

בחינה סופית

12.2.2015

זמן הבחינה: שעתיים

ניקוד: (40)1, (30)2, (30)3

1. עבור המערכות הבאות, קיבעו מהי סוג המערכת ומהם סוגי הפתרונות האפשריים – בפרט הסבירו מי מהאפשרויות הבאות נכונות:

א. המערכת מסודרת: כל הפתרונות מתכנסים בסוף לנקודות שבת, לתנועה מחזורית, לתנועה הומוקלינית או מתבדרים לאינסוף

ב. המערכת כאוטית: ניתן להוכיח שיש קבוצה של תנאי התחלה שעבורם הדינמיקה כאוטית

ג. לא ניתן להחליט בין אפשרויות א או ב ללא אנליזה יותר מפורטת

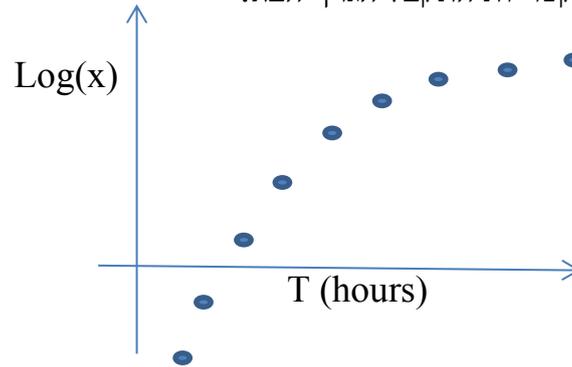
$$x \in \mathbb{R}, \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -x + 3x^2 + 8 \quad .I$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \delta_1 \frac{dx}{dt} = -x + y \\ m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \delta_2 \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad .II$$

$$N_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+ \quad N_{k+1} = 5N_k (N_k - 1) \quad .III$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin x + 3x^2 - 8 \quad .VI$$

2) בניסוי גדילה של בקטריות התקבל הגרף הבא:



הוצאו שלושה מודלים מתימטיים לתיאור הניסוי (כאשר x מסמל את ריכוז הבקטריות ו c את ריכוז הנוטריינטים (ה"אוכל" שהבקטריות צורכות):

$$\frac{dx}{dt} = a + cx \quad .I$$

$$\frac{dx}{dt} = cx + dx^2 \quad .II$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + dx^2 \\ \frac{dc}{dt} = -c - \alpha cx + \beta \end{cases} \quad .III$$

- א. הסבירו, בכל מודל, מה מייצג כל איבר ומהם הערכים של הפרמטרים המייצגים הליכים סבירים מבחינה ביולוגית
- ב. הסבירו מה סוג הפתרונות שיכול להתקבל בכל אחד מהמודלים (עבור הערכים של הפרמטרים שמצאתם בא')
- ג. הסיקו אילו מהמודלים יכולים להסביר את תוצאות הניסוי.
- ד. במידה ויש שני מודלים שיכולים להתאים לתוצאות הניסוי, הציעו ניסוי/מדידה נוספת שיבדיל ביניהם וייקבע מי מהם רלוונטי

3. נתונה המערכת:

$$\frac{dx}{dt} = cx - x^2$$

$$\frac{dc}{dt} = -2c - cx + 3$$

1. מצאו את נקודות השבת של המערכת ואת היציבות שלהן.
2. נסו להשלים את מרחב הפאזה ככל הניתן.