

בחינה סופית – מתמטיקה שימושית

זמן הבחינה: שעתיים

1. עבור המערכות הבאות, קיבעו והסבירו (בקצרה, לא יותר משתי שורות, אין צורך בשום חישוב) מה מהאפשרויות הבאות נכונות (5 נקודות לכל סעיף):

א. המערכת מסודרת: כל הפתרונות מתכנסים בסוף לנקודות שבת, לתנועה מחזורית או מתבדרים לאינסוף

ב. המערכת כאוטית: ניתן להוכיח שיש קבוצה של תנאי התחלה שעבורם הדינמיקה כאוטית

ג. לא ניתן להחליט בין אפשרויות א או ב ללא אנליזה יותר מפורטת

.I

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -x + 3x^2$$

.II

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -x + 3x^2 + y^2 x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -y + 3y^2 + yx^2,$$

.III

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -x + y,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -y + x,$$

.VI

$$\frac{dN}{dt} = N(c - N)$$

$$\frac{dc}{dt} = s - 2cN$$

.V

$$\frac{dN}{dt} = N(c - N)$$

$$\frac{dc}{dt} = s - 2cN$$

$$\frac{ds}{dt} = s(N + c - s)$$

.IV

$$N_{k+1} = rN_k(1 - N_k), \quad r > 0$$

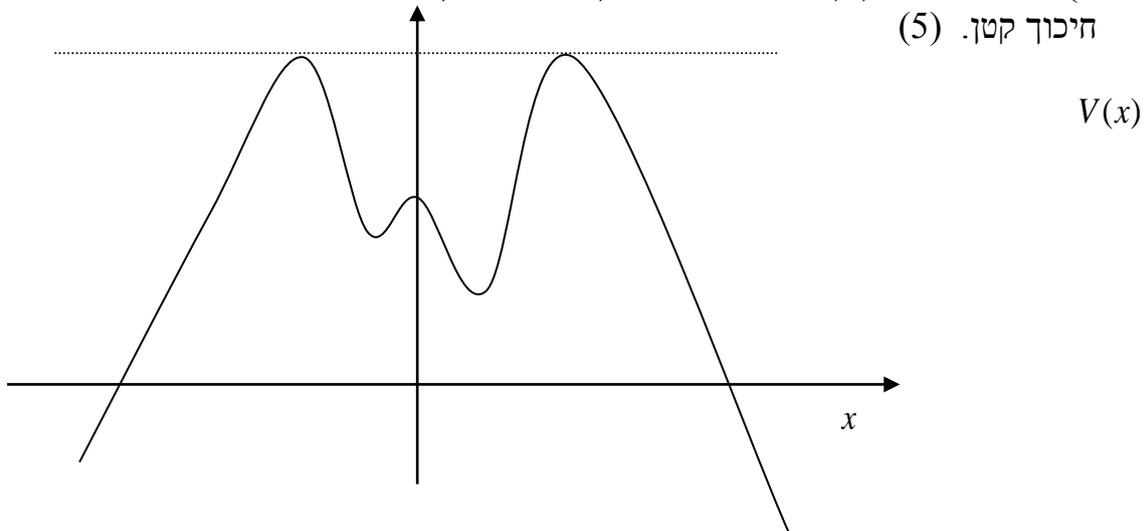
2. בתרגיל זה נסתכל על הבעיה הקלאסית של תנועת חלקיק חד-ממדית תחת השפעת כוח משמר:

$$[1] \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) = -V'(x),$$

$$x(t=0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(t=0) = v_0$$

עבור הפוטנציאל המצויר למטה, מצאו באופן גרפי:

- 1) את כל נקודות השבת ואת סוגן (מרכז או אוכף) (10)
- 2) את פונקציית הכח $F(x)$ (5)
- 3) ציירו את כל סוגי הפתרונות האפשריים במרחב הפאזה (x, v) (10)
- 4) הסבירו מהם סוגי הפתרונות שקיבלתם ואיך היציבות של נקודות השבת משפיעה על סוג הפתרונות שקיבלתם לידם. (10)
- 5) נניח שעל החלקיק פועל גם כוח חיכוך – ציירו איך ישתנה מרחב הפאזה עבור כוח חיכוך קטן. (5)



3. המערכת הבאה מתארת בקירוב את היחס בין כמות הכדוריות הלבנות בדם N והורמון הגדילה G :

$$\frac{dN}{dt} = a \frac{1+0.01G}{1+0.001G} - N$$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{0.01+N} - \left(1 + \frac{N}{0.01+N}\right)G$$

- א. מיצאו את נקודות השבת החיוביות (ברביע הראשון) של מערכת זו. (10)
 - ב. מהי היציבות של נקודות השבת שמצאתם? (לשם פשטות החישוב, ניתן להניח בסעיף זה ש a מסדר גודל 1 ולהזניח את כל האיברים מסדר גודל 0.01 ומטה). (10)
 - ג. מה צריך להיות ערך הפרמטר a בכדי שרמת הכדוריות הלבנות במצב שיווי המשקל תהיה מעל לרמה הקריטית להתפתחות זיהומים: $NC = 0.1$? (5)
 - ד. ניתן לתת את הורמון הגדילה בעזרת אינפוזיה – נמדל אפשרות זו על ידי הוספת קבוע $c \gg 1000$ לצד ימין של המשוואה של G . מהו הערך הקריטי של a כעת? (5)
- הערה: אסטרטגיה זו יכולה לשמש לעזרה לחולים שעוברים טיפול כימוטרפי
ראו: Shochat and Rom-Kedar, Clinical Cancer Research 2008