "מספרים אינסופיים" או **עוצמות**. כל הנ"ל מקדים את המאוחר (ביחס לסדר ההצגה שבספר), אך נראה לי ראוי לנהוג כך, ולהביא מיד את "משפט קנטור" בניסוחו הכללי.

משפט זה אומר כי ***כל קבוצה קטנה מקבוצת החזקה שלה***, כאשר **קבוצת החזקה** של U היא קבוצת כל התת-קבוצות של U.

המשפט מוכח בדרך השלילה. תהא φ התאמה חד-חד ערכית של הקבוצה U לקבוצת החזקה שלה. נבנה, בעזרתה, תת-קבוצה T של U אשר אינה בקבוצת החזקה (מה שמהווה סתירה מידית). לכל איבר a של U, נשים אותו בT אם ורק אם a *אינו* נמצא בקבוצה $\varphi(a)$. כעת, נבחין כי לכל תת-קבוצה S של הקבוצה U, מתקיים כי $\varphi^{-1}(S) \in T$ אם ורק אם $\varphi^{-1}(S) \notin \varphi(\varphi^{-1}(S)) = S$. נובע מכך כי לכל תת-קבוצה S של U מתקיים $S \neq T$, מה שמוביל לסתירה הנ"ל.

נדגיש את המקרים הפרטיים הקונקרטיים ביותר של משפט קנטור:

- *המספרים הממשיים אינם בני מניה.* דבר זה נובע מההתאמה החד-חד ערכית בין המספרים הממשיים לקבוצת החזקה של הטבעיים כך שהייצוג הבינארי של מספר ממשי (בקטע $(0,1)$) מתאים לתת-קבוצה של המספרים הטבעיים (כאשר הביט ה**n**י מייצג את התשובה לשאלה האם **n** נמצא בתת-הקבוצה).
- *קבוצת הפונקציות הממשיות גדולה בעוצמתה מקבוצת המספרים הממשיים.* דבר זה נובע מההתאמה החד-חד ערכים בין פונקציות מן המספרים הממשיים לערכים בינאריים לבין קבוצת החזקה של הממשיים כך שהערכי הפונקציה מייצגים תת-קבוצה של המספרים הממשיים (קרי: ערך 1 של מספר מייצג את היותו בתת-הקבוצה).

בנוסף, ניתן להראות שקבוצת כל המספרים הממשיים בכל אינטרוול (סגור או פתוח) שווה בעוצמתה ל**עוצמת הרצף**, אשר מוגדרת כעוצמת קבוצת המספרים הממשיים, וכן שעוצמת המספרים הטרנסצנדנטליים שווה לעוצמת הרצף.

כפי שצוין לעיל, אנו דוחים ב"דרוש עיון" את השאלה האם יחס הסדר בין עוצמות הוא מלא. שאלה נוספת הנשארת ב"דורש עיון" היא האם ההיררכיה של עוצמות שהוגדרה ע"י משפט קנטור היא ממצה. בפרט, האם קיימת עוצמה הקטנה מעוצמת הרצף אך גדולה מעוצמת הקבוצות שהן בנות-מניה (**השערת הרצף** עונה על כך בשלילה), והאם קיימת עוצמה הגדולה מעוצמת הרצף אך קטנה מעוצמת הפונקציות הממשיות.

מושג **המספר האינסופי** עורר מראשיתו התנגדות פילוסופיות ברמות שונות (והשימוש במונח "עוצמה" מבקש להימנע מן הוויכוח הזה), אלא – שכמו שנטען בפרק 7 – השאלה החשובה יותר היא האם הכנסת המושג הזה והתורה אשר נבנתה סביבו הם חסרי סתירות. פרנקל מציין שאת המתמטיקה לא צריך לעניין מה מהות הדברים אלא מה הפעולות הנעשות איתם, ובפרט התועלת שיש בפיתוח תורה הנוגעת לפעולות אלו.

כפי שנראה בפרק הבא, לפיתוח התורה הזו יש תועלת רבה. למעשה, תורה זו (קרי: "תחשיב העוצמות" שבו נדון בפרק הבא) פותחה כמענה לצורך, ועומדת לה הגנת הצורך (לנוכח ההתנגדות הפילוסופית), כפי שבאה לידי ביטוי בציטוט הבא "הגעתי למקום בו מחייב כל המשך את הרחבת מושג המספר מעבר לגבולות שנקבעו לו עד כה" [קנטור 1883].

בשולי הדברים מוזכרת גם הבעייתיות העקרונית של הגדרת עוצמה תוך התייחסות "לכל הקבוצות האפשריות". הגדרה כזו אינה עונה על כללי ההגדרה הקלסיים וההרגעה שהושמעה לעיל (קרי: העדר סתירות לכאורה) אינה עוזרת שהרי שסתירות עשויות לצוץ (ואמנם צצו) בתורה הנ"ל (ראו: הפרדוקס של ראסל). ראוי לציין שפותחו תורות לוגיות אשר מטפלות בסתירות האלו (קרי: מונעות אותן ע"י תוספת כללים) וגם שהסתירות הנ"ל אינן משפיעות על השימוש הממשי בהגדרות הנ"ל.

פרק 15: פעולות חשבון בין עוצמות

כינוי העוצמות על ידי התואר "מספרים" רומז על הרצון להגדיר פעולות על מספרים אלו, ובפרט יחס סדר ופעולות חשבון כמו "חיבור" ו"כפל". נדגיש שיחס הסדר ופעולות החשבון מוגדרים כעת על העוצמות עצמן ולא על קבוצות (כפי שנעשה בפרקים הקודמים).

הרבה מן ההתנגדויות להגדרות שיובאו כאן (ובפרק הקודם) נובעות מההפרה של הכלל כי "השלם גדול מחלקו", אלא שהתנגדויות אלו חושפות אי-הפנמה שהמבחן להגדרות מתמטיות הוא הפוריות שלהן ולא התאמתן לרעיונות פילוסופים מוקדמים. בנוסף יש כאן נאיביות מסוימת בהנחה שדברים התקפים לגבי מספרים סופיים חייבים לחול גם לגבי מספרים אינסופיים (ז"א אי-הפנמה של הרדיקליות שבהרחבת תחום המספרים לכאלו שאינם סופיים).

ההגדרות הנ"ל (של יחס סדר ופעולות חשבון בין עוצמות) מסתמכים על בחירה של קבוצות אשר מייצגות את העוצמות המדוברות (קרי: קבוצות שעוצמתן שווה לעוצמות הנתונות). משפטי שקילות ("אקוויוולנציה") מבטיחים, שלמרות שהפעולות מוגדרות על ידי שימוש בנציגים אלו, הרי שהתוצאה המתקבלת לא תלויה בבחירת הנציגים (קרי: החלפת הקבוצות המייצגות בקבוצות שקולות (ז"א שוות בעוצמתן) נותנת תוצאה אשר שקולה למקורית). הגדרות אלו מתבססות על **אקסיומת הבחירה** אשר תידון בסוף פרק זה.

הגדרת החיבור והכפל של שתי עוצמות הינה פשוטה למדי. בהגדרת החיבור נשתמש בשתי קבוצות זרות, ואילו בהגדרת הכפל נציג את הקבוצה של זוגות (סדורים) מתאימים. אלא שהכוונה היא להגדיר חיבור וכפל של מספר אינסופי (ולא בהכרח בן-מניה) של עוצמות, וכאן השימוש באקסיומת הבחירה בולט עוד יותר. כדי להגדיר חיבור וכפל של מספר אינסופי של עוצמות נזדקק לפונקציה מאוסף העוצמות (שרוצים לחבר או להכפיל) אל קבוצות (זרות) המייצגות את כל אחת מן העוצמות.

(פרנקל מגדיר את הכפל באמצעות זוגות לא סדורים, כך שגם עבורו הוא נזקק לקבוצות זרות.)

הסימונים המקובלים לעצמת השלמים והרצף הם $\aleph_0$ ו-$\aleph$, בהתאמה. לנוכח העובדה שלכל עוצמה (אינסופית) $\mathbf{r}$ מתקיים $\mathbf{r}+\aleph_0 = \mathbf{r}+6 = \mathbf{r}$ ובאופן דומה לכפל, אין לצפות להפיכות של פעולות אלו (קרי: הגדרה של הפרש ומנה). למרות זאת, התכונות הרגילות של חיבור וכפל (קרי: אסוציאטיביות, קומוטטיביות ודיסטריבוטיביות) מתקיימות. בפרט, חוקי החזקה (שהם השימושיים ביותר עבורנו) מתקיימים (קרי: הכללים של מכפלת חזקות עם אותו בסיס או אותו מעריך, והרכבה של העלאה בחזקה). שימוש בכללים אלו מאפשר להוכיח את העובדות הבאות:

- קבוצת הסדרות באורך בן מניה מעל הרצף היא בעוצמת הרצף ($\aleph^{\aleph_0} = \aleph$). בפרט, עוצמת קבוצת הפונקציות הממשיות ה*רציפות* שווה לעוצמת הרצף מכיוון שניתן להגדיר פונקציות אלו על ידי ערכן על קבוצת המספרים הרציונליים. הוכחת הטענה הכללית נובעת מן השוויונות
$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 * \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$
- עוצמת קבוצת הפונקציות הממשיות שווה לעצמת קבוצת החזקה של הממשיים ($2^{\aleph} = \aleph^{\aleph}$).
$\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 * \aleph} = 2^{\aleph}$

בניגוד לעובדה שעוצמת קבוצת הפונקציות הממשיות הרציפות (ולכן גם הגזירות) שווה לעוצמת הרצף (קרי: $\aleph$), נציין כי עוצמת קבוצת הפונקציות האינגרביליות שווה למספר $\aleph^{\aleph}$.

אקסיומת הבחירה מאפשרת גם להוכיח כי הכפל של עוצמות מתאפס רק אם אחת מן העוצמות היא אפס. ההוכחה היא בדרך השלילה, ו**אקסיומה הבחירה** מאפשרת לבחור מתוך כל אחת מן הקבוצות (שהינן לא ריקות) איבר, ולהרכיב מן האיברים שנבחרו איבר המצוי בקבוצת המכפלה. למעשה, המסקנה שקולה לאקסיומת הבחירה עצמה (הנקראת לפעמים "עקרון הכפל").

סעיף דיון: אקסיומת הבחירה

כפי שנרמז לעיל, חלק מן המשפטים החשובים ביותר בתורת הקבוצות מסתמכים על אקסיומת הבחירה, ודברים דומים תקפים גם בענפים אחרים של המתמטיקה. פרנקל מציין שהסתמכות זו נעשתה בעבר מבלי דעת, וממשיכה כיום מחוסר ברירה. בשנת 1938 הוכח שצירוף אקסיומה זו אינה פוגמת בעקביות של תורת הקבוצות, דבר שהפחית את ההתנגדות אליה. בשנת 1963 הוכח שהיא לא נובעת משאר האקסיומות של תורת הקבוצות, דבר שביטל את התסכול מהכישלונות להוכחתה.

ראוי להדגיש כי, בהינתן חוסר הפגיעה בעקביות של המערכת האקסיומטית, הרי שהוספת האקסיומה היא צעד הנתון לשיקולינו. הוא מרחיב (בפוטנציה) את מחלקת הטענות אשר ניתנות להוכחה במערכת אבל מצמצם (בפוטנציה) את היישומים של המערכת למקרים פרטניים. מכיוון שאיננו מוטרדים מן האפשרות השנייה אלא דווקא מאי-יכיחות של טענות הנחוצות כמעט לכל היישומים שלנו הרי שלכאורה אין שום בעיה עקרונית בהוספת האקסיומה.

המילה "לכאורה" רומזת לכך שהוספת אקסיומת הבחירה יוצרת בעיה עקרונית בלתי צפויה. האקסיומה מאפשרת לטעון לקיום של אובייקטים מאוד מסובכים מבלי לתת שום רמז לגבי דרך הבניה של האובייקטים האלו. דברים אלו נכונים גם לגבי משפטי קיום שונים (כמו, למשל, הקיום של מספרים טרנסצנדנטיים (ראו סעיף 8.1)), אלא שנראה שבמקרה הנוכחי ההשלכות מטרידות יותר (ראו סעיף 16.5).

פרק 16: קבוצות סדורות וסדורות היטב ומספרים סודרים

כפי שנאמר בסעיף 2.4, מושג הקבוצה הסדורה הוא טבעי יותר מאשר מושג הקבוצה בעלמא, משום שקבוצות מוצגות לפנינו בדרך כלל כשהן סדורות. בהתאם לכך נטען שם שמושג המספר הסודר בסיסי יותר מבחינה תפיסתית מאשר מושג המספר המונה. דברים אלו כוחם יפה לגבי קבוצות ומספרים סופיים, אך לא ברור האם הם חלים על קבוצות ומספרים אינסופיים.

מעבר לשאלת התפיסה השכלית, מבחינה עיונית טהורה, תורת המספרים המונים היא מופשטת יותר מתורת המספרים הסודרים, אלא שלהפשטת יתר יש מחיר: ישנן תופעות שנעלמות בהפשטה, שהרי במהותה הפשטה מסלקת פרטים (אשר אנו מקווים שאינם חשובים לצורך הבהרת התמונה). לפיכך, יש ודרגת הפשטה גבוהה פחות מאפשרת לנו לראות דברים שנסתרו מאתנו על ידי הפשטת יתר. בפרט, כפי שיסתבר, תורת הקבוצות הסדורות מאפשרת לענות על שאלה בסיסית (ביחס לקבוצות בעלמא) שהשארנו ב"דרוש עיון" בפרק 14: מסתבר שאקסיומת הבחירה מבטיחה כי יחס הסדר שהוגדר בין העוצמות הוא מלא (קרי: כל שתי עוצמות הן שוות או שאחת מהן גדולה מרעותה). למעשה, *אקסיומת הבחירה שקולה לטענה שבין העוצמות יש סדר מלא.*

לטעמי, הפרק הנוכחי קשה מן הפרקים הקודמים בחלק הנוכחי. קושי זה נעוץ בראש וראשונה באופי הלא-אינטואיטיבי (ואפילו אנטי-אינטואיטיבי) של חלק גדול מההגדרות והעובדות. בפרט, פעולות החיבור והכפל שיוגדרו אינם קומוטטיביים, משום שהן מתייחסות לשילוב של סדרות אינסופיות, אלא שקשה להפנים את התופעה כאשר מתבקשים להתייחס ל"מספרים" שמיוצגים על ידי הסדרות הללו.

סעיף 16.1: הקבוצות הסדורות ויחס הדמיון

קבוצה סדורה היא קבוצה אשר "מלווה" ביחס סדר מלא (קרי: לכל זוג איברים שונים בקבוצה מתקיים שאחד מהם **קודם** לשני). כזכור, יחס סדר אינו רפלקסיבי, הינו אנטי-סימטרי, אבל הוא טרנזיטיבי.

המילה "קודם" שיעשה בה שימוש אינה מתייחס לקדימות בזמן או בשום מובן אחר מלבד זה המוגדר על ידה. לקבוצה סופית (בת **n** איברים) יש בדרך כלל הרבה (קרי: **n!**) יחסי סדר אפשריים, אך כולם "דומים" אם מתעלמים משמות האיברים. לא כך המצב לגבי קבוצות אינסופיות. לדוגמא, בנוסף ליחס הטבעי והרגיל (קרי: עפ"י הגודל) בין המספרים הטבעיים, קיים היחס בו כל המספרים הזוגיים מופיעים לפני כל המספרים האי-זוגיים (בעוד שכל קבוצה מסודרת באופן הרגיל). במקרה הראשון מגדיר היחס מסלול אינסופי חד-כיווני יחיד, ואילו במקרה שהני מוגדרים שני מסלולים כאלו שאחד "קודם" לשני. שני המקרים הללו אינם "דומים" (עפ"י ההגדרה הבאה).

הגדרה: שתי קבוצות סדורות נקראות **דומות** אם קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין איברי האחת לאיברי השנייה אשר משמרת את יחס הסדר (קרי: אם a קודם לb בקבוצה הסדורה הראשונה אז העותק של a קודם לעותק של b בקבוצה הסדורה השנייה).

דמיון בין קבוצות סדורות (שהינו יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי) גורר שקילות בין הקבוצות עצמן, אלא שהכיוון ההפוך עשוי להיכשל באופן קיצוני (ראו: הסדרה שהוזכרה לעיל (שם, בניגוד לסדר הרגיל, יש אינסוף איברים כך שלכל אחד מהם יש אינסוף איברים קודמים לו). אפילו תוספת של איבר בודד עשויה לגרום לאי-דמיון (לדוגמא: אם נוסיף לסדרת המספרים הטבעיים "מספר מיוחד" אשר יוגדר כ"בא אחרי" כולם).

סעיף 16.2: טיפוסי-סדר ופעולות חשבון ביניהן

נחלק את הקבוצות הסדורות למחלקות כך שכל מחלקה תכיל את כל הקבוצות הסדורות הדומות זו לזו. מה שמשותף לכל הקבוצות הסדורות במחלקה הינו "טיפוס הסדר" (להלן: **טיפוסים**). הטיפוסים הסופיים מתאימים לקבוצות סופיות (בגדלים מתאימים), כך שהם מתלכדים עם המספרים המונים הסופיים, אלא שהמוקד שלנו הוא בקבוצות הסדורות האינסופיות. נסמן בω את הטיפוס של המספרים הטבעיים (בסדר הטבעי שלהם).

ניתן להגדיר סדר חלקי בין הטיפוסים כך שטיפוס α קטן או שווה לטיפוס β אם קיימת קבוצה סדורה מטיפוס α שדומה לתת-קבוצה סדורה של קבוצה מסוג β, אלא שב "רוב" הטיפוסים לא ניתנים להשוואה תחת יחס זה (ז"א, יתכן שלא מתקיימת אף אחת משלושת האפשריות $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$). מסתבר שלא ניתן להגדיר יחס סדר מלא בין הטיפוסים, אבל ניתן להגדיר פעולות חיבור וכפל ביניהם (באופן שמשמר מקצת מתכונות הפעולות האלו לגבי מספרים טבעיים).

חיבור של זוג טיפוסים נעשה על ידי בחירה של קבוצות סדורות (זרות) אשר מתאימות להם והגדרת הסדר על האיחוד כך שכל איבר בקבוצה הסדורה הראשונה קודם לכל איבר בקבוצה השנייה. גם כאן מתקיים משפט שקילות אשר טוען כי (עד כדי דמיון) תוצאת החיבור אינה תלויה ב"נציגים" שנבחרו. אכן, החיבור שהוגדר אינו קומוטטיבי (לדוגמא: $1+\omega = \omega \neq \omega+1$), אך הוא אסוציאטיבי. חיבור של מספר אינסופי של טיפוסים מוגדר אף הוא (אופן דומה) בהתאם ליחס סדר המוגדר על ידי קבוצה סדורה אשר הטיפוסים המחוברים הם איבריה.

כפל של זוג טיפוסים מוגדר באמצעות חיבור של מספר אינסופי של מחוברים, כאשר הגורם השני קובע את מספר החזרות של הגורם הראשון (לדוגמה: $2*3=2+2+2$). הכפל אף הוא אינו קומוטטיבי (לדוגמה $\omega*2=\omega$ אך $\omega*2=\omega+\omega$), והוא (גם) אסוציאטיבי. מכאן שאפשר להרחיב את הגדרת הכפל למספר סופי של טיפוסים, אך מסתבר שלא ניתן להגדיר בצורה משביעת רצון כפל של מספר אינסופי של טיפוסים.

החיבור והכפל שהוגדרו מקיימים את אחד החוקים הדיסטריבוטיביים (קרי: $\alpha*(\beta+\gamma) = \alpha*\beta+\alpha*\gamma$) אך לא את השני (לדוגמא: עבור מספרים טבעיים כלשהם m,n מתקיים מצד אחד $(m+n)*\omega=\omega$ ואילו מצד שני $m*\omega+n*\omega=\omega+\omega$ אשר שונה מω).

סעיף 16.3: קבוצות סדורות-היטב ומספרים סודרים

אי-האפשרות להגדיר יחס סדר מלא בין הטיפוסים נעלמת כאשר מצמצמים את הדיון לטיפוסים אשר מייצגים "קבוצות סדורות היטב". טיפוסים אלו יקראו מספרים סודרים והם יהיו המוקד של הפרק.

