בחינת אמצע סמסטר – הצעה לפתרון

ניקוד: 1(40), 2(30), 3(30)

1. עבור המשוואות הבאות קיבעו מה סוג המשוואה ומהם סוגי הפתרונות האפשריים – בפרט ציינו לכל מערכת :
א. המערכת היא לינארית או לא-לינארית
ב. כמה נקודות שבת יש/ייתכן שיש למערכת (אין צורך לחשב אותן)
ג. מהו סדר המערכת (משוואת הפרשים מסדר ראשון, שני וכדומה, או משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, שני וכדומה)
ד. האם הפתרונות תמיד מונוטוניים או שייתכן כי יהיו פתרונות לא מונוטוניים ? נמקו. במידה וייתכנו פתרונות לא מונוטוניים, הסבירו איך ניתן לבדוק זאת (אם הטענה מבוססת על חישוב אין צורך לחשב אלה רק להסביר את תהליך החישוב, התוצאות האפשריות והמסקנות מהחישוב)

I. $\frac{dx}{dt} = x - 8 \qquad x \in R,$

א. המערכת היא לינארית – במשוואה מופיעה הפונקציה $x(t)$ ונגזרתה הראשונה לפי הזמן בגורמים לינאריים בלבד.
ב. מכיוון שהמערכת לינארית תהיה בה נקודת שבת יחידה.
ג. המשוואה מתארת תלות רציפה בזמן ומופיעה בה נגזרת ראשונה בלבד, לכן זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון.
ד. במודל רציף (משוואה דיפרנציאלית) מסדר ראשון ללא תלות מפורשת בזמן (משוואה אוטונומית) הפתרונות תמיד מונוטוניים בשל יחידות הפתרון.

II. $\frac{dx}{dt} = x + x^2 - 8 \qquad x \in R,$

א. המערכת לא לינארית בשל האיבר x^2 – הפונקציה x מופיעה בצורה לא לינארית במשוואה.
ב. במודל רציף נקודות שבת מוגדרות על-ידי הפתרונות x למשוואה $\frac{dx}{dt} = 0$. במקרה הנתון מתקבלת משוואה ריבועית עבור x ולכן ייתכנו לכל היותר 2 נקודות שבת. ניתן לצפות ל-0,1 או 2 נקודות שבת, כמספר הפתרונות למשוואה הריבועית.
ג. המשוואה מתארת תלות רציפה בזמן ומופיעה בה נגזרת ראשונה בלבד, לכן זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון.
ד. במודל רציף (משוואה דיפרנציאלית) מסדר ראשון ללא תלות מפורשת בזמן (משוואה אוטונומית) הפתרונות תמיד מונוטוניים בשל יחידות הפתרון.

III. $N_{k+1} = aN_k(N_k - 1) \qquad N_k \in R, k \in Z^+$

א. המערכת לא לינארית – הגורם N_k מופיע בצורה לא לינארית במשוואה.
ב. במודל בדיד נקודות שבת מוגדרות ע"י פתרונות למשוואה $N_{k+1} = N_k$. במקרה הנתון מתקבלת משוואה ריבעות עבור N ולכן ייתכנו לכל היותר 2 נקודות שבת (אלה נקודות החיתוך של הפרבולה $y = ax(x-1)$ עם הישר $y = x$). ניתן לצפות ל-0,1 או 2 נקודות שבת, כמספר הפתרונות למשוואה הריבועית המתקבלת.

ג. המשוואה מתארת תלות בדידה בזמן – האינדקס k, ומופיעה בה תלות בצעד אחד אחורה בלבד (האיבר ה-$k+1$ תלוי באיבר ה-k), לכן זו משוואת הפרשים מסדר ראשון.

ד. במודל בדיד מסדר ראשון לא לינארי ייתכנו פתרונות לא מונוטוניים – מכיוון שהמודל בדיד פתרונות יכולים לעבור מצד אחד לצד השני של נקודת השבת ובחזרה מבלי לסתור את יחידות הפתרון שכן מדובר בנקודות בדידות.

ניתן לבדוק לוקלית ליד נקודות השבת האם ההתנהגות היא מונוטונית או לא מונוטונית על-ידי לינאריזציה – אם נסמן $N_{k+1} = F(N_k)$ ו-N^* נקודת השבת, אזי הערך של $F'(N^*)$ יקבע את ההתנהגות ליד נקודת השבת. אם הוא חיובי ההתנהגות תהיה מונוטונית (גדול מ-1 – מונוטונית מתבדרת, קטן מ-1 – מונוטונית מתכנסת) ואם הוא שלילי ההתנהגות תהיה אוסילטורית (עם אותה אבחנה עבור הערך המוחלט $|F'(N^*)|$ – גדול מ-1 = התבדרות, קטן מ-1 = התכנסות). רחוק מהסביבה של נקודת השבת לא תמיד ניתן לקבוע את ההתנהגות על פי הלינאריזציה – כאן ניתן להשתמש בדיאגרמת העכביש או לחשב מספר ערכים במיפוי על-ידי הצבה במשוואה ולהסיק לגבי התנהגות.

.VI $$\frac{dx}{dt} = -\sin x + 0.25 \qquad x \in R,$$

א. המערכת לא לינארית – פונקציית הסינוס אינה לינארית.

ב. נקודות שבת מוגדרות על-ידי הפתרונות x למשוואה $\frac{dx}{dt} = 0$. במקרה הנתון מתקבלת המשוואה $\sin(x) = 0.25$ – למשוואה זו יש אינסוף פתרונות שכן פונקציית הסינוס מחזורית ומחזירה את כל הערכים שבין 1 ל-(-1) אינסוף פעמים בתחום $x \in R$.

ג. המשוואה מתארת תלות רציפה בזמן ומופיעה בה נגזרת ראשונה בלבד, לכן זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון.

ד. במודל רציף (משוואה דיפרנציאלית) מסדר ראשון ללא תלות מפורשת בזמן (משוואה אוטונומית) הפתרונות תמיד מונוטוניים בשל יחידות הפתרון.

.V $$N_{k+1} = 5N_k + N_{k-1} - 1 \qquad N_k \in R, k \in Z^+$$

א. המערכת לינארית – הגורמים N_{k+1}, N_k, N_{k-1} מופיעים בצורה לינארית בלבד.

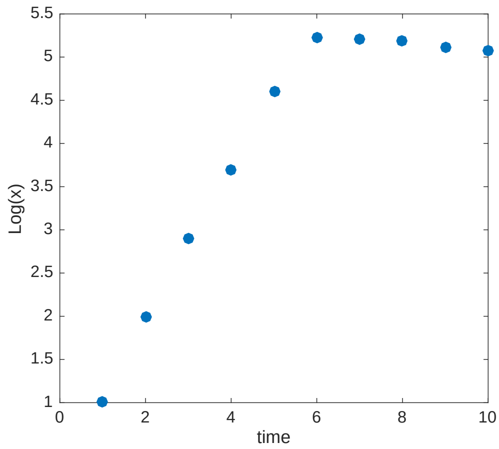
ב. מכיוון שהמערכת לינארית תהיה בה נקודת שבת יחידה. באופן יותר ספציפי – נקודת שבת במשוואה זו תקיים $N^* = N_{k+1} = N_k = N_{k-1}$ ולכן בהצבה במשוואה תתקבל משוואה לינארית עבור N^* לה ייתכן פתרון אחד לכל היותר.

ג. המשוואה מתארת תלות בדידה בזמן – האינדקס k, ומופיעה בה תלות בשני צעדים אחורה (האיבר ה-$k+1$ תלוי באיבר ה-k ו באיבר ה-$k-1$), לכן זו משוואת הפרשים מסדר שני.

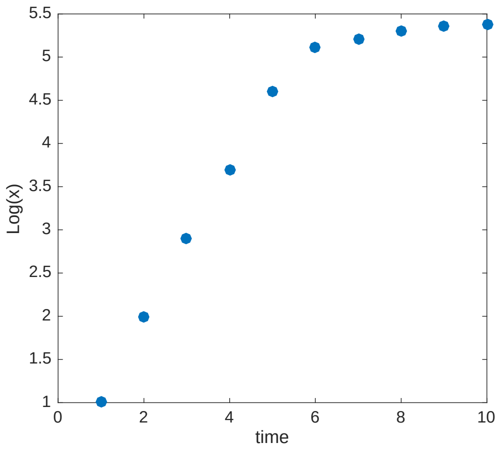
ד. בכיתה ראינו כי במודל בדיד לינארי מסדר שני ללא איבר קבוע במשוואה ייתכנו פתרונות לא מונוטוניים. על ידי ההצבה $N_k = x_k + N^*$ תתקבל משוואה לינארית הומוגנית (ללא איבר קבוע) לx_k ואז ניתן לקבוע אם הפתרונות מונוטוניים או לא על ידי מציאת הערכים העצמיים של משוואה זו (כפי שנעשה בכיתה). מובן של x_k ו N_k יש אותן תכונות מונוטוניות.

2) בניסוי גדילה של שני סוגי בקטריות התקבלו הגרפים הבאים:

סוג ב



סוג א



הוצעו שלושה מודלים מתמטיים לתיאור הניסוי (כאשר x מסמל את ריכוז הבקטריות):

.I $$\frac{dx}{dt} = a + cx$$

.II $$\frac{dx}{dt} = cx + dx^2$$

.III $$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k / b) \qquad x_k = x(k),$$

א. הסבירו, בכל מודל, מה מייצג כל איבר ומהם הערכים של הפרמטרים המייצגים הליכים סבירים מבחינה ביולוגית (כלומר האם תצפו ש a,b,c,d הם חיוביים או שליליים).

ב. הסבירו מה סוג הפתרונות שיכול להתקבל בכל אחד מהמודלים (עבור הערכים של הפרמטרים שמצאתם בא')

ג. הסיקו אילו מהמודלים יכולים להסביר את תוצאות הניסוי א' ואילו את ב'.

ד. (בונוס) במידה ויש שני מודלים שיכולים להתאים לתוצאות הניסוי, הציעו ניסוי/מדידה נוספת שיבדיל ביניהם וייקבע מי מהם רלוונטי

א. בסעיף זה נשאלנו לגבי פרמטרים סבירים מבחינה ביולוגית, כלומר – עלינו לשקול את המודלים האפשריים באופן כללי, לא על סמך תוצאות הניסוי המתוארות.

.I $$\frac{dx}{dt} = a + cx$$

המודל הנתון הינו מודל רציף לינארי. במודל מופיעים שני פרמטרים – איבר חופשי a והמקדם c באיבר cx.

הפרמטר a מייצג תוספת או הפחתה קבועה רציפה לריכוז הבקטריות. a יהיה חיובי אם במהלך הניסוי מוסיפים למבחנה בקטריות בקצב קבוע, ושלילי אם במהלך הניסוי מוציאים מהמבחנה בקטריות בקצב קבוע. שני הערכים אפשריים.

הפרמטר c מייצג את קצב הריבוי של הבקטריות. במודל אוכלוסין רציף כללי המשוואה הינה $\frac{dx}{dt} = R(x,t)x$, כאשר $R(x,t)$ הינו קצב הריבוי ומהווה שיקלול בין כל הגורמים המביאים ללידות (גורמים חיוביים) והגורמים המביאים למיתות (גורמים

שליליים). במודל הנתון, קצב הריבוי c הוא קבוע, כלומר מניחים שאין השפעה של הזמן t או של ריכוז הבקטריות x על הריבוי. קצב הריבוי c יכול להיות חיובי אם יש יותר לידות מאשר מיתות, או שלילי אם יש יותר מיתות מאשר לידות. שני המקרים אפשריים מבחינה ביולוגית.

II. $$\frac{dx}{dt} = cx + dx^2$$

המודל הנתון הינו מודל רציף לא לינארי. במודל מופיעים שני פרמטרים – c, d.
קצב הריבוי של הבקטריות נתון כעת על-ידי $R(x) = c + dx$. על פי מודלים שראינו בכיתה, הפרמטר c מייצג את קצב הריבוי של הבקטריות כאשר אין השפעה של הזמן t או של ריכוז הבקטריות x על הריבוי. c יכול להיות חיובי אם כאשר אין השפעה של הריכוז x יש יותר לידות מאשר מיתות, או שלילי אם יש יותר מיתות מאשר לידות. שני המקרים אפשריים מבחינה ביולוגית. הפרמטר d מייצג את ההשפעה של ריכוז הבקטריות x על קצב הריבוי הכולל, כאשר מניחים כי השפעה זו היא לינארית. ראינו בכיתה דוגמה בה d היה שלילי – למשל המודל הלוגיסטי. במקרה כזה ריכוז בקטריות גדול יותר גורם לריבוי נמוך יותר – למשל אם יש תחרות על משאבים. ראינו בכיתה גם דוגמה בה d היה חיובי – למשל במקרה של אוכלוסיה שצריכה להתגונן מפני טורפים ואז יכולת ההתגוננות עולה ככל שהקהילה גדולה יותר. שני המקרים אפשריים מבחינה ביולוגית, אם כי מכיוון שמדובר בבקטריות עבורן לא נצפה לתופעה של שיתוף פעולה, המקרה בו d שלילי הינו הסביר יותר.

III. $$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k / b) \qquad x_k = x(k),$$

המודל הנתון הינו מודל בדיד לא לינארי. במודל מופיעים שני פרמטרים - a, b.
בדומה למודל הרציף לעיל, מופיעים במשוואה שני גורמים – אחד לינארי ואחד ריבועי.
a, המקדם של הגורם הלינארי, מייצג את קצב הריבוי של הבקטריות כאשר אין השפעה של ריכוז הבקטריות על הריבוי. b מייצג את ההשפעה של של ריכוז הבקטריות x על קצב הריבוי הכולל, כאשר מניחים כי השפעה זו היא לינארית. בדומה לשיקולים בסעיף הקודם, הסימן של איבר האינטראקציה x_k^2 יכול להיות חיובי או שלילי, אך סביר יותר כי יהיה שלילי. בנוסף נשים לב כי סימן מינוס מופיע במודל הנתון, ולכן סביר להניח כי $b > 0$ (אחרת לא היתה משמעות לבחירה דווקא בסימן מינוס).
נשים לב כי גדילה תיוצג על-ידי $a > 1$, וירידה באוכלוסיה תיוצג על-ידי $a < 1$.
בהנחה שאכן $b > 0$, נצפה ל-a חיובי שכן כדי שהמודל יהיה סביר מבחינה ביולוגית הוא צריך להיות מסוגל לתאר אוכלוסיה אי-שלילית לאורך זמן עבור תנאי התחלה שונים, וזה לא מתקיים כאשר $a < 0$ עבור תנאי התחלה הקטנים מ-b.

ב.

I. $\frac{dx}{dt} = a + cx$

זהו מודל רציף לינארי, ולכן במודל זה תהיה נקודת שבת אחת. נמצא את נקודת השבת:

$$a + cx^* = 0 \Rightarrow x^* = -\frac{a}{c}$$

מכיוון שהמשוואה לינארית, יציבות תיקבע על-פי הערך של c. אם $c > 0$ נקודת השבת תהיה לא יציבה, ואם $c < 0$ נקודת השבת תהיה יציבה. לכן בסך הכל ייתכנו המקרים הבאים:

$a > 0, c > 0$ – נקודת השבת היא שלילית ולא יציבה. תחום הערכים הרלוונטי מבחינה ביולוגית הינו רק ערכים אי-שליליים, ולכן סוג הפתרונות המצופה הינו פתרונות מונוטוניים מתבדרים כלפי מעלה.

$a < 0, c > 0$ – נקודת השבת חיובית ולא יציבה. ייתכן פתרון סטטי בנקודת השבת, פתרונות מונוטוניים מתבדרים כלפי מעלה עבור ערכים התחלתיים הגדולים מהנקודת השבת, ופתרונות מונוטוניים המתבדרים כלפי מטה (בפועל – עד $x = 0$ שכן זהו התחום הרלוונטי מבחינה ביולוגית) עבור ערכים התחלתיים הקטנים מנקודת השבת.

$a > 0, c < 0$ – נקודת השבת חיובית ויציבה. ייתכן פתרון סטטי בנקודת השבת, וייתכנו פתרונות המתכנסים מונוטונית לנקודת השבת מלמעלה/למטה, עפ"י תנאי ההתחלה.

$a < 0, c < 0$ – נקודת השבת שלילית ויציבה – כל הפתרונות ייתכנסו מונוטונית לנקודת השבת (בפועל – עד $x = 0$ שכן זהו התחום הרלוונטי מבחינה ביולוגית).

II. $\frac{dx}{dt} = cx + dx^2$

זהו מודל רציף לא לינארי. נמצא את נקודות השבת במודל:

$$cx^* + dx^{*2} = 0 \Rightarrow x^*(c + dx^*) = 0 \Rightarrow x^* = 0, -\frac{c}{d}$$

ננתח את יציבות נקודות השבת:

$$f(x) = cx + dx^2, f'(x) = c + 2dx \Rightarrow f'(0) = c, f'\left(-\frac{c}{d}\right) = -c$$

לכן ייתכנו המקרים הבאים:

$d > 0, c > 0$ – נקודת השבת $x^* = 0$ אינה יציבה. נקודת השבת השניה היא יציבה אך נמצאת בתחום הערכים השלילי ולכן אינה רלוונטית מבחינה ביולוגית. פתרון המתחיל ב-$x = 0$ יישאר ב- ב-$x = 0$, עבור ערכים התחלתיים חיוביים נקבל פתרונות מונוטוניים המתבדרים לאינסוף.

$d < 0, c > 0$ – נקודת השבת $x^* = 0$ אינה יציבה. נקודת השבת $x^* = -\frac{c}{d}$ חיובית ויציבה. ייתכנו פתרון סטטי בכל אחת משתי נקודות השבת, או פתרונות מונוטוניים המתכנסים מלמעלה/מלמטה אל נקודת השבת החיובית, על פי תנאי ההתחלה.

$d > 0, c < 0$ – נקודת השבת $x^* = 0$ יציבה, נקודת השבת $x^* = -\frac{c}{d}$ חיובית ואינה יציבה. ייתכנו פתרונות סטטיים בנקודת השבת. עבור תנאי התחלה בין 0 ל-$\frac{c}{d}-$ נקבל

פתרונות הדועכים מונוטונית לאפס, עבור תנאי התחלה הגדולים מ-$-\frac{c}{d}$ נקבל פתרונות המתבדרים מונוטונית לאינסוף.

$d < 0, c < 0$ – נקודת השבת $x^* = 0$ יציבה, נקודת השבת $x^* = -\frac{c}{d}$ שלילית ואינה נמצאת בתחום הערכים הרלוונטי מבחינה ביולוגית. כל הפתרונות הרלוונטיים ידעכו מונוטונית לאפס.

III. $x_{k+1} = ax_k(1 - x_k / b) \qquad x_k = x(k),$

נמצא את נקודות השבת במודל – נזכור כי זהו מודל בדיד ולכן נקודת שבת תקיים $x_{k+1} = x_k$:

$$x^* = ax^*\left(1 - \frac{x^*}{b}\right) \Rightarrow x^*\left(a - 1 - \frac{a}{b}x^*\right) = 0 \Rightarrow x^* = 0, b(a-1)/a$$

נבדוק מתי נקודת השבת השניה הינה חיובית, כלומר בתחום הערכים הרלוונטי:

$$\frac{b(a-1)}{a} > 0 \Rightarrow \frac{a-1}{a} > 0 \Rightarrow a > 1$$

ננתח את יציבות נקודות השבת:

$$F(x_k) = ax_k\left(1 - \frac{x_k}{b}\right) \Rightarrow F'(x_k) = a - 2\frac{a}{b}x_k$$

$$\Rightarrow F'(0) = a, F'\left(b - \frac{b}{a}\right) = a - 2a + 2 = -a + 2$$

כלומר $x^* = 0$ היא בכל מקרה נקודת שבת לא יציבה, ו-$x^* = b - \frac{b}{a}$ תהיה יציבה עם התכנסות מונוטונית עבור $1 < a < 2$, יציבה עם התכנסות אוסילטורית עבור $2 < a < 3$, ולא יציבה עבור $a > 3$. לכן הפתרונות שיכולים להתקבל הינם פתרונות המתרחקים מאפס ומתכנסים לנקודת השבת החיובית בצורה מונוטונית או לא מונוטונית, או פתרונות שלא מגיעים לאף אחת מנקודות השבת (מתבדרים מכל אחת מנקודות השבת בסביבה מספיק קרובה אליה) כתלות בפרמטר a. בנוסף ייתכנו פתרונות קבועים בנקודות השבת.

ג. בניסוי א' נצפית התנהגות מונוטונית עולה ומתכנסת לערך חיובי קבוע. שלושת המודלים המוצעים יכולים לתאר אותו עבור ערכי הפרמטרים הבאים (התכנסות לנקודת שבת חיובית יציבה):

I. $a > 0, c < 0$

II. $d < 0, c > 0$

III. $1 < a < 2, b > 0$

בניסוי ב' נצפית התנהגות שאינה מונוטונית, ולכן היא אינה יכולה להיות מתוארת על ידי המודלים I או II שכן אלו מודלים רציפים מסדר ראשון בהם ההתנהגות תמיד מונוטונית. מודל III יכול לתאר את תוצאות הניסוי עם הפרמטר $a > 2$.

3. נתבונן במודל:

$$N_{k+1} = -4 + 6N_k - {N_k}^2 \qquad N_k \in R, k \in Z^+$$

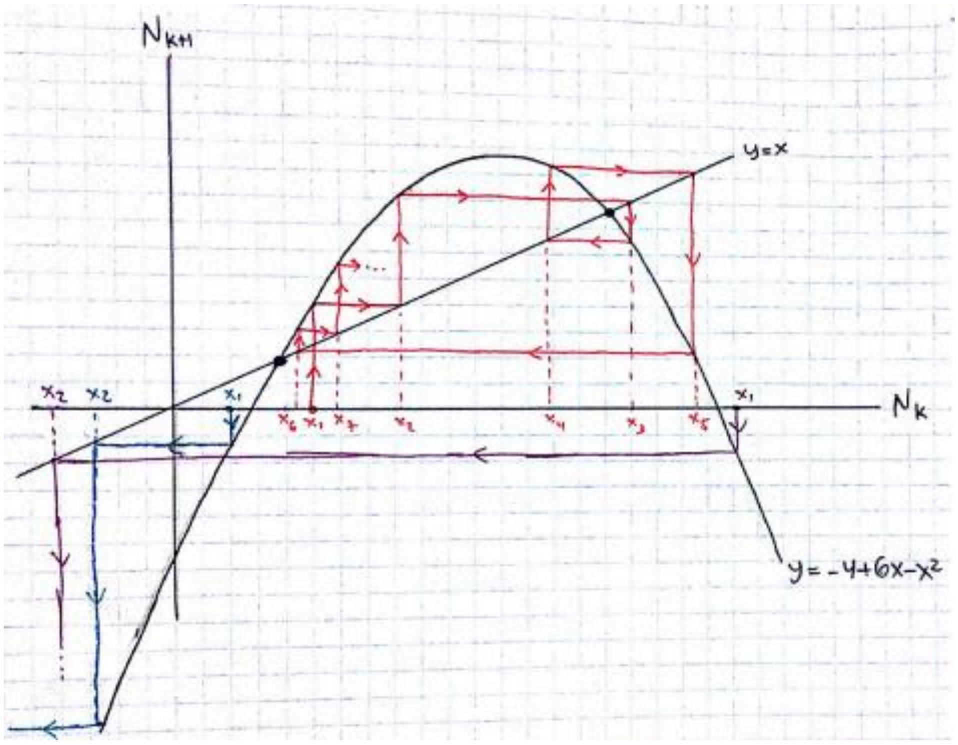
א. מהן נקודות השבת של מודל זה?
ב. ציירו באופן איכותני את דיאגרמת העכביש המתאימה
ג. חיקרו את יציבות נקודות השבת שקיבלתם: כתבו את משוואות הלינאריזציה ליד כל אחת מהנקודות, הסיקו לגבי היציבות/אי היציבות שלהן, הדגימו באופן סכמטי את תוצאות אלו על דיאגרמת העכביש.
ד. (בונוס) מהי התנהגות הפתרונות לאחר כמה איטרציות?

א. נמצא את נקודות השבת:

$$\mathrm{N} = -4 + 6N - N^2 \Rightarrow N^2 - 5N + 4 = 0 \Rightarrow (N-1)(N-4) = 0$$

נקודות השבת הן $N^* = 1, N^* = 4$.

ב. דיאגרמת העכביש - N_{k+1} כתלות ב-N_k – משוואת המיפוי + מסלולים אופייניים לדוגמה:



ג. לינאריזציה:

$$F(N) = -4 + 6N - N^2 \Rightarrow F'(N) = 6 - 2N$$
$$F'(1) = 4, F'(4) = -2$$

לוקלית ליד נקודות השבת, הלינאריזציה נתונה על-ידי:

ליד $N^* = 1$: $\mathrm{N}_{k+1} \approx F(N^*) + F'(N^*) \cdot (N_k - N^*) = -3 + 4N_k$
ליד $N^* = 4$: $\mathrm{N}_{k+1} \approx F(N^*) + F'(N^*)(N_k - N^*) = 12 - 2N_k$

קיבלנו כי $N^* = 1$ אינה יציבה ובקרבתה נקבל התבדרות מונוטונית מנקודת השבת, וכי $N^* = 4$ גם אינה יציבה ובקרבתה נקבל התבדרות אוסילטורית (תנודות מתבדרות) מנקודת השבת.
ניתן לראות תוצאות אלה גם באופן סכמטי על דיאגרמת העכביש בקרבת כל אחת מנקודות השבת: