# 16. NP-שלמות של בעיות קומבינטוריות

בפרק זה נראה שורה של בעיות **NP**-שלמות הנוגעות לתורת הגרפים. בעיות אלו הינן ניסוח מופשט של בעיות "מעשיות", ולהיותן **NP**-שלמות היתה (ויש עדיין) השפעה חיובית על התאוריה, הפרקטיקה ועל הקשר בינהן. בעיות אלו נחשבו כקשות לפתרון ע"י אנשי המעשה עוד בשנות ה-50, אך בהעדר הסבר מספק לקושי זה, גרמו הכשלונות בחיפוש אחר אלגוריתמים יעילים למפח נפש. כאשר התברר כי בעיות אלו הינן **NP**-שלמות, ניתן הסבר לקושי במציאת אלגוריתמים יעילים לפתרונן. אנשי המעשה הבינו שלא קוצר ידם הוא שמנע מציאת אלגוריתמים יעילים לבעיות הנ"ל, אלא סיבות מהותיות יותר. בעקבות זאת פנו אנשי המעשה לגישות מועילות יותר (ראה פרק 17). מצד שני, כל הנסיון המעשי הנ"ל (כלומר, הנסיון למציאת אלגוריתמים יעילים) שימש עדות מסייעת להנחה כי $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. לפנינו אם כן, דוגמא אופיינית להפריה הדדית של התיאוריה והמעש: תופעה שמתגלה "בעולם הממשי" זוכה להסבר תיאורטי, ומצד שני, התיאוריה זוכה לחיזוק נסיוני.

### 16.1 בעית כיסוי גרף ע"י צמתים ($VC$)

נתונה רשת כבישים, רוצים לפזר תחנות משטרה בצמתי הרשת, כך שכל כביש "יכוסה" ע"י תחנה אחת לפחות. מהו מספר המינימום הנחוץ של תחנות משטרה? את הבעיה ניתן לנסח כבעית הכרעה אלגוריתמית על גרפים כדלקמן:

<u>הגדרה 16.1:</u> בעית כיסוי בצמתים - Vertex Cover ($VC$).

<u>קלט:</u> גרף בלתי מכוון, $G = (V,E)$ ושלם $K$.

<u>שאלה:</u> האם קיימת קבוצה של $K$ צמתים לכל היותר, המכסה את קשתות $G$? באופן פורמלי, האם קיימת קבוצה $U$, חלקית ל-$V$, כך ש- $|U| \leq K$ ולכל קשת, $e=(u,v) \in E$, מתקיים $u \in U$ או $v \in U$?

<u>הערה:</u> אין זה משנה אם $K$ נתון ביצוג אונרי או ביצוג בינארי (מדוע?).

שים לב, שלו היה אלגוריתם פולינומיאלי לפתרון בעית המינימיזציה שהוגדרה לעי"ל באופן לא פורמלי, אז היה נובע גם $VC \in \mathbf{P}$. נראה כעת כי השפה $VC$ הינה **NP**-שלמה.

<u>משפט 16.1:</u> השפה $VC$, הינה **NP**-שלמה.

<u>הוכחה:</u> על מנת להראות כי $VC \in \mathbf{NP}$, נראה יחס דו-מקומי, שיסומן $R_{VC}$, המאפיין את $VC$. היחס יכיל זוגות, $(U,(G,K))$, כך ש-$U$ היא קבוצה של $K$ צמתים לכל היותר מתוך $G$, אשר מכסה את כל הקשתות של $G$. במילים אחרות, העדות להיות $(G,K) \in VC$, הינה הכיסוי עצמו.

על מנת להראות כי $VC$ הינה **NP**-קשה (כלומר, כל בעיה ב-**NP** ניתנת לרדוקציה ל-$VC$) נראה רדוקציה מהשפה

$3SAT$ אל $VC$ (הזכר בדיון מסעיף 15.3). להלן תאור הרדוקציה. עבור קלט, נוסחא $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$, כאשר כל פסוקית $C_i$, מכילה לכל היותר שלושה ליטראלים, בנה את הגרף הבא. לכל משתנה $x_i$, המופיע בנוסחא $\phi$, הצג שני צמתים $x_i$ ו-$\overline{x_i}$ וקשת בינהם. עבור פסוקית, $C_j = l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3}$, הצג שלושה צמתים, שיסומנו $[j,1],[j,2],[j,3]$, כאשר כל שנים מהם מחוברים ע"י קשת וכן קשתות בין הצמתים הללו וצמתי הליטראלים המתאימים להם. ראה ציור 16.1.

ציור 16.1: הצמתים שהותאמו למשתנים $x_i,x_j,x_k$ ולפסוקית $C_t = x_i \vee \overline{x_j} \vee x_k$

באופן פורמלי, תהא $\phi = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$ נוסחת קלט בעלת המשתנים $x_1, \ldots, x_n$, כאשר $C_j = \bigvee_{i=1}^{3} l_{j,i}$. נבנה את הגרף $G(V,E)$ הבא:

$$V = \{x_i, \overline{x_i} : 1 \le i \le n\} \bigcup \{[j,i] : 1 \le j \le m \ \& \ 1 \le i \le 3\}$$

$$E = \{(x_i, \overline{x_i}) : 1 \le i \le n\} \bigcup \{([j,i],l_{j,i}) : 1 \le j \le m \wedge 1 \le i \le 3\} \bigcup \{([j,i],[j,i']) : 1 \le j \le m \wedge 1 \le i,i' \le 3 \wedge i \ne i'\}$$

ונקבע את השלם, $K = n + 2m$.

ודא כי הנך מבין את הבניה. נסמן את המיפוי המוגדר ע"י הבניה ב-$f$. כלומר, $f(\phi)$ הוא הזוג (גרף,מספר) המתאים.

<u>טענת הפולינומיאליות:</u> קיימת מכונת טיורינג פולינומיאלית המחשבת את $f$ (ודא!).

<u>טענת התקפות:</u> $\phi \in 3SAT$ אם ורק אם $(G,K) = f(\phi) \in VC$.

<u>כיוון I:</u> נניח תחילה כי $\phi \in 3SAT$ ותהי $\tau$, הצבת אמת המספקת את $\phi$. הכיסוי של $G$ יורכב מ-$n$ צמתי הליטראלים המקבלים ערך אמת T תחת ההצבה $\tau$ ומשני צמתים של כל משולש המתאים לפסוקית. הצומת השלישי של הפסוקית, אשר מתאים לליטראל שסופק ע"י ההצבה, לא יהיה בכיסוי. פורמלית, הכיסוי $U$ יבנה כדלקמן:

$$U = \{x_i : \tau(x_i)=\mathrm{T}\} \cup \{\overline{x_i} : \tau(x_i)=\mathrm{F}\} \cup (\bigcup_{j=1}^{m} \{[j,i] : i \neq j_T\})$$

כאשר $j_T$, הינו האינדקס של אחד הליטראלים של $C_j$, אשר ערך האמת שלו תחת ההצבה $\tