11. אי-כריעות של בעיות קומבינטוריות

כל הפונקציות הספציפיות שהוכחנו עד כה שהן אינן ניתנות לחישוב (וכן כל השפות הלא כריעות שהצגנו), מתייחסות לקידודים של מכונות טיורינג. התייחסות זו הינה מפורשת בכל המקרים (פרט למקרה של סיבוכיות קולמגורוב, שם היא סמויה אך מהותית). בפרק זה ברצוננו להציג בעיות בלתי כריעות, אשר מקורן אינו בקידוד של מכונות טיורינג או של מכונות בכל מודל אחר של חישוב.

<u>הערה למתקדמים:</u> למעשה לא נעמוד ביומרה זו, משום שהבנת הרדוקציות שנציג תבהיר כי למעשה בעיות אלו מסוגלות לעשות סימולציה של חישובי מכונת טיורינג ולכן במובן מסוים (אם כי לא טבעי) הן מהוות מודל חישובי.

יתרון נוסף של הצגת בעיות אלו הוא שהרדוקציה שבעזרתה אי-כריעותן מוכחת, הינה מבלבלת פחות משום שהיא מייצרת דברים שאינם בעצמם קידוד של מכונות.

11.1 בעית הריצוף

בעיית ריצוף המישור הוצגה כבר בקורס "אלגוריתמים בתורת הגרפים" ונוסחה באופן הבא: "נתונה קבוצה סופית של טיפוסי מרצפות, כאשר כל אחת מארבע הדפנות של מרצפת צבועה בצבע מתוך קבוצת צבעים סופית. האם ניתן לרצף את המישור (האינסופי) כולו בעזרת מרצפות אלו (כאשר אסור לסובב או להפוך מרצפות) באופן שהדפנות הסמוכות של כל שתי מרצפות שכנות, צבועות באותו צבע?". כפי שהוכח בקורס הנ"ל, הרי שבעיה זאת שקולה לבעית הריצוף של "רבע המישור". להלן ניסוח מפורט יותר של בעיה דומה.

<u>הגדרה 11.1:</u> בעית ריצוף המישור.

<u>קלט:</u>

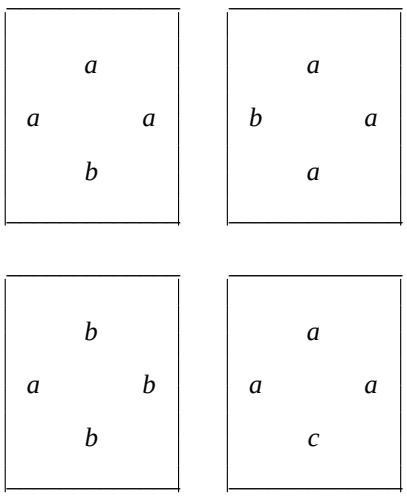
- קבוצה סופית של צבעים C.
- קבוצה סופית של טיפוסי מרצפות $T \subseteq C \times C \times C \times C$ (כל מרצפת היא ריבוע שארבע דפנותיו צבועות בצבעים מתוך C).
- ריצוף התחלתי (סופי) $\alpha \in T^*$ (שורה של $|\alpha|$ מרצפות) כך שהדפנות הסמוכות של מרצפות שכנות צבועות באותו צבע.

<u>שאלה:</u>

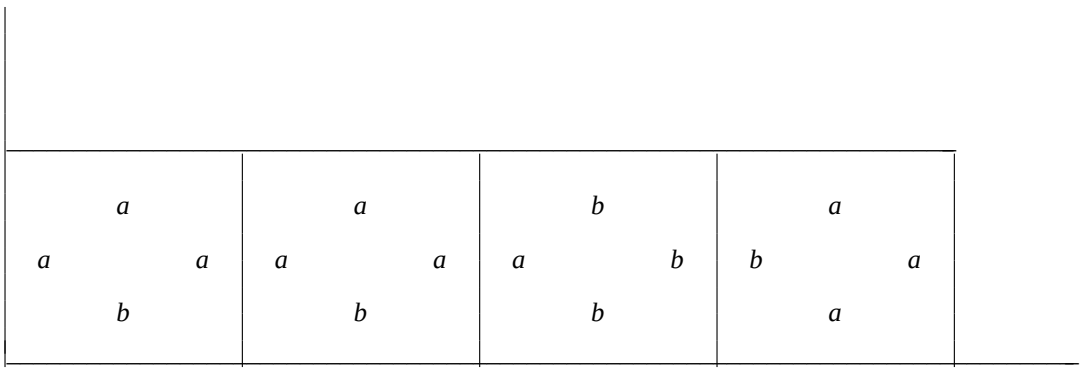
האם ניתן להשלים את הריצוף ההתחלתי לריצוף של רבע המישור (כלומר, "להמשיך את השורה" ימינה וכלפי מעלה) בעזרת מרצפות השייכות לקבוצה הסופית של טיפוסי המרצפות?

<u>דוגמא 11.1:</u>

- קבוצת הצבעים היא: $C = \{a,b,c\}$.
- קבוצת המרצפות T, מכילה את המרצפות:



- הריצוף ההתחלתי נראה כך:



ויש להמשיך את הריצוף ימינה ולמעלה.

במקרה הנתון אין אפשרות להשלים את הריצוף, משום שלא ניתן לשים שתי מרצפות סמוכות בעלות צבע תחתון a.

<u>הערה:</u> גירסא זו של בעית הריצוף שונה מן הגירסא שהוצגה בקורס באלגוריתמים בתורת הגרפים, בכך שכאן נתון ריצוף שיש להשלימו.

נראה כי בעית הריצוף הנ"ל אינה ניתנת להכרעה.

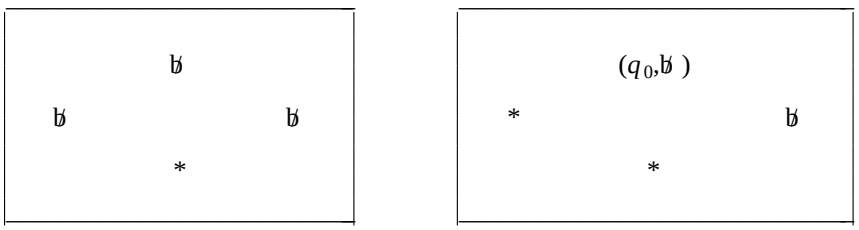
<u>משפט 11.1:</u> בעית הריצוף אינה ניתנת להכרעה.

<u>הוכחה:</u> ההוכחה נעשיית ע"י רדוקציה (ע"י העתקה) מבעית הזיהוי של קידודי מכונות המקבלות את הקלט הריק. זכור כי על סמך משפט רייס, השפה $L_\lambda \triangleq \{<M> : \lambda \in L(M)\}$ אינה ב-**R** (כלומר, בעית הזיהוי שהוזכרה אינה ניתנת להכרעה).

פרטי הרדוקציה מעט מיגעים, אך הרעיון שלה פשוט. בהנתן קלט $<M>$ (קידוד של מכונה), נעתיק ("נתרגם") אותו לקבוצה של מרצפות באופן שכל ריצוף חוקי של שורת משבצות תתאים לזוג קונפיגורציות עוקבות של המכונה M. למשפחת המרצפות תהיה התכונה הבאה ביחס לריצוף רבע המישור: אם נתבונן בשורת המשבצות ה i-ית בריצוף, המחרוזת המתאימה לאותיות שעל הדופן התחתונה של המשבצות בשורה, תתאים לקונפיגורציה ה $(i-1)$-ית (של M על הקלט הריק) ואילו המחרוזת המתאימה לאותיות שעל הדופן העליונה של המשבצות בשורה, תתאים לקונפיגורציה ה i-ית. מכיוון שכל קונפיגורציה היא סופית, וכל שורת משבצות בריצוף רבע המישור הינה אינסופית, נייצג כל קונפיגורציה ע"י תוספת של אינסוף $\not b$-ים בסופה. הריצוף ההתחלתי יקודד את הקונפיגורציה ההתחלתית של M על הקלט הריק. מכיוון שהריצוף ההתחלתי בבעית הריצוף הינו סופי והקונפיגורציה ההתחלתית (בייצוג שאנו משתמשים בו) הינה אינסופית, הריצוף ההתחלתי יכיל משבצת יחידה ונדאג לכך שהאפשרות היחידה להשלמת השורה הראשונה תהיה בעזרת שרשור $\not b$-ים בלבד. לפיכך, ריצוף של רבע המישור (האינסופי) יתאים לחישוב של M, אשר אינו עוצר על הקלט הריק.

לאחר שניסינו להסביר באופן אינטואיטיבי את דרך פעולת הרדוקציה, נפנה לפרטיה הספציפיים. תחילה נתאר את הקלט לבעית הריצוף, המתאים לקלט $<M>$ ורק לאחר מכן נראה שניתן לחשב קלט זה מתוך הקידוד $<M>$.

שתי המרצפות הראשונות שנציג הינן:

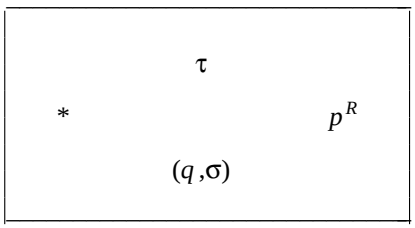


כאשר q_0 הוא המצב ההתחלתי של M, ואילו $\not b$ הוא תו הרווח. המרצפת הימנית תשמש גם כריצוף ההתחלתי (שכיל כאמור משבצת אחת בלבד). המשבצת השמאלית הינה היחידה שדופנה השמאלי צבוע בצבע $\not b$, ולכן רק בעזרתה ניתן יהיה להמשיך את הריצוף ההתחלתי ימינה.

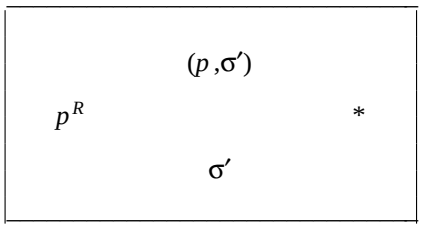
נניח ללא הגבלת הכלליות (נצדיק הנחה זו מאוחר יותר) כי המכונה M (הניתנת כקלט למכונת הרדוקציה) אינה נופלת משמאל לסרט. נבנה את אוסף המרצפות T_M, שבונה מכונת הרדוקציה על הקלט $<M>$, המכיל בנוסף למשבצת שלעי"ל את המרצפות הבאות (התלויות במכונה M).

עבור כל חוק של המכונה M מהצורה $\delta(q,\sigma) = (p,\tau,R)$ מכונת הרדוקציה תייצר את המרצפות:

1. הפעלת החוק שלעי"ל על הקונפיגורציה הקודמת:

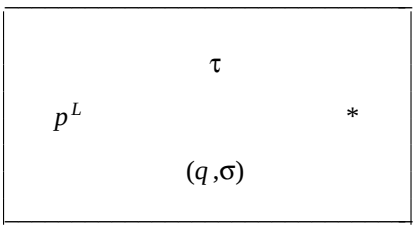


2. העברת הראש הקורא ימינה בקונפיגורציה, עבור כל $\sigma' \in \Gamma$:

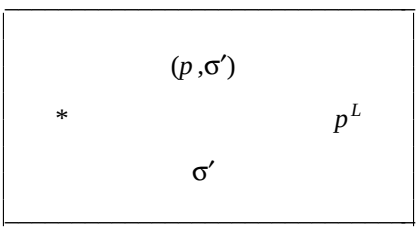


באופן דומה, עבור כל חוק של המכונה M מהצורה $\delta(q,\sigma) = (p,\tau,L)$ מכונת הרדוקציה תייצר את המרצפות:

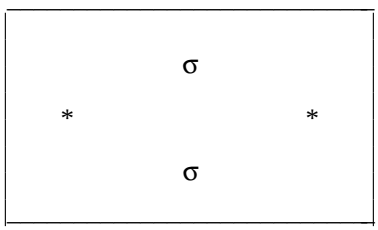
1. הפעלת החוק שלעי"ל על הקונפיגורציה הקודמת:



2. העברת הראש הקורא שמאלה בקונפיגורציה, עבור כל $\sigma' \in \Gamma$:



כמובן עבור כל $\sigma \in \Gamma$ מכונת הרדוקציה תייצר את המרצפת:



סוג זה מאפשר (מאלץ) העתקה של קונפיגורציות באותם הקטעים בהם לא התבצע שינוי תוכן התא ע"י הראש.

כאן מסתיים התאור של אוסף המרצפות (T_M) שמכונת הרדוקציה בונה על קלט $<M>$. ודא כי הינך מבין מהו האוסף וכי ניתן לבנות מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה $f(<M>)=T_M$.

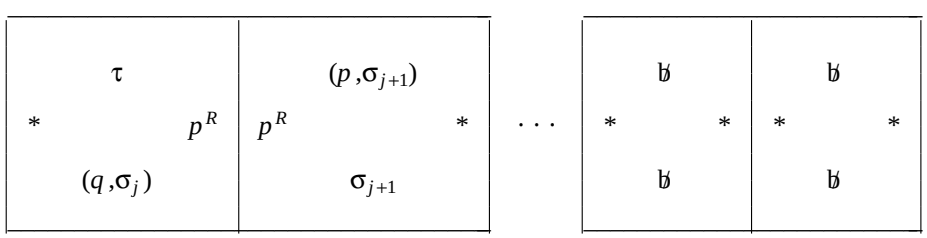
כעת, נותר להוכיח כי M עוצרת על הקלט הריק (כלומר, $<M>\in L_\lambda$) אם $f(<M>)$ אינו ניתן להשלמה לריצוף של רבע המישור. אנו נוכיח את הטענה השקולה לוגית:

<u>טענה 11.1:</u> תהי M מכונה אשר אינה נופלת שמאלה מהסרט. M אינה עוצרת על הקלט הריק אם ורק אם $f(<M>)$ ניתנת להשלמה לרבע המישור.

<u>כיוון I:</u> נניח תחילה כי M אינה עוצרת על הקלט הריק. לכן, קיימת סדרה אינסופית של קונפיגורציות $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ כך ש- $\alpha_i \overset{M}{\vdash\!\!-\!\!-} \alpha_{i+1}$ ו-α_0 היא הקונפיגורציה ההתחלתית. נבנה ריצוף של רבע המישור (בעזרת מרצפות מתוך $f(<M>)$, תוך כדי הסתמכות על קונפיגורציות אלו. השורה ה-i-ית בריצוף תסתמך על הקונפיגורציות α_{i-1} ו-α_i. מהגדרת היחס $\overset{M}{\vdash\!\!-\!\!-}$, ברור כי מתקיים אחד משני המקרים הבאים:

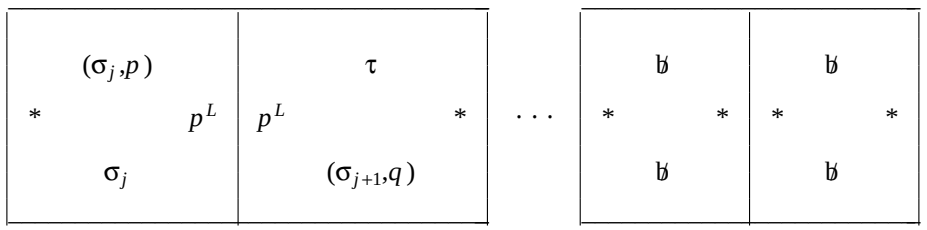
מקרה 1: המעבר בין הקונפיגורציות נעשה ע"י חוק מהצורה: $\delta(q,\sigma_j)=(p,\tau,R)$. המעבר יעשה מהקונפיגורציה $\alpha_{i-1}=\sigma_1\cdots\overset{q}{\sigma_j}\sigma_{j+1}\beta$ (שים לב, יתכן כי σ_{j+1} הינו $\not b$ אשר אינו חלק מהקונפיגורציה α_{i-1}) לקונפיגורציה $\alpha_i=\sigma_1\cdots\tau\overset{p}{\sigma_{j+1}}\beta$, כאשר $\beta\in\Gamma^*$.

במקרה זה ריצוף השורה ה-i-ית יראה כך:



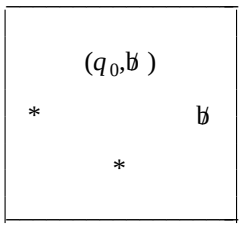
מקרה 2: המעבר בין הקונפיגורציות נעשה ע"י חוק מהצורה: $\delta(q,\sigma_j)=(p,\tau,L)$. המעבר יעשה מהקונפיגורציה $\alpha_{i-1}=\sigma_1\cdots\sigma_j\overset{q}{\sigma}_{j+1}\beta$ לקונפיגורציה $\alpha_i=\sigma_1\cdots\overset{p}{\sigma}_j\tau\beta$, כאשר $\beta\in\Gamma^*$.

במקרה זה ריצוף השורה ה i-ית יראה:



שים לב כי כל שורה מהווה ריצוף חוקי וכי השורות הסמוכות מתלכדות זו עם זו (משום שהקצוות העליונים של השורה ה i-ית מתאימים לקונפיגורציה ה i-ית המתאימה לקצוות התחתונים של השורה ה $(i+1)$-ית). כמו כן, שים לב לכך שריצוף זה מרחיב את הריצוף ההתחלתי ומכסה את רבע המישור.

<u>ביוון II</u>: נניח כעת כי קיים ריצוף של רבע המישור (בעזרת מרצפות מתוך $(f(<M>)$, המרחיב את הריצוף ההתחלתי. נשתמש בריצוף זה על מנת להציג חישוב אינסופי של המכונה M על הקלט הריק. אנו יודעים כי הפינה השמאלית התחתונה של הריצוף האינסופי הנתון הינה המרצפת היחידה בריצוף ההתחלתי:



מרצפת זו ניתן להשלים לריצוף מימין אך ורק ע"י המרצפת הצבועה בצבע # מימין ומשמאל. לאחר ריצוף השורה הראשונה, קיבלנו על הקצוות העליונים שלה, את הקונפיגורציה ההתחלתית (הריקה). כאן המקום לטעון טענה כללית:

<u>טענה 11.2</u>: אם הקצוות התחתונים של שורה מתאימים לקונפיגורציה α של המכונה M, אז קצוותיה העליונים של שורה זו, מתאימים בהכרח לקונפיגורציה β כך שמתקיים $\alpha\overset{M}{\vdash}\beta$.

הוכחת טענה זו מיידית ממבנה $f(<M>)$, מכיוון ש-$f(<M>)$ נבנה בהתאם לחוקי המכונה M. המקרה היחידי, בכל שורה, בו צבע הדופן העליונה שונה מצבע הדופן התחתונה הוא במשבצת בה צבע הדופן התחתונה הינו (q,σ) ואז

צבע הדופן העליונה הינו τ (בהתאם לחוקי המכונה) וכן במשבצת הסמוכה לה (מימין או משמאל לפי תזוזת הראש בחוק $\delta(q,\sigma)$) אשר אם צבע הדופן התחתונה הינו σ', צבע הדופן העליונה יהיה (p,σ') המתאים לתזוזת הראש. פרט למקרים אלו, בשאר המשבצות בשורה צבע הדופן העליונה יהיה זהה לצבע הדופן התחתונה (ע"י צביעת הדפנות הצידיות בצבע '*', אילצנו את השלמת השורה ע"י משבצות שצבע הדופן העליונה זהה לצבע הדופן התחתונה) ובכך אילצנו כי השינוי בתוכן הקצוות התחתונים והעליונים יהיה לוקלי למקום הראש (כמובן בהתאם לחוקי המכונה). שים לב כי אנו משתמשים בהנחה כי ראש המכונה אינו נופל לעולם משמאל לסרט כדי להניח כי בכל שורה בריצוף ישנה משבצת אשר הדופן העליונה בה צבועה בצבע (p,σ'). □

בנקודה זו הושלמה הוכחת תקפות הרדוקציה, אולם נותר לנו עוד חוב קטן. בהוכחת משפט 11.1 התחייבנו לבנות רדוקציה מבעית הזיהוי של קידודי מכונות העוצרות על המילה הריקה, אך למעשה צמצמנו את הדיון למכונות שאינן נופלות במהלך חישובן משמאל לקלט. יש לוודא כי צמצום המכונות למכונות העומדות בתנאי זה, אינו הופך את בעית ההכרעה לקלה יותר (כלומר לבעיה הניתנת להכרעה). הסיבה לכך שבעיה זו אינה קלה יותר מקודמתה היא שבהנתן מכונה כלשהי, קל לתרגם אותה למכונה שקולה המקיימת תנאי זה. (כלומר שקיימת רדוקציה מהבעיה הכללית, לבעיה הדנה במכונות העומדות בדרישה זו).

<u>טענה 11.3:</u> קיימת העתקה T אשר ניתנת לחישוב כך שעבור כל קידוד של מכונת טיורינג $<M>$, מתקיים כי $T(<M>)$ הינו קידוד של מכונת טיורינג השקולה ל M, אשר אינה נופלת שמאלה מהסרט.

<u>הוכחה:</u> למעשה, את הפתרון לבעית הנפילה מהסרט, פתרנו כבר בתרגיל 2.1. שים לב כי המעבר ממכונה כלשהי למכונה העומדת בדרישה, נעשה ע"י הוספת סט אחיד של חוקים, וקל לראות כי קיימת מכונת טיורינג המחשבת את ההעתקה T. □

<u>טענה 11.4:</u> הרכבת ההעתקות T (מטענה 11.3) ו- f (מהוכחת משפט 11.1), יוצרת העתקה f' המהווה רדוקציה של L_λ לבעיית הריצוף.

הוכחת טענה זו פשוטה ומיידית מהגדרת מושג הרדוקציה.

11.2 בעית ההתאמה של פוסט (PCP)

בעיה נוספת שאינה ניתנת להכרעה היא בעית ההתאמה של פוסט (PCP) שתוגדר להלן.

<u>הגדרה 11.2:</u> בעית ההתאמה של פוסט - Post's Correspondence Problem (PCP).

קלט: שתי רשימות של מחרוזות, $A = w_1, \ldots, w_k$ ו- $B = x_1, \ldots, x_k$.

שאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים, $i_1, \ldots, i_m$, כך ש- $m \geq 1$ ומתקיים:

$$w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} ?$$

כלומר, שרשור המחרוזות ברשימה A על פי סדרת האינדקסים הנ"ל ושרשור המחרוזות ברשימה B על פי אותה סדרת אינדקסים, נותנים בדיוק את אותה מחרוזת.

דוגמא 11.2: תהיינה $A = w_1, w_2, w_3$ ו- $B = x_1, x_2, x_3$ הרשימות הבאות:

$$w_1 = 1011010 \qquad w_2 = 1 \qquad w_3 = 01$$
$$x_1 = 10 \qquad x_2 = 1010 \qquad x_3 = 110$$

במקרה זה קיימת סדרת אינדקסים מתאימה שהיא (משמאל לימין) [1 3 1 2].

נראה כי הבעיה, *PCP*, אינה ניתנת להכרעה, בעזרת רדוקציה (ע"י העתקה) מגרסא קצת שונה של הבעיה (הנקראת *MPCP*) אל הבעיה *PCP*. על מנת להשלים את ההוכחה, נראה בשלב שני כי הבעיה *MPCP* אינה ניתנת להכרעה ומכך ינבע כמובן כי גם הבעיה *PCP* אינה ניתנת להכרעה.

הגדרה 11.3: גרסא שונה של בעית ההתאמה של פוסט - Modified Post's Correspondence Problem (*MPCP*).

קלט: שתי רשימות של מחרוזות, $A = w_1, \ldots, w_k$ ו- $B = x_1, \ldots, x_k$.

שאלה: האם קיימת סדרת אינדקסים, $i_1, \ldots, i_m$, כך ש-

$$w_1 w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r} = x_1 x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} ?$$

ההבדל בין הבעיות *PCP* ו-*MPCP* הוא בכך שבבעיה *MPCP* הפתרון חייב להתחיל במחרוזת הראשונה מכל רשימה, בעוד שבבעיה *PCP* אין הגבלה כזאת.

טענה 11.5: אם הבעיה *PCP* ניתנת להכרעה, אז גם הבעיה *MPCP* ניתנת להכרעה.

הוכחה: נבנה את פונקצית הרדוקציה, h, מהבעיה *MPCP* לבעיה *PCP*. תהיינה רשימות המחרוזות, $A = w_1, \ldots, w_k$ ו- $B = x_1, \ldots, x_k$ (מעל הא"ב Σ) קלט לבעית *MPCP*, ותהיינה # ו-% שתי אותיות אשר אינן שייכות לא"ב Σ. הפונקציה h מוגדרת: $h(A,B) = (C,D)$ כך ש- $C = y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$ ו- $D = z_0, z_1, \ldots, z_{k+1}$. לכל $1 \leq i \leq k$, המחרוזת y_i נבנית מאותיות w_i כאשר לאחר כל אות ב-w_i מוכנסת האות #, והמחרוזת z_i נבנית מאותיות x_i כאשר לפני כל אות ב-x_i מוכנסת האות #. כמו כן,

$$y_0 = \#y_1 \qquad y_{k+1} = \%$$

$$z_0 = z_1 \qquad z_{k+1} = \#\%$$

<u>דוגמא 11.3:</u> תהיינה $A = w_1, w_2, w_3$ ו-$B = x_1, x_2, x_3$ הרשימות הבאות המתאימות לבעיה *MPCP*:

$$w_1 = 10 \qquad w_2 = 011 \qquad w_3 = 010$$
$$x_1 = 1001 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 001$$

נבנה את הרשימות $C = y_0 \cdots y_4$ ו-$D = z_0 \cdots z_4$ המתאימות לבעיה *PCP*:

$$y_0 = \#1\#0\# \qquad y_1 = 1\#0\# \qquad y_2 = 0\#1\#1\# \qquad y_3 = 0\#1\#0\# \qquad y_4 = \%$$
$$y_0 = \#1\#0\#0\#1 \qquad z_1 = \#1\#0\#0\#1 \qquad z_2 = \#1 \qquad z_3 = \#0\#0\#1 \qquad z_4 = \#\%$$

נראה כעת כי $(A,B) \in MPCP$ אסם $h(A,B) \in PCP$.

<u>כיוון I:</u> נניח כי קיימת סדרת אינדקסים כנדרש, כך ש- $1, i_1, i_2, \ldots, i_r$ מהווה פתרון לבעית *MPCP* עבור הרשימות A ו-B. קל לודא כי הסדרה $0, i_1, i_2, \ldots, i_r, k+1$ מהווה פתרון לבעית *PCP* עבור הרשימות C ו-D.

<u>כיוון II:</u> נניח כי קיימת סדרת אינדקסים כנדרש, כך ש- $i_1, i_2, \ldots, i_r$ מהווה פתרון לבעית *PCP* עבור הרשימות C ו-D. ברור כי $i_1 = 0$ מכיוון שאלו הן שתי המחרוזות המתאימות היחידות, מהרשימות C ו-D, המתחילות באותה אות (#). כמו כן, $i_r = k+1$ מכיוון שאלו הן שתי המחרוזות המתאימות היחידות, מהרשימות C ו-D, המסתימות באותה אות (%). יהי j האינדקס הקטן היותר המקיים $i_j = k+1$. הסדרה $i_1, \ldots, i_j$ מהווה גם כן פתרון לבעית *PCP* עבור הרשימות C ו-D, מכיוון שהאות % מופיעה רק כאות <u>האחרונה</u> במחרוזות y_{k+1} ו-z_{k+1}. כעת, קל לודא כי $1, i_2, i_3, \ldots, i_{j-1}$ מהווה פתרון לבעית *MPCP* עבור הרשימות A ו-B. □

כעת, על מנת להוכיח כי הבעיה *PCP* אינה ניתנת להכרעה, מספיק להוכיח כי הבעיה *MPCP* אינה ניתנת להכרעה.

<u>טענה 11.6:</u> הבעיה *MPCP* אינה ניתנת להכרעה.

<u>הוכחה:</u> ראינו כבר (בתרגיל 9.1) כי השפה L_U אינה ניתנת להכרעה. כעת (לפי תרגיל 10.5) מספיק להראות רדוקציה מהשפה L_U ל-*MPCP* בכדי להוכיח כי *MPCP* אינה ניתנת להכרעה. פונקצית הרדוקציה, h, תמפה כל קלט (קידוד של מכונה $<M>$ וקלט w) לבעית הכרעת השפה L_U לקלט "שקול" לו בבעיה *MPCP*, כך ש-M עוצרת על w אסם לקלט השקול קיים פתרון (לבעית *MPCP*). המיפוי יעשה בצורה כזו, שאם יהיה פתרון לבעית ה-*MPCP* הנתונה, הוא יהיה מהצורה $\#\gamma_0\#\gamma_1\# \cdots \#\gamma_k\#$ כך ש-γ_0 היא הקונפיגורציה ההתחלתית של המכונה M על הקלט w ולכל $0 < i \leq k$ מתקיים ש-γ_i היא קונפיגורציה עוקבת לקונפיגורציה γ_{i-1} בחישוב של המכונה M על הקלט w, וכן

γ_k היא קונפיגורציה מקבלת.

את פרטי הרדוקציה ניתן למצוא בספר של [Ullman & Hopcroft] (ראה מבוא) בעמודים 196-198.

מטענות 11.5 ו-11.6 נובעת (מיידית) הטענה הבאה:

<u>טענה 11.7:</u> הבעיה PCP אינה ניתנת להכרעה.

<u>תרגיל 11.1:</u> הראה כי קל להכריע את בעית ההתאמה של פוסט, כאשר הקלט מצומצם למקרה שלכל i מתקיים $|x_i| \geq |y_i|$.

<u>תרגיל 11.2:</u> הוכח כי קיימת משפחת קלטים לבעית ה-PCP, כך שאורך הקלט ה-n-י הינו לכל היותר $n+c$ (כאשר c הינו קבוע) ולקלט ה-n-י יש פתרון (כלומר, סדרת אינדקסים הפותרת את הבעיה) קצר ביותר שארכו 2^{2^n} לפחות (רמז: העזר ברדוקציה שבטענה 11.6 ובעובדה שקיימת מכונת טיורינג אשר זמן הריצה שלה על קלטים באורך n הינו 2^{2^n} לפחות).

<u>תרגיל למתקדמים:</u> חזור על תרגיל 11.2, כאשר הפונקציה $f(n)=2^{2^n}$ מוחלפת בפונקציה רקורסיבית שלמה כלשהי.