

בחינה סופית

זמן הבחינה: שתיים
ניקוד: 1(30), 2(35), 3(35)

1. עבור המערכות הבאות, קיבעו והסבירו מה מהאפשרויות הבאות נכונות:
א. המערכת מסודרת: כל הפתרונות מתכנסים בסוף לנקודות שבת, לתנועה מחזורית או מתבדרים לאינסוף
ב. המערכת כאוטית: ניתן להוכיח שיש קבוצה של תנאי התחלה שעבורם הדינמיקה כאוטית
ג. לא ניתן להחליט בין אפשרויות א או ב ללא אנליזה יותר מפורטת

$$x \in \mathbb{R}, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -x + 3x^2 + x \cos(3t) \quad \text{I}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} = -x + x^3 + 4 \quad \text{II}$$

$$N_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \quad N_{k+1} = 5N_k + 3 \quad \text{III}$$

$$N_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \quad N_{k+1} = 5N_k - 2N_{k-1} + 3 \quad \text{VI}$$

$$N_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \quad N_{k+1} = 5N_k(1 - 2N_{k-1}) + 3 \quad \text{V}$$

IV

$$\frac{dN}{dt} = N + 4c$$

$$\frac{dc}{dt} = s - 2N \quad (N, c, s) \in \mathbb{R}^3$$

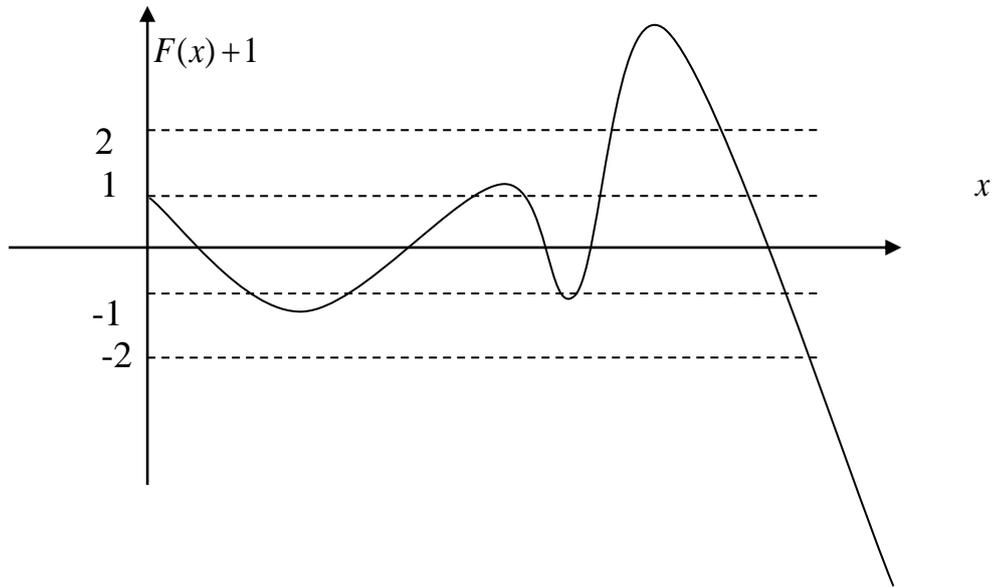
$$\frac{ds}{dt} = N + c - s$$

2. התברר כי צפיפות הדגים x בבריכת דגים מסוימת נשלטת על ידי המשוואה:

$$[1] \quad \frac{dx}{dt} = F(x) + C$$
$$x(t=0) = x_0,$$

- כאשר הקבוע C משקף את כמות הדגים המוזרמים לבריכה ביום ביחידת נפת. פונקציית הגידול עבור $C=1$ מצוירת למטה. מצאו באופן גרפי:
(א) את כל נקודות השבת ואת היציבות שלהן (עבור $C=1$)
(ב) ציירו את כל סוגי הפתרונות האפשריים במקרה זה בשתי דרכים: על גבי ציר ה- x בגרף הנתון ובתרשים התפתחות האוכלוסיה בזמן (גרף של (x,t) עבור תנאי התחלה שונים).
(ג) הסבירו מהם סוגי הפתרונות שקיבלתם ואיך היציבות של נקודות השבת קשורה לסוג הפתרונות שקיבלתם.

(ד) נניח כעת שביכולתכם לשלוט בכמות הדגים המוזרמת C. הסבירו מה יקרה (כלומר איך ישתנו מכלול הפתרונות) אם $C=0$ או אם $C=3$



3. על פי חוק הוק, תנועת קפיץ בעל אורך טבעי L מתוארת על ידי המשוואה:

$$x \in \mathbb{R}^+, \quad m, k > 0 \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - L)$$

- (א) כיתבו את המשוואה כמערכת של שתי משוואות מסדר ראשון
 (ב) כמה נקודות שבת יש ומה יציבותן (נא למצוא ערכים עצמיים).
 (ג) ציירו את הפתרונות במרחב הפאזה.

(ד) מהם פתרונות המשוואה עבור תנאי ההתחלה: $\frac{dx}{dt}(0) = 0$, $x(0) = x_0$,

(ה) מה זמן המחזור של פתרונות אלו?

(ו) ניקח כעת בחשבון אפקטים לא לינאריים:

$$x \in \mathbb{R}, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - L) + (x - L)^2$$

חיזרו על סעיפים א, ב, ג עבור המערכת הלא לינארית

(ז) דונו בתלות של זמן המחזור ב $x(0) = x_0$ במקרה הלינארי והלא לינארי.