

בחינה סופית  
 זמן הבחינה: שעהיים  
 ניקוד: (30)1, (25)2, (30)3, (15)4

1. עבור המערכות הבאות, קיבעו והסבירו מה מהאפשרויות הבאות נכונות. בנוסף, עבור המיפויים II, I, שרטטו את גרף המיפוי:

א. המערכת מסודרת: כל הפתרונות מתכנסים בסוף לנקודות שבת, לתנועה מחזורית או מתבדרים לאינסוף

ב. המערכת כאוטית: ניתן להוכיח שיש קבוצה של תנאי התחלה שעבורם הדינמיקה כאוטית  
 ג. לא ניתן להחליט בין אפשרויות א או ב ללא אנליזה יותר מפורטת

I

$$x_k \in [0,1], k \in \mathbb{Z}^+ \quad x_{k+1} = \begin{cases} 2x_k + 0.5 & 0 \leq x_k \leq 0.25 \\ 2x_k - 0.5 & 0.25 < x_k \leq 0.75 \\ 2x_k - 1.5 & 0.75 < x_k \leq 1.0 \end{cases}$$

II

$$x_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \quad x_{k+1} = 12x_k - 4(x_k)^2 + 22$$

III

$$N_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \quad x_{k+1} = 2x_k - 4x_{k-1} + x_{k-2} + 3$$

IV

$$x \in \mathbb{R}, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -x + 3x^2$$

$$y \in \mathbb{R}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -y + y^2 + 3x^2$$

V

$$\frac{du}{dt} = u + 2uv$$

$$\frac{dv}{dt} = v - 2v^2 + 3w \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{dw}{dt} = wu + v$$

2. מגדלים שני סוגים של שמרים בכלי אחד במעבדה, הסוג הראשון בריכוז  $x$  והסוג השני בריכוז  $y$ . השמרים מייצרים אלוהול, בכמות פרופורציונית לריכוזם, והאלוהול גורם לכך שקצב הגידול שלהם קטן. המודל הבא נכתב בכדי לתאר את גידול השמרים:

$$\frac{dx}{dt} = x[a - b(x + y)]$$

$$\frac{dy}{dt} = y[c - d(x + y)]$$

- a. הסבירו מה משקף כל גורם ופרמטר במשוואה (2)  
 b. כתבו את המימדים של כל המשתנים והפרמטרים (2)  
 c. כתבו את המשוואה באופן לא מימדי. (2)  
 d. מצאו את קווי האפס של המשוואה וסמנו את כיווני שדה המהירויות במרחב הפאזה. (5)  
 e. מצאו את נקודות השבת ואת יציבותן (5)  
 f. זוהי דוגמא לדינמיקת "תחרות". הסבירו למה. (2)  
 g. מהי תוצאת התחרות? (2)  
 h. אם ידוע ש  $\frac{c}{d} > \frac{a}{b}$ , מי משני הסוגים יכול לעמוד בריכוז גדול יותר של אלוהול? (2)  
 i. מה צריך לשנות במודל (ובסיפור המעשה) כך שתהיה אפשרות לגדל את שני סוגי השמרים באותו מיכל? (3)

3. משוואת התנועה של מטוטלת מרוסנת (עם חיכוך) היא:

$$\theta \in (-\pi, \pi], \quad mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta - cL \frac{d\theta}{dt}$$

- a. כתבו את המימדים של כל גורם ופרמטר (הניחו שכל הפרמטרים לא שליליים) (2)  
 b. כתבו את המשוואה בצורה לא מימדית, כמערכת מסדר ראשון (3)  
 c. סטודנט א כתב את משוואות התנועה למטוטלת שאורך המוט שלה הוא 10 ס"מ ומשקלה 1 ק"ג. סטודנט ב כתב את משוואות התנועה למטוטלת שאורך המוט שלה 1 מטר ומשקלה 20 ק"ג. מקדם החיכוך שווה בשני המקרים. סטודנט א טען שמכיוון שהמטוטלת שלו יותר קלה היא זזה יותר מהר, ולכן התדירות שבה המטוטלת שלו נעה, במשערת קטנה, יותר גדולה. האם צדק? הסבירו ונמקו. בפרט דונו לחוד במקרים עם חיכוך ובמקרה ללא החיכוך שבו  $c=0$  (15)  
 d. ציירו את מרחב הפאזה עבור שתי המטוטלות בהנחה שאין חיכוך (10)

4. בחנו את המשוואה

$$x \in R, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -4x$$

- a. כתבו את המשוואה כמערכת משוואות מסדר ראשון (2)  
 b. מצאו את נקודות השבת ואת יציבותן (4)  
 g. ציירו את הפתרונות במרחב הפאזה וכפונקציה של זמן (3)  
 d. מצאו את הפתרון הכללי (3)  
 ה. מצאו את הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה  $\frac{dx}{dt}(t=0) = 8$ ,  $x(t=0) = 0$  (2)  
 ו. הוסיפו פתרון זה באיורים של סעיף ג (1)