הגדרה: קבוצה סדורה תקרא **סדורה-היטב** אם לכל תת-קבוצה סדורה (ולא ריקה) שלה יש איבר ראשון (קרי: איבר שאין אף איבר שקודם לו). (במושג תת-קבוצה סדורה אנו מתכוונים לתת-קבוצה שעליה מוגדר יחס הסדר הנתון עבור הקבוצה כולה.)

הדרישה שקיים איבר ראשון בכל תת-קבוצה סדורה (ולא רק בקבוצה הסדורה המקורית) מבטיח שלכל איבר בקבוצה הסדורה-היטב (מלבד האחרון, במידה וקיים איבר אחרון) יהיה איבר עוקב (קרי: העוקב הוא האיבר הראשון בתת-הקבוצה אשר כוללת את כל האיברים אשר באים לאחר האיבר שרוצים להגדיר לו עוקב).

שימו לב שסידור המספרים הרציונליים החיוביים על פי גודלם אינו יוצר קבוצה סדורה-היטב, אבל סידורם ה"לקסיקוגרפי" כזוגות הסדורים של מספרים שלמים (ראשית על פי המחנה ובמקרה של שיווין על פי המונה) יוצר קבוצה סדורה-היטב שהטיפוס שלה הוא $\omega^*\omega$, אשר שונה מן הטיפוס ω של הטבעיים (תחת הסדר הטבעי).

הגדרה: טיפוס של קבוצה סדורה-היטב יקרא **מספר סודר**. אם α הוא המספר הסודר של הקבוצה הסדורה-היטב S, וβ הוא המספר הסודר של הקבוצה הסדורה-היטב T, ואם S דומה לתת-קבוצה סדורה של T אשר מכילה את כל האיברים הקודמים לאיבר מסוים בT, אז נאמר שα **קטנה מβ**.

שימו לב שהיחס שהוגדר לא תלוי בקבוצות הסדורות-היטב שנבחרות לייצג את המספרים הסודרים, וכי הוא לא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי, וטרנזיטיבי. בנוסף לכך, היחס שהוגדר מהווה יחס סדר מלא (ז"א: כל זוג מספרים סודרים ניתנים להשוואה (קרי: תמיד מתקיימת אחת משלושת האפשריות $\alpha>\beta$, $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$), כך שהשגנו את המטרה שלמענה צמצמנו את הדיון לקבוצות סודרות-היטב.

ראוי לכלול את המספר אפס בין המספרים הסודרים, הן משום שהדבר תואם את היותו מיוצג על ידי הקבוצה הריקה, והן משום שזה מקל על פיתוח התורה. עובדות נוספות לגבי היחס שהוגדר בין המספרים הסודרים כוללות:

- המספרים הסודרים הסופיים מתאימים למספרים הטבעיים בתוספת המספר אפס.
- המספר הסודר ω גדול מכל מספר הסודר סופי וקטן מכל מספר סודר אחר (שאינו סופי).
- אם המספר הסודר של הקבוצה הסדורה-היטב S קטן מהמספר הסודר של הקבוצה הסדורה-היטב T, אז העוצמה של S קטנה או שווה לעוצמת T. (שוויון עשוי בהחלט להתקיים: זכרו שלקבוצה יכולות להיות כמה סדרים טובים אשר מתאימים למספרים סודרים שונים.)
- חיבור וכפל של זוגות (סדורים) של מספרים סודרים (אשר מוגדרים בהתאם לחיבור והכפל של טיפוסים, אך תוך שימוש בקבוצות סדורות-היטב) נותנים תוצר שהוא מספר סודר (קרי: אם α,β הם מספרים סודרים אז גם $\alpha+\beta,\alpha^*\beta$ הם מספרים סודרים).
- לכל קבוצה של מספרים סודרים קיים מספר סודר אחד ויחיד אשר גדול מכל אחד מאיברי הקבוצה וקטן מכל מספר סודר אחר אשר גדול מכל המספרים בקבוצה. במילים אחרות, כל קבוצה של מספרים סודרים אשר מסודרת על פי יחס הגודל (הנ"ל) הינה קבוצה מסודרת-היטב.

נדגיש כי איננו אומרים כי "לקבוצת כל המספרים הסודרים יש סידור טוב" משום ש"קבוצת כל המספרים הסודרים" היא מושג הכולל סתירה פנימית. (אכן, אוסף המספרים הסודרים אינו קבוצה במובן של תורת הקבוצות האקסיומטית, אשר נמנעת מסתירה זו ומדומות לה על ידי הבניה פורמלית של מושג הקבוצה.)

סעיף 16.4: סדרת המספרים הסודרים ואינדוקציה על-סופית

(במקור נעשה שימוש באינדוקציה העל-סופית לשם הגדרות הנוגעות לסדרת המספרים הסודרים, אלא שמכיוון שהשמטתי את הפרטים האלו בחרתי לפצל את הסעיף ולארגן את תוכנו אחרת.)

תת-סעיף א: סדרת המספרים הסודרים

העובדות שצוינו בסוף הסעיף הקודם מאפשרות לבנות סדרה אינסופית של כל המספרים הסודרים אשר מופיעים בה מסודרים על פי גודלם. תחילתה של הסדרה במספרים הסופיים,

והמספר הלא-סופי הראשון שמופיע בה הוא ω. נדגיש כי לכל קבוצה סדורה-היטב מתאים מספר סודר אשר נמצא בסדרה הזו.

בסדרה הנ"ל מופיעים שני סוגי מספרים: **מספרים עוקבים** (קרי: α כך שמתקיים $\alpha=\beta+1$ עבור מספר סודר β), **ומספרי גבול** (אשר, למעט 0, אינם סופיים). מספר הגבול הראשון (שאינו 0) הוא ω, השני הוא $\omega+\omega=\omega2$, וכך הלאה. אפשר לנסות להמחיש את התחלת הסדרה כדלקמן

$0,1,2,3,\ldots,\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ldots,\omega+\omega=\omega2,\ \omega2+1,\ \omega2+2,\ldots,\omega2+\omega=\omega3,\ldots,\omega*\omega=\omega^2$

החלק שהוצג לעיל כולל מספר בר-מניה של מספרי גבול ומספר בר-מניה של מספרים עוקבים לאחר כל מספר גבול. הפרטים לגבי המשך התיאור של הסדרה הזו פחות חשובים לענייננו. מה שחשוב הוא שכל קבוצה (אשר יש לה סדר טוב) "מופיעה" בה. למעשה, לקבוצות אלו צפויות להיות מספר "הופעות", לפי מספר הסידורים הטובים שלה שאינם דומים. לכן כל העוצמות (של קבוצות שיש להן סדר טוב) "מופיעות" בסדרה, ואנו נתרכז במיקום הקדום ביותר שלהן.

ההגדרה הזו מתאפשרת משום שלכל מספר סודר מותאמת עוצמה יחידה (שהיא עוצמת כל אחת מן הקבוצות הסדורות-היטב שהטיפוס שלהן שווה למספר הסודר הזה (ולכן הן שוות עוצמה)), ואילו קבוצת המספרים הסודרים אשר מותאמים לעוצמה מסוימת הינה קבוצה סדורה-היטב (ולכן מכילה איבר מינימלי (שבמקרה זה חייב להיות מספר גבול)).

הגדרה: המספר הסודר של עוצמה s הוא המספר הסודר הקטן ביותר α כך שקיימת קבוצה סדורה-היטב שהטיפוס שלה הוא α והעוצמה שלה שווה **s**.

מכאן שיחס הסדר בין המספרים הסודרים משרה יחס סדר בין עוצמות של קבוצות סדורות-היטב. מכאן, שבכל הנוגע לעוצמות אלו (קרי: של קבוצות סדורות היטב), ניתן היה להגדיר את יחס הסדר ביניהן באופן התואם את ההגדרה שבפרק 14, אך ללא שימוש באקסיומת הבחירה. יתר על כן, נובע שיחס הסדר בין עוצמות אלו הוא מלא (ועובדה זו עונה לשאלה שהושארה ב"דורש עיון") ויותר מכך – הוא סדר טוב. אלא שאקסיומת הבחירה נחוצה על מנת להבטיח שלכל קבוצה קיים סדר טוב.

לנוכח מצב העניינים הזה, מסומנת העוצמה העוקבת אחר $\aleph_0$ על ידי $\aleph_1$ וזו העוקבת אחריה על ידי $\aleph_2$, וכך הלאה. השערת הרצף גורסת כי $\aleph_1$ הינה עוצמת הרצף, אך הסימון אינו מניח זאת.

תת-סעיף ב: אינדוקציה על-סופית

ב**עקרון האינדוקציה השלמה** (ראו סעיף 2.1) נעשה שימוש עצום ורב לצורך הגדרות והוכחות, הן בספר עצמו והן במקומות אחרים. אלא שעקרון זה מתייחס רק למצבים בהם האינדוקציה חלה על תחום בר-מנייה, ואילו מן העיסוק הממשי בתחומים שאינם ברי-מניה (שבהם דן כל החלק הנוכחי) מתבקש עקרון המתאים לתחומים אלו. הניסוח של העיקרון (המורחב) עצמו תואם לגמרי את אחד הניסוחים של עקרון האינדוקציה השלמה – הוא רק מחליף את קבוצת המספרים הטבעיים (בגרסתם הסודרת) באוסף המספרים הסודרים (למרות שאלו אינם קבוצה). בפרט, *העיקרון* (*של* ***אינדוקציה על-סופית***) *גורס שאם טענה נכונה לגבי הסודר 0 וקיומה עבור כל סודר קטן מ*α *גורר את קיומה עבור* α*, אז הא נכונה לגבי כל סודר* β*.*

הקושי בעקרון המורחב אינו בהוכחת נכונותו (אשר מתבססת על היות המספרים הסודרים הקטנים מβ קבוצה סדורה-היטב) אלא נעוץ בהפעלה של צעד האינדוקציה הלכה למעשה. העניין הוא שנמנענו במכוון מלהשתמש בניסוח של הנחת האינדוקציה באופן אשר מתייחס רק למספר הקודם למספר α, משום שמספר כזה לא בהכרח קיים (קרי: הוא קיים אם ורק אם α הוא מספר עוקב). בהתאם לכך, הפעלה של צעד האינדוקציה מתפצלת לשני מקרים בהתאם להבחנה בין מספרים עוקבים למספרים גבוליים (והמקרה השני הוא בדרך כלל הקשה יותר).
(בניגוד למצב כאן, בעקרון האינדוקציה השלמה, כל המספרים הם עוקבים.)

סעיף 16.5: משפט הסדר הטוב והשערת הרצף

כפי שנרמז לעיל, ההשלכות של המספרים הסודרים על היחסים בין מספרים מונים (או עוצמות) מתבססות על האפשרות להתאים לכל קבוצה סדר כך שתתקבל קבוצה סדורה-היטב. הטענה שדבר זה אפשרי נקראת **משפט הסדר הטוב**, והוכחתה מתבססת על אקסיומת הבחירה. אלא שהוכחה זו אינה נותנת לנו שמץ של מושג מהו אותו סדר טוב (בפרט, מהו הסידור הטוב של הממשיים). מצד שני, אפשר להראות שאקסיומת הבחירה נובעת ממשפט הסדר הטוב.

אכן העובדה שמשפט הסדר הטוב מבטיח סידור כזה של הממשיים אך אין לנו מושג מהו אותו סידור היא הבעיה שעליה רמזנו בסוף פרק 15. אכן, קשה להעלות על הדעת סידור כזה, והיה טוב לקבל לפחות רמז לגבי טבעו.

ראוי לציין שהאופי הקיומי של המשפט שמתאים לכל עוצמה (של קבוצה סדורה-היטב) מספר סודר מינימלי (אך לא נותן לנו כמעט כל רמז לגבי טבעו) מקשה לעשות שימוש בעובדה זו על מנת לענות על שאלות הנוגעות ליחס בין העוצמות (כגון השערת הרצף). אמירה זו תקפה בעיני למרות שידוע שהשערת הרצף הינה בלתי תלויה במערכת האקסיומות גם אם נצרף את אקסיומת הבחירה למערכת.

חלק חמישי: גיאומטריה (תורת המרחב)

מנקודת מבט אינטואיטיבית קל להנגיד את הגאומטריה לתחומים שנדונו בחלקים הקודמים על ידי הצבעה על כך שהיא עוסקת במרחב בעודם שהם עסקו במספרים ובחשבונות מסוגים שונים. אלא שכבר בחלקים הקודמים נרמזו קשרים בינם לבין הגאומטריה, וקשרים אלו מתהדקים יותר ככל שמתקדמים בלימוד התחומים השונים. למרות זאת, ההבחנה מוצדקת, הגם שאינה מושלמת, ואפשר לקרוא אותה כמתייחסת לנקודת המבט הדומיננטית בתחום.

פרנקל טוען כי בשל המגוון הרב של תת-תחומים בגיאומטריה קשה להציג את התחום באופן סיסטמתי כפי שהדבר נעשה בחלקים הקודמים. מצד שני, האחדות של המגוון ניתנת להבנה טובה יותר על ידי מעקב על התפתחותה ההיסטורית החל מן התקופה בה הגאומטריה הופיעה כדבר אחד, דרך נקודות הפיצול והשאלות המפצלות. למרות שפרנקל דוחה את ההשקפה הכללית לפיה הבנת ההיסטוריה של תחום דעת חיונית להבנתו, הוא סבור שהשקפה זו תקפה במקרה של הגאומטריה. (אני תוהה הן לגבי ההשקפה הכללית והן לגבי השאלה של מה עושה אותה יותר או פחות נכונה לגבי תחום דעת מסוים, אבל אניח לכך שהרי בין כך ובין כך אין לי ברירה אלא ללכת בדרכו של פרנקל.)

התקשיתי בחלק זה יותר מאשר בחלקים קודמים, ובפרט בשל ההפניות הרבות למראה עיניים (שלא ממש "נמצא" מול עיני). לפיכך נעזרתי, יותר מאשר בחלקים הקודמים, בשיחות עם בועז קלרטג.

פרק 17: התפתחות ההיסטורית של הגיאומטריה

נקודת הפתיחה היא כמובן "הגיאומטריה הקלסית" שהופיעה ביוון במאה החמישית לפנה"ס והגיעה לשיא התפתחותה בעולם ההלניסטי ובפרט במרכז האקדמי באלכסנדריה בעיקר במאה השלישית לפנה"ס. הגאומטריה הקלסית הוזנה על ידי ידע שנצבר קודם ב"מזרח הקרוב" (ליוון), אבל ביצעה שינוי מהפכני באופן החקירה של חומר זה.

סעיף 17.1: ממדע ניסיוני ("אינדוקטיבי") למדע עיוני ("דדוקטיבי")

אבחנה היסטורית חשובה של פרנקל היא שמדע ההיסטוריה מסתמך רק על רשומות שנשמרו, ולפיכך הוא מוטה לכיוון של תרבויות אשר התוכנים שלהם נשתמרו. מעבר לשאלה האם תרבויות שונות מייחסות חשיבות שונה לשימור של מורשתם בכתובים, מזדקרת העובדה שהכתובים חשופים לתהליכי השמדה שעוצמתם משתנה לפי המיקום בין אם בשל גורמים אקלימיים או אחרים.

העדויות ההיסטוריות מראות עיסוק בגאומטריה בסהר הפורה ובמצרים החל מסוף האלף השלישי לפנה"ס, כולל תגליות כגון ערכים המקיימים את משפט פיתגורס, חישוב שטחים ונפחים של גופים מסוימים (בעזרת "שיטת המיצוי" (ראו להלן)), ואפילו משפטים כלליים כמו שוויון בין אורך הצלעות במשולש שווה זווית. אלא שתגליות אלו היו מבוססות על הסתכלות (קרי: תצפיות אמפיריות). בניגוד לכך, *המהפכה העיונית שקודמה ביוון דרשה ביסוס של עובדות על טיעון לוגי תקף אשר מתבסס על מספר קטן של מוסכמות יסוד* (אשר "ברורות מאליהן"). דרישה זאת הוצגה גם לגבי עובדות שהיו ידועות (לכאורה) מהניסיון והובילה לגילוי עובדות (דרך היסק) אשר לא היו ידועות מן הניסיון.

שיטת המיצוי הייתה ידועה כנראה כבר למצרים הקדמונים, ושוכללה ע"י יוונים (בפרט, ע"י אודוקסוס שפעל לפני אוקלידס, וארכימדס שפעל אחריו). מדובר בשיטה לחישוב נפח גופים על ידי קירוב של שטחים של חתכים מקבילים (באופן הדומה לחישוב אינטגרל). בפועל שימשה השיטה לחישוב של קירובים שאיכותם גדלה עם צפיפות החתכים. באופן דומה חושב שטח המעגל ע"י חסימתו בין מצולעים משוכללים כאשר מספר הצלעות קובע את איכות הקירוב.

סעיף 17.2: הגיאומטריה היוונית

הקנון הוא כמובן הספר "אלמנטים" של אוקלידס אשר מציג באופן סיסטמתי את עיקרי הידע המתמטי (לא רק גאומטרי) של תקופתו. חשיבות ההצגה הזו, שהייתה לה השפעה פדגוגית עצומה, היא בביסוס כל הידע על מספר קטן של יסודות.

יסודות אלו כוללים "הגדרות" (שהן למעשה תיאורים אינטואיטיביים של מושגי היסוד כגון נקודה וקו), "דרישות" (כללי בניה אשר מגבילים את אופן הטיעון) ו"תפיסות מוסכמות" (דברים המובנים מאליהם שנקראו אח"כ "אקסיומות"). פרנקל מדגיש כי המבנה הדדוקטיבי עצמו (קרי: ההוכחות והבניות) אינו מתייחס כלל להגדרות (אלא רק לדרישות ולאקסיומות).

הדרישות הן בעלות אופי ספציפי לתחום (קרי: לגאומטריה):

- אפשר להעביר קו ישר (ורק אחד) בין כל שתי נקודות נתונות, דבר אשר יוצר קטע ישר.
- אפשר להאריך כל קטע ישר ללא הגבלה (כקו ישר).
- בהינתן שתי נקודות, אפשר לחוג מעגל שמרכזו בנקודה אחת כך שיעבור דרך השנייה. (חסרה קביעה שאם עושים זאת מכל אחת משתי הנקודות אז שני המעגלים נחתכים בנקודה אחת מכל אחד מצדיו של הישר המחבר בין הנקודות.)
- "כל הזוויות הישרות חופפות זו לזו" (דרישה לא ברורה).
- אם ישר חותך שני ישרים באופן כזה שסכום הזוויות הפנימיות בצד מסוים קטן מ-180 מעלות, אז שני הישרים נחתכים באותו צד (אם יוארכו במידה מספקת).

האקסיומות הן למעשה כלליות יותר ושייכות ללוגיקה עצמה.

- שני גדלים השווים לגודל שלישי, שווים ביניהם.
- אם מוסיפים גדלים שווים לגדלים שווים, הסכומים שווים.
- אם מחסרים גדלים שווים מגדלים שווים, ההפרשים שווים.
- דברים "המתלכדים" זה עם זה, שווים זה לזה.
- השלם גדול מחלקו.

טיעון תקף במערכת הזו יכול להתבסס רק על הדרישות והאקסיומות הנ"ל.

החומר עצמו, שיועד למטרות לימוד ולא לעדכון בחזית המחקר, הופיע ב13 ספרים. ארבעת הראשונים עוסקים בגיאומטרית המישור (למרות שניתן לטעון כי השני עוסק באלגברה אשר רק מוצגת במונחים גאומטריים), שלושת האחרונים בגאומטרית המרחב (התלת-ממדי), והפרקים שבתווך הם בעלי אופי של תורת מספרים. ההימנעות האידיאולוגית מהכרה מלאה בגדלים שאינם שלמים מסבכת את הניסוחים. פרנקל מעלה על נס את הספר החמישי אשר מגיע לשיאו בהגדרת שוויון בין "יחסים מספריים" (קרי: מספרים מן הסוג a/b אשר אינם בהכרח רציונליים).

פרנקל סוקר בקצרה צדדים גאומטריים בעבודתו של ארכימדס ואת מחקר חתכי-החרוט של אפולוניוס, אך מציין שלעבודתם (שהיא חדשנית יותר) הייתה פחות השפעה על התפתחות המתמטיקה בדורות שאחריהם. ההשפעה החשובה ביותר היא במופת שה"אלמנטים" העמידו בפני הדורות הבאים של חוקרים בכל המדעים ואף בפני הוגי דעות כלליים.

סעיף 17.3: השיטה הסינתטית כנגד השיטה האנליטית

בעוד שהגאומטריה הקלסית המשיכה (וממשיכה) לשמש כחומר לימוד בסיסי, פנה המחקר במאה ה17 לכיוון מופשט יותר אשר זונח את פרדיגמת "הסרגל והמחוגה" ומתמקד במושג הנקודה וביחסי סדר מרחביים בין נקודות. הניגוד שבכותרת הוא בין תהליכי בניה וטיעון גיאומטריים (ראו סעיף 17.5 ופרקים 18 ו20) לבין תיאור מספרים ופעולות אריתמטיות.

הבסיס של **הגיאומטריה האנליטית** הוא מערכת קואורדינטות (שהיא למעשה הגורם "הסינטטי" היחיד), קביעת נקודות על פיה, והצגה של ישרים, עקומים וגופים כאוסף הנקודות המקיימות משוואות אלגבריות מסוימות (במשתנים אשר מייצגים את ערכי הקואורדינטות). לדוגמא, מישור במרחב תלת-מימדי מוגדר על ידי משוואה לינארית (בשלושה משתנים), וישר אשר מתקבל כחיתוך של שני מישורים מיוצג על ידי שתי משוואות כאלו, בעוד שמישורים מקבילים (ואולי שווים) מתאימים למשוואות בלתי-תלויות לינארית.

פרנקל מזהיר שבעוד שכל משפט גאומטרי קלסי יכול להופיע כמשפט אנליטי, הרי שההיפך אינו נכון, ודבר זה מעלה את השאלה לאיזה משפטים אנליטיים יש מובן גאומטרי קלסי.

עניין נוסף הוא, שבדומה לנאמר בתת-סעיף ב של סעיף 8.3, ניתן היה לנהל את כל הפיתוח תוך שימוש במספרים אלגבריים וב"סגור" שלהם תחת פעולות החשבון כולל הוצאת שורשים. אלא שזה לא היה מאפשר לראות את האלמנטים הגאומטריים המיוצגים כרציפים (ראו: סעיף 19.1).

סעיף 17.4: בעיות קלסיות בלבוש אלגברי

סעיף זה חופף במידה רבה את סעיף 8.4, שעליו דלגתי בזמנו. בהקשר הנוכחי, פרנקל מוצא עניין בעובדה שבעיות הבניה היחידות שהיוונים חקרו באריכות אך הותירו ללא פתרון הן אלו שאין להן פתרון (ז"א שלא ניתן לבצע את הבניה המבוקשת באמצעים המותרים). הוכחות האי-אפשרות הידועות לנו כיום פותחות במעבר מהניסוח הקלסי (כפי שהוא מופיע בסעיף 17.2) לניסוח במונחים של גאומטריה אנליטית, ובהוכחת שקילות בין הבעיות המקוריות לבין פתרון של משוואות אלגבריות במגבלות מסוימות על הפתרון או על אופן הצגתו (ראו תת-סעיף א של סעיף 8.3). מה שמוכח כבלתי אפשרי הוא קיום פתרון אלגברי במגבלות הנתונות.

לדוגמה, לגבי בעיית "תרבוע העיגול" (קרי: יצירת ריבוע ששטחו שווה לשטח עיגול נתון), בעוד שקירובים לπ פותחו במספר תרבויות (עם דיוקים ברמות שונות), הדרישה הגאומטרית המקורית מתרגמת לבעיה אלגברית אשר מניחה שπ הינו מספר אלגברי (ראו סעיף 8.1), בעוד שבסוף המאה ה19 הסתבר שהוא אינו כזה. העובדה הזו היא מקרה פרטי של משפט כללי יותר שמקרה פרטי שלו אומר כי עבור מספר אלגברי a אשר שונה מאפס, המספר e^a אינו אלגברי (קרי: הוא טרנסצנדנטי). מכיוון שמתקיים $e^{\pi i}+1=0$, נובע כי π אינו אלגברי.

סעיף 17.5: על אורך, שטח, נפח ותורת המידה

מנקודת המבט של השיטה האנליטית, נראה שאין בעיה עקרונית בהגדרת אורך, שטח ונפח של אלמנטים גאומטריים פשוטים, אבל בעיה זו חמורה במיוחד עבור השיטה הסינתטית, אפילו רק בהקשר של השוואה בין שטח ונפח של אלמנטים פשוטים. בניגוד למצב עם אורכם של קטעים ישרים (שם אפשר להשוות אורכים על ידי העתקה של קטע אחד לשני), לא ברור איך להשוות בין השטח של מלבן לזה של משולש. למעשה, אין לנו למעשה הגדרה של שטח, ואילו בהצעה של השוואת קטעים על ידי העתקה הנחנו שההגדרה של אורך מקיימת את התנאים הבאים:

- אורכם של קטעים חופפים הינו שווה.
- לקטע הכלול ממש בקטע אחר יש אורך קטן ממנו.

ראוי לדרוש מהגדרה השטח (והנפח) דרישות אנלוגיות, אלא שכאן מדובר בחפיפה של צורות במישור (ובמרחב התלת-ממדי), והדרישות הנ"ל אינן מספיקות להגדרה. לפני הצגת ההגדרה, חוזר פרנקל על דברים עקרוניים שאמר בהקשרים אחרים. להלן הציטוט:

"הגדרה אין משמעותה קביעת עובדה או הבאת ראיה כי אם הכנסת מושג (מונח) באופן שהוא להלכה שרירותי ולמעשה מועיל, דבר היכול להתברר רק אחרי מעשה."

ההגדרה של שטח מצולעים (קמורים) שמוצגת תחילה מסתמכת על "פירוק" של מצולעים למשולשים זרים ועל מושג החפיפה בין משולשים. בפרט, שני מצולעים קמורים יקראו **שווי-פירוק** אם אפשר לפרק כל אחד מהם למספר סופי של משולשים כך שכל משולש בפירוק הראשון מתאים באופן חד-חד-ערכית משולש החופף לו בפירוק השני. הגדרה כללית יותר של שטח תבסס על **תורת המידה** (ראו להלן), וניתן להראות כי מצולעים שווי-שטח הם שווי-פירוק (רמז: די להוכיח את הטענה עבור משולשים (ראו הערה בסוף הפרק)).

התיאור הבא מתייחס לשטחים במרחב (האוקלידי) הממשי הדו-ממדי, אך אותם דברים תקפים לכל מספר סופי של ממדיים. השטח של מלבן (קרי: קבוצת הנקודות הממשיות התחומות במלבן) מוגדר ("כמובן") כמכפלת אורך צלעותיו, אך המטרה היא להגדיר את השטח של קבוצות כלשהן (במרחב הנ"ל). ההגדרה הטנטטיבית הבאה היא של חסם עליון על השטח של קבוצה.

הגדרה (מידה חיצונית): השטח החיצוני של קבוצה הוא האינפימום של סכום השטחים של מלבנים באוסף בן-מניה אשר מכסה את הקבוצה. (המידה החיצונית נעה בין 0 ל∞.)

ברור שהשטח החיצוני של מלבן אינו עולה על שטחו (כפי שהוגדר לעיל (קרי: מכפלת אורכי צלעותיו)) אך יש להראות שהשטח החיצוני שלו אינו נופל מכך (ועובדה זו מתבססת על "הקומפקטיות" של המרחב). מצד שני קל להראות שהשטח החיצוני של כל קבוצה בת מניה הוא 0 (ע"י שימוש באוסף מלבנים בשטח קטן כרצוננו אשר מכסה אותה (קרי: המלבן ה**n**י יהיה בשטח $\varepsilon/\mathbf{n}^2$)).

מכיוון שנרצה ששטח קבוצות זרות יהיה שווה לסכום שטחיהן, נגדיר שטח רק עבור קבוצות אשר מקיימות את התנאי הזה (רמז: $A\cup B=S$).

הגדרה (קבוצה מדידה): הקבוצה A תקרא מדידה אם לכל קבוצה S מתקיים $m^*(S)= m^*(S\cap A)+ m^*(S-A)$ כאשר $m^*()$ מסמנת את המידה החיצונית.

קל לראות כי כל גוף עם שפה "חלקה" (כגון עיגול) ניתן לכיסוי על ידי אוסף בן-מניה של מלבנים קטנטנים אשר רק חלקם הזעיר חותך את השפה של הגוף. מכאן שקבוצות אלו הן מדידות. כמוכן, כל קבוצה שמידתה החיצונית היא 0 הינה מדידה.

משפט: כל איחוד בן-מניה של קבוצות מדידות הוא מדיד. המשלים של כל קבוצה מדידה הינו מדיד.

הערה: העובדה שמצולעים שווי-שטח הם שווי-פירוק אינה ניתנת להכללה לממד שלוש. בממד שניים ההוכחה מסתמכת על פירוק של מצולעים למשולשים, ועל טרנזיטיביות של מושג שווי-הפירוק. ההוכחה מתבססת על הטענות הבאות:

1. כל משולש הוא שווה-פירוק למלבן כלשהו (בפרט, מלבן עם צלע ארוכה הזהה לצלע הארוכה של המשולש). מכאן שדי להראות שווי-פירוק של מלבנים שווי-שטח.
2. מקביליות המשתפות בסיס שיש להן שטח זהה הינן שוות-פירוק.
3. מלבנים שווי שטח הם שווי-פירוק. (מסתמך על 2.)

פרק 18: גאומטריות ואינווריאנטים

המוקד בפרק זה הוא הצגה אקסיומטית של כמה גאומטריות. מקורו של הריבוי בשימוש באקסיומות שונות (או למצער בחלק מהאקסיומות של הגאומטריה הקלסית). שימוש בפחות אקסיומות מוביל לגאומטריה מוכללת/כללית יותר (ומפורטת פחות), אשר משמרת מספר רב יותר של אינווריאנטים (קרי: שוויון בין תצורות גאומטריות שונות).

פרק זה עניין אותי הרבה פחות מן האחרים, והתיאור שלו לקוני יותר.

סעיף 18.1: סקירה כללית

מבין הגאומטריות בהן דן פרק זה, הגאומטריה הקלסית נתפסת כמפורטת וכספציפית ביותר, וכמקיימת/משמרת כמות קטנה ביותר של "אינווריאנטים" (קרי: היא משתמרת תחת הזזות בלבד). גאומטריות כלליות יותר (כגון אפינית, פרוייקטיבית) מקיימות/משמרות כמות גדולה יותר של אינווריאנטים, ולפיכך התוכן הקונקרטי שלהן מצומצם יותר (ואילו העקרונות הכלליים יותר משחקים תפקיד חשוב יותר).

פרנקל מדלג בהמשך על הגאומטריה הקלסית הן משום שהיא מוכרת לקוראים והן משום שהעניין שלו הוא בעקרונות כללים. להלן ציטוט.

"[הספר] שואף לתת לקוראיו מושג על *מהות* המתמטיקה, בעיותיה ושיטותיה, ולא דווקא על *תוכן* המתמטיקה."

סעיף 18.2: גאומטריה אפינית

למרות שניתן להציג את הגאומטריה הזו באופן "סינטטי טהור", עדיף לעשות שימוש במושג הקואורדינטות שהינו בבסיס הגאומטריה האנליטית. הגאומטריה האפינית מתבססת על חקירה של יחסים במרחב אשר נשמרים תחת העתקות אפיניות. בשני ממדים מדובר בהעתקות מן הסוג

$$(x\ ,\ y) \rightarrow (a'x+b'y+c'\ ,\ a''x+b''y+c'')$$

כאשר במקרה ה"לא מנוון" מדובר בטרנספורמציה הפיכה (קרי: הוקטור (a',b') בלתי תלוי לינארית בוקטור (a'',b'')), ואילו המקרה ה"מנוון" מאפשר להטיל מרחב דו-ממדי למרחב חד-ממדי (וחשוב מכך: מרחב תלת-ממדי למרחב דו-ממדי). האינווריאנטיות תחת העתקות אפיניות ניתנת ל"פירוק" לאינווריאנטיות תחת ארבעה מקרים פרטיים:

1. הזזה: $(x,y) \rightarrow (x+c',y+c'')$
2. סיבוב: $(x,y)\rightarrow(\alpha x-\beta y,\beta x+\alpha y)$ כאשר $\alpha^2+\beta^2=1$.
3. שיקוף (אופקי): $(x,y)\rightarrow(-x,y)$. (שיקוף אנכי מושג ע"י צירוף של שיקוף אופקי וסיבובים.)
4. מתיחה ודחיסה: $(x,y)\rightarrow(ax,by)$

האינווריאנטים של הגאומטריה המטרית הם הזזות וסיבובים (ויש גרסאות אשר מוסיפות גם שיקוף). בגאומטריה אקווּיפורמית ("קלסית") מוסיפים גם מתיחה ודחיסה בשיעורים שווים (קרי: $a=b$) אשר

משמרת צורה (קרי: ריבוע משתמר ככזה וכך גם מעגל). בניגוד לכך, הגאומטריה האפינית משמרת מלבנים ואליפסות (אך לא ריבועים ומעגלים) וכן פרבולות והיפרבולות (קרי: את מספר הנקודות ה"דמיוניות" של עקום (ראו להלן)).

הגאומטריה האפינית כוללת גם נקודות "דמיוניות" (ב"אינסוף") אלא שהיא משמרת נקודות ממשיות ודמיוניות (בנפרד). תכונה זו לא תתקיים בגאומטריה הפרוייקטיבית (הכללית ממנה).

סעיף 18.3: גאומטריה פרוייקטיבית

נוח יותר לטפל בנושא הנקודות הדמיוניות על ידי הצגת שני משתני הקואורדינטות (קרי: x וy) על ידי יחסים בין שלשה של משתנים (קרי: $x=\varphi/\xi$ ואילו $y=\phi/\xi$). כל נקודה במרחב הדו-ממדי תיוצג על ידי קבוצת שלישיות שכולן כפולות של אותה שלישיה (קרי: $(\varsigma\varphi,\varsigma\phi,\varsigma\xi)$ עבור כל $\varsigma\neq0$), והנקודות הדמיוניות ייוצגו על ידי שלישיות שהרכיב השלישי שלהן הוא אפס (קרי: $\xi=0$). הגאומטריה הפרוייקטיבית משמרת את כל ההעתקות האפיניות המופעלות על שלשות כאלו, ולפיכך היא כללית יותר מו האפינית (קרי: יש לה יותר אינווריאנטים).

הגאומטריה הפרוייקטיבית אינה מבחינה בין נקודות דמיוניות לנקודות ממשיות. בפרט, ההעתקות של הגאומטריה הפרוייקטיבית משמרות את הסדר של כל משטח עליו הן מופעלות, אך אינן משמרות את מספר הנקודות הדמיוניות. בגאומטריה זו יש דואליות בין נקודות לישרים (במקרה הדו-ממדי), ותכונה זו שימושית ביותר ומהלכת קסם על המתמטיקאים.

סעיף 18.4: על העצמים הדמיוניים בגאומטריה

בסעיף זה מוכנסות נקודות דמיוניות נוספות על מנת להגביר את הלכידות של התורה (ע"ע עקרון היציבות). "הגורם הדוחף אותנו הוא הרצון שלא להזדקק להבחנה בין מקרים שונים ולא להרשות מקרים יוצאים מן הכלל (הקבוע מראש)."

פרק 19: טופולוגיה

בפרק הקודם עסקנו בתכונות של יחסים במרחב אשר משתמרים תחת העתקות מסוימות. במונחים של מערכת הקואורדינטות דובר על העתקות שמתוארות כמנה של פונקציות לינאריות (סעיף 18.3). העתקות אלו שימרו קוים ישרים, ואנחנו עומדים לוותר על דרישה זו. אך נמשיך לדבוק בשתי דרישות יסודיות יותר:

1. ההעתקות הן חד-חד-ערכיות.
2. קבוצת ההעתקות הינה חבורה תחת פעולת ההרכבה.

מנקודת מבט אנליטית ניתן היה לדרוש כי ההעתקות יהוו פונקציות רציונליות, אך נדרוש הרבה פחות מכך. נסתפק בדרישה שההעתקות תהינה פונקציות רציפות. בנקודת מבט של "גאומטריה סינטטית" אפשר לתאר את ההעתקות כמותחות ומכווצות את המרחב באופן שרירותי למדי אך רציף (קרי: ללא קריעות והדבקות). התיאור בפרק זה (הדן ב"טופולוגיה") לא יהיה שיטתי, אלא ידגים את אופי התחום על ידי תיאור של כמה שאלות.

סעיף 19.1: על הרצף הקווי

נראה תחילה איך ה"גאומטריה" של המרחב החד-ממדי אשר מסתפקת ביחס סדר בין נקודות (ובתנאי הרציפות) מבהירה את מהות הרצף הקווי (קרי: המספרים הממשיים בהם עסקנו בפרק 6).

מהות הרצף הקווי אינה מתמצה בתנאי הצפיפות, שהרי תנאי זה מתקיים גם לגבי הנקודות הראציונליות. להלן אפיון של הרצף הקווי (במובן שכל קבוצה סדורה אשר מקיימת את שלושת התנאים הבאים דומה לרצף הקווי (כאשר דמיון בין קבוצות סדורות הוא כפי שהוגדר בסעיף 16.1)):

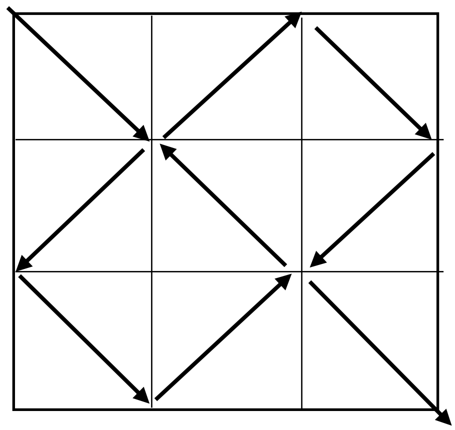
1. אין בקבוצה (שתסומן C) איבר ראשון או איבר אחרון.
2. אין בקבוצה C חתך שאינו רציף, כאשר חתך הוא חלוקה של הקבוצה לשתי תתי-קבוצות כך שכל איבר בתת-הקבוצה הראשונה (הנקראת "תחתונה") קטן מכל איבר בתת-הקבוצה השנייה (הנקראת "עליונה"), ואילו החתך נקרא רציף אם בדיוק באחת מתתי-הקבוצות יש איבר "גבול" (קרי: איבר גדול ביותר בתחתונה או קטן ביותר בעליונה).
(שימו לב שכאן, בניגוד לסעיף 6.2, מדובר על חתכים של קבוצה שאינה בת-מנייה. כזכור, במקרה של חתכים של קבוצת המספרים הרציונליים, קיום של איבר גבול באחת מתתי-הקבוצות מתאים למקרה של חתך המייצג מספר רציונלי.)
3. הקבוצה C מכילה תת-קבוצה בת-מניה, שתסומן R, כך שבין כל שני איברים של C קיים איבר של R (קרי: R נמצאת בצפיפות בתוך C).

כמובן שהרצף (שלכבודו נבחר הסימון C) מקיים את התנאים הנ"ל (כאשר קבוצת המספרים הרציונליים משמשת כתת-קבוצה R). הטענה שהתנאים הנ"ל מאפיינים את הרצף (עד כדי דמיון) מוכחת על ידי הסתמכות על הדמיון בין תתי-הקבוצות (בנות-המנייה) הסדורות שסומנו R, אשר באמצעותן ניתן להגדיר חתכים אשר יתאימו בין שאר האיברים של שתי הקבוצות שסומנו C.

סעיף 19.2: על מושג הממד והמישור הדו-ממדי

העובדה שיש העתקה חד-חד-ערכית בין אינטרוול חד-ממדי לריבוע דו-ממדי (ולמעשה גם לקובייה עם מספר בן-מניה של ממדים) מסתמכת על אי-הרציפות של ההעתקה הזו. מצד שני, יש העתקה של האינטרוול לריבוע דו-ממדי שהינה רציפה (אך משתמשת בפונקציות שאינן גזירות בשום מקום).

ההעתקה השנייה מבוססת על הצגה של מספרים ממשיים כשברים בבסיס 9 (ראו סעיף 6.4), חלוקה רקורסיבית של הריבוע ל9 ריבועים, ושימוש בנתיב שעובר דרך 9 הריבועים כשהוא נכנס בפינה אחת ויוצא בפינה הנגדית (ראו איור). כך ניתן להתאים מספר ממשי יחיד (בבסיס 9) לזוג מספרים ממשיים בבסיס 3. הפרוצדורה הזו עשויה לכסות נקודה בריבוע 4 פעמים, משום שלחלק מן הממשיים יש ייצוג כפול כשברים בבסיס 9 ולזוגות עשויים להיות 4 ייצוגים.



בניגוד לנ"ל, צמצום הדיון להעתקות הפיכות שהינן רציפות מאפשר להגדיר את הממד (של קבוצה סדורה) באופן שנשמר תחת העתקות אלו (קרי: הממד הוא "אינווריאנט טופולוגי"). אינטואיטיבית, קבוצת הנקודות על כל "קו רציף" (ישר או עקום) היא ממד 1, ואילו קבוצה היא בעלת ממד d אם היא "מופרדת" על ידי קבוצה בעלת ממד d-1. הקושי שבנושא משתקף ב"קבוצת קנטור" שהינה בעלת עוצמה של הרצף, אך בעלת מידה 0 (קרי: אינה מכילה שום קו רציף).

(**קבוצת קנטור** מתקבלת על ידי תהליך רקורסיבי בו מחלקים אינטרוול סגור לשלוש חלקים שווים, זורקים את האינטרוול הפתוח המרכזי וממשיכים ברקורסיה על שני החלקים הנותרים. הנקודות שנותרו ניתנות להתאמה לסדרות בינאריות אינסופיות (מעל $\{1,3\}$) אך לכל **n** הן ניתנות לכיסוי על ידי 2^n אינטרוולים שלכל אחד אורך $(1/3)^n$ מאורך האינטרוול המקורי.)

(לנושא "טופולוגיה קומבינטורית": משונה בעיני שבעיית צביעת המפות בארבע צבעים מוצגת במונחים אלו וללא מעבר להצגה השקולה כשאלת הצביעה של גרפים מישוריים. בעיה זו ושאלת קיום מסלול או מעגל אוילרי בגרף מוצגות כמשתייכות ל"טופולוגיה קומבינטורית".)

בטופולוגיה "רציפה" מוגדר מושג ה**קו הסגור** כעקום שהוא העתק חד-חד-ערכי רציף של מעגל, ומוכח כי קו סגור מחלק את המישור לשני תחומים נפרדים כך שניתן לעבור מכל נקודה בתחום לכל נקודה אחרת באותו תחום על ידי קו שבור (סדרה סופית של קטעים) שאינו חותך את הקו הסגור. התחום ה**פנימי** מוגדר ככזה שלא ניתן להעביר בו ישר (אינסופי), ובתחום ה**חיצוני** ניתן לעשות זאת.

התחום הפנימי שהוגדר לעיל הוא **פשוט-קשר** (או **בעל דרגת קשר 1**): כל קו שבור אשר פנימי לתחום ומחבר שתי נקודות על שפתו של התחום מפריד אותו לשני תחומים נפרדים (במובן הנ"ל). כמוכן, כל קו סגור הנמצא כולו בתוך התחום מגדיר תחום פנימי שכולו בתוך התחום המקורי. נאמר שלתחום יש **דרגת קשר n** אם קיים קו שבור המחבר שתי נקודות על שפתו כך שהשמטת נקודות שעל הקו הופכת את המרחב הנותר לבעל דרגת קשר **n-1**. לדוגמה: התחום הכלוא בין שני קוים סגורים (שאינם נחתכים) הוא בעל דרגת קשר 2.

למרות שההצגה הנ"ל נסמכת על המרחב האוקלידי הדו-ממדי, ניתן להציג את המושגים הנ"ל ללא התייחסות למרחב מטרי כשהוא. בפרט ניתן להגדיר "מרחב טופולוגי" כאוסף קבוצות (שיקראו פתוחות) אשר סגור לאחודים, ומכיל את הקבוצה הריקה וגם את המרחב כולו. בנוסף, בדרך כלל דורשים ("תכונת האוסדורף") שכל שתי נקודות (איברים של המרחב) שונות "ניתנות להפרדה" במובן שיש באוסף קבוצות זרות (שנקראות סביבות) המכילות אותן.

סעיף 19.3: על משטחים עקומים

תחילה מוצג "משפט הפאונים של אוילר" (אשר גורס כי בפאון עם Q קדקודים, M צלעות, וP פאות מתקיים $Q+P=M+2$) כטענה על תחומים במישור. זה נעשה ע"י העתקה של המשטח של הפאון (ולמעשה של כל גוף קמור שפניו מחולקים לפאות מצולעות) למישור באופן שאחת הפאות מועתקת לתחום החיצוני ושאר הפאות מועתקת לתחומים פנימיים (והצלעות מועתקות לקוי הפרדה בין התחומים). מכאן אפשר גם לעבור להצגה באמצעות גרפים מישוריים והתייחסות לתחומים המופרדים בהם. בשני המקרים ההוכחה היא באינדוקציה על ידי השמטה של צלעות/קשתות.

העובדה שיש רק חמישה פאונים משוכללים מוכחת באמצעות השוויון הנ"ל תוך התעלמות מתנאים מטריים (כגון דרישה של שוויון אורכי הצלעות). די להשתמש בתנאי שכל פאה כוללת אותו מספר שלל קדקודים (שיסומן N) וכל קדקוד פוגש מספר זהה של צלעות (שיסומן R). מכך נובע כי

$$PN = QR = 2M$$

ובשילוב עם השוויון $Q+P=M+2$ (והתנאים ה"הגדרתיים" $N,R\geq 3$) נובע $N,R<6$. מכאן שדי לבחון את המספר הקטן של ערכים אפשריים עבור N וR, כאשר כל קביעה של ערכים אלו קובעת ערך יחיד של M (וערך יחיד לQ וP).

בהמשך הסעיף סוקר פרנקל משטחים עקומים מסוגים שונים (כגון טבעת מביוס, בקבוק קליין, וטורוס) ומתייחס לבעיות כגון צביעת תחומים (במובן של סעיף 19.2) על משטחים אלו. בסיום הסעיף הוא דן במושג המרחב הטופולוגי (ראו סוף סעיף 19.2 בסקירה שלי). ההגדרה שלו יוצאת ממושג

הסביבה של נקודה שהיא קבוצה המכילה את הנקודה, והמרחב הוא אוסף של סביבות המקיים אקסיומות מסוימות (למשל עפ"י האוסדורף):

1. לכל נקודה יש לפחות סביבה אחת.
2. החיתוך של שתי סביבות של נקודה הוא סביבה של הנקודה.
3. אם נקודה p היא בסביבה S של נקודה q, אז קיימת סביבה של p שחלקית לS.
4. לכל שתי נקודות שונות יש סביבות מתאימות שהינן זרות.

יודגש שהאקסיומות הנ"ל אינן קובעות "טופולוגיה" יחידה אלא מגוון רחב של טופולוגיות אשר מאופיינות על ידי קביעה מפורטת יותר של מהות הקבוצות/סביבות (קרי: דרישות נוספות).

הפרק מסתיים בהדגשה של האופי האיכותי והמבני של הטופולוגיה, והניסיון להתרחק ממושגים כמותיים. דברים דומים נאמרו על האלגברה (ראו פרק 8). לסיום פרנקל מצטט את וייל שדיבר על "מאבק של מלאך הטופולוגיה בשטן האלגברה המופשטת על שליטה בתחומי המתמטיקה השונים".

פרק 20: מגוון של גאומטריות ואקסיומת המקבילים

באיזה מובנים המגוון שמוצג כאן שונה מזה שהוצג בפרקים 18-19? נראה שבהשוואה לפרק 18 מדובר בעיקר ברדיקליות של ההפעלה של אותה גישה מחשבתית (כאשר הרדיקליות מתבטאת גם בתוצרי הגישה וגם בהצגה שלהם). בנוסף לכך, בשלושת הסעיפים הראשונים, ההיסטוריה של התוצרים של הפעלה זו שונה מהותית מההיסטוריה של התוצרים שבפרק 18, משום שהם נתקלו בהתנגדות אידאולוגית/פילוסופית די ממושכת. ענין תוכני יותר הוא שהגאומטריות שיוצגו כאן מתייחסות באופן מפורש יותר לשימוש באקסיומת המקבילים.

סעיף 20.1: על מרחבים ליניאריים בעלי ארבע ויותר ממדים

קל להבין את המושג שבכותרת מתוך גישה אנליטית אשר מזהה ממדים עם משתני קואורדינטות, אלא הכוונה כאן היא לפתח את מושג המרחב הלינארי הרב-ממדי מתוך גישה סינטטית.

הבסיס לדיון הם מושגי הנקודה והישר שהוא אוסף צפוף (ובלתי חסום) של נקודות סדורות. ניתן להגדיר אפילו גאומטריה חד-ממדית בה ניתן לדבר רק על יחס הסדר של נקודות, אבל הדיון נהפך עשיר יותר כאשר ***דורשים ממד נוסף*** (קרי: מוסיפים אקסיומה הדורשת *קיום נקודה שאינה על הישר*). בשלב זה נהפכת ***אקסיומת הישר*** (אשר אומרת שכל שתי נקודות נתונות קובעות ישר וכל ישר נתון נקבע על ידי כל שתי נקודות הנמצאות בו) לבעלת תוכן. אוסף האקסיומות הנ"ל מגדיר את המרחב הדו-ממדי: הוא מכיל את כל הנקודות אשר נמצאות על כל הישרים המחברים נקודה הנמצאת על הישר S עם הנקודה X (שאינה על S).

בנוסף, מוספת ***אקסיומת המקביל*** אשר דורשת, לכל ישר נתון S ולכל נקודה X שאינה על הישר S, קיום של ישר יחיד שאינו חותך את הישר S ומכיל את הנקודה X. המרחב הזה נקרא **מישור** אם הוא ***לינארי*** (קרי: מקיים את דרישת הקוויות) במובן שלכל שתי נקודות במרחב מתקיים שכל הנקודות של הישר הנקבע על ידם נמצאות במרחב. למרות שהמישור הוגדר על ידי הסתמכות על הישר S והנקודה X, אותו מישור נקבע על ידי ישר S' כלשהוא הנמצא במישור ונקודה כלשהיא הנמצאת במישור אך לא על הישר S'.

דיון דומה יאפשר לנו להגדיר מרחבים (לינאריים) בעלי יותר משני ממדים. בפרט, המרחב התלת-ממדי מוגדר על ידי ***דרישת ממד נוסף*** (ביחס למישור או למרחב הדו-ממדי) וכולל את אוסף הנקודות הנמצאות על ישרים אשר מכילים נקודה של המישור והנקודה שאינה במישור ובנוסף לכך (בהתאם לדרישת המקביל במרחב הדו-ממדי) את כל הנקודות אשר נמצאות על קוים אשר מקבילים לקווים הנמצאים במישור ועוברים בנקודות שאינן במישור. הלינאריות של המרחב התלת-ממדי נובעת מזו של המישור (ז"א היא משפט הניתן להוכחה ולא אקסיומה).

במרחב התלת-ממדי אנו נתקלים בתופעה חדשה: ישרים אשר אינם חותכים זה את זה ואינם מקבילים אלא "מצטלבים" (קרי: אינם נמצאים באותו מישור).

דרישה של ממד נוסף (קרי: נקודה שאינה נמצאת במרחב התלת-ממדי) מובילה אותנו למרחב **ארבע-ממדי**: הוא כולל את אוסף הנקודות אשר נמצאות על ישרים אשר מכילים נקודה של המרחב התלת-ממדי ואת הנקודה שאינה נמצאת בו וכן את כל הנקודות אשר נמצאות על קוים אשר מקבילים לקווים הנמצאים במרחב התלת-ממדי ועוברים בנקודות שאינן בו.

הדברים מתבהרים כאשר מציגים את המושג של **משקל הנקודות** של מרחב שמוגדר כמספר הנקודות הקובעות אותו (קרי: מספר הנקודות הקטן ביותר אשר נמצאות בו אך לא במרחב ממד נמוך יותר). משקל הנקודות של מרחב D-ממדי הינו D+1 (ראן המקרים המוכרים של D=0,1,2,3). ממושג זה עולה שממד המרחב נקבע על ידי צירוף שני מרחבים הינו סכום ממדיהם בניכוי/הפחתה של ממד המרחב המשותף שלהם (כאשר מרחב ריק הוא בעל מימד 1- (בהתאם למשקל נקודותיו), וכאשר נלקחות בחשבון גם "נקודות לא אמיתיות" (נקודות הפגישה של מקבילים)).

סעיף 20.2: על גאומטריה לא-אוקלידית מסוג אחד ("היפרבולית")

אקסיומת המקבילים שקולה לטענה שסכום זוויותיו של כל משולש שווה לסכום שתי זוויות ישרות. משפטים המיוחסים (בטעות) ללגננדר קובעים כי אם טענה זו אינה נכונה הרי שסכום הזוויות של כל משולש קטן מסכום שתי זוויות ישרות (בהנחת שאר האקסיומות של הגאומטריה האוקלידית). **הגאומטריה ההיפרבולית** מתקבלת מן הסתירה של אקסיומת המקבילים (וקבלת שאר האקסיומות של הגאומטריה האוקלידית, אשר מגדירות את מה שנקרא בעבר "גאומטריה מוחלטת").

בניגוד ל**גאומטריה האוקלידית** אשר מניחה קיום ישר *יחיד* אשר אינו חותך ישר נתון, S, ועובד דרך נקודה, P, שאינה מצויה על הישר S, **הגאומטריה ההיפרבולית** מניחה קיום שני ישרים כאלו (מה שגורר קיום אינסוף ישרים כאלו). ישר כזה (העובר דרך הנקודה P ואינו חותך את S) נקרא **מקביל לS בנקודה P** אם כל ישר אחר העובר בזווית שבינו לבין S חותך את S. אכן, המקביל הזה הינו "גבול" המתקבל כאשר מסובבים קרן (קרי: ישר מכוון אינסופי לכיוון אחד) היוצאת מהנקודה P עד שאינה חותכת את S (מהצד המתאים). אכן, לכל אחד משני הכיוונים יש גבול כזה, ושתי הקרניים הללו לא חלות על אותו ישר, ויש ביניהן זווית חדה שגודלה תלוי בגודל האנך מהנקודה P לישר S. כמו כן, כל תת-קרן של המקביל הנ"ל גם היא מקבילה לישר S, בנקודת ההתחלה שלה. (הישרים האחרים העוברים דרך P ואינם חותכים את S נקראים **על-מקבילים**.)

תופעות נוספות בגאומטריה ההיפרבולית כוללות את העובדה שישרים מקבילים מתקרבים זה לזה כך שהמרחק ביניהם הולך וקטן מתחת לכל ערך חיובי, ואילו ישרים שאינם מקבילים מתרחקים זה מזה (בין אם הם נחתכים או על-מקבלים). מכאן, שהמקום הגאומטרי של נקודות אשר נמצאות במרחק קבוע מישר נתון הוא קו עקום. כפי שנאמר בתחילת הסעיף, סכום הזוויות בכל משולש קטן מסכום שתי זוויות ישרות. למעשה, לכל ערך חיובי קיים משולש שסכום זוויותיו קטן ממנו.

סעיף 20.3: על גאומטריה לא-אוקלידית מסוגים נוספים ("אליפטיות")

בניגוד ל"גאומטריה המוחלטת" של הסעיף הקודם, כאן נניח אי-קיום של ישר המקביל לישר נתון: זאת אומרת, נניח שלכל ישר S ונקודה P שאינה מצויה על S, כל ישר (אחר) אשר עובר דרך P חותך את הישר S. תחת הנחה זו מתקבלות הרבה גאומטריות הנקראות **אליפטיות**. בכולן מתקיים שסכום זוויות של כל משולש גדול מסכום שתי זוויות ישרות.

בנקודה זו יש לומר דבר שהיה צריך להיאמר כבר קודם: הגאומטריה כדיסציפלינה מתמטית אינה חוקרת את המרחב הפיזי הממשי אלא את כל מבני המרחב האפשריים, ואלו כוללים הו את שתי הגאומטריות המוחלטות (אוקלידית והיפרבולית) והן את כל המגוון של גיאומטריות אליפטיות.

תופעות נוספות בגאומטריה אליפטית כוללות את היותו של כל ישר קו סגור בעל אורך סופי קבוע, ואת המפגש של כל הישרים הניצבים לישר נתון (ומכוונים לאותו כיוון) באותה נקודה.
יש להבחין בין שני תתי-מקרים הנבדלים בתשובה לשאלה האם הנקודות הנ"ל המתאימות לשני הכיוונים הן שונות או מתלכדות. המקרה של התלכדות נקרא **חד-אליפטי** (או אליפטי) ואילו המקרה האחר נקרא **דו-אליפטי** או כדורי.

באנלוגיה לסעיף 7.1 (בו דובר על המספרים המרוכבים), וסעיף הדיון בפרק 15 (בו דובר על אקסיומת הבחירה), חוסר הסתירה של הגאומטריות השונות הנ"ל מתבסס על ההנחה שגאומטריות פשוטות ואינטואיטיביות יותר הינן חסרות סתירה.

סעיף 20.4: על הביסוס האקסיומטי של הגאומטריה הקלסית

למרות ההילה שנקשרה למבנה האקסיומטי של הגאומטריה האוקלידית, הרי שהמבנה הפורמלי הקלסי (של אוקלידס) אינו עומד באמות המידה של דיוק ובהירות שהתפתחו במאה ה19. (אין בדבר בכדי להתמיה שהרי אמות המידה למושגים אלו מתפתחים ומשתנים במהלך הזמן.)

ההצגה המחודשת של הגאומטריה הקלסית ("האוקלידית") הוצעה ע"י הילברט בשנת 1899. הצגה זו מתייחסת למרחב התלת-מימדי, מבחינה בין שלושה סוגי אובייקטים (נקודה, ישר ומישור), וכוללת ששה יחסים (אחד טרנרי וחמישה בינאריים) אשר מוגדרים באמצעות 20 אקסיומות.

הביסוס האקסיומטי אשר נסקר בסעיף זה מתנתק לחלוטין מאלמנטים הסתכלותיים ומתנהל במונחים של מושגים ויחסים חסרי תוכן "ממשי" אשר האפשרות לממשם באופן מוחשי היא חיצונית לו.

מערכת פורמלית/אקסיומטית בנויה מאוסף של **עצמים/מושגים ראשוניים** (כגון: נקודות וישרים), **יחסים ראשוניים**, (כגון: נקודה נמצאת/חלה על ישר), **ומשפטים ראשוניים** (הקרויים אקסיומות). העצמים הראשוניים והיחסים הראשוניים הינם חסרי תוכן/מובן, והם מקושרים ביניהם (ומקבלים "מובן" פורמלי (בלבד)) על ידי האקסיומות. השמות של העצמים והיחסים הראשוניים עשויים להיבחר באופן שיצביע על מימוש מסוים של המערכת, אלא שהקישור הזה אינו מחייב. מושגים מורכבים יותר מוצגים על ידי שילוב של הקודמים באמצעות הגדרות, ומשפטים נוספים נובעים מן הקודמים על ידי הוכחות (פורמליות).

הבחירה של מושגים, יחסים ומשפטים ראשוניים היא כביכול שרירותית, כל עוד היא נמנעת מסתירה. בנוסף, רצוי להימנע מיתירות של המושגים והיחסים הראשוניים (קרי: להחליף, ככל שהדבר אפשרי, אלמנטים ראשוניים על ידי הגדרות) ושל האקסיומות (קרי: להחליף אקסיומות על ידי משפטים אשר ניתנים להוכחה על ידי שאר האקסיומות) כל זאת תוך שימת לב לפשטות (קרי: קלות ההבנה) של המערכת בכללותה. למרות ההכרזה הראשונית על שרירותיות, מערכת פורמלית נבחרת בדרך כלל על מנת להוות הפשטה של עולם תוכן ממשי מסוים, מתוך כוונה להטיב להבין את העולם הזה על ידי ניתוח מופשט שלו.

המערכת הפורמלית הנסקרת בסעיף זה הוצעה על ידי הילברט וכוללת שלוש מושגים ראשוניים -- נקודה, ישר ומישור – וחמש יחסים (כגון: היות נקודה על ישר), ומספר רב (קרי: 20) של אקסיומות. הסקירה כוללת הצבעה על אקסיומות שהשמטתן ו/או החלפתן מובילה לגאומטריות האחרות שנידונו בפרק הנוכחי.

(פרנקל התכוון לכתוב כרך/פרק נוסף שיוקדש לדיון באופן בניה של מערכות פורמליות/אקסיומטיות, אלא שהעניין לא הסתייע. הפניות לאותו כרך נוסף מצויות בסעיף הנוכחי וגם במספר פרקים אחרים בספר.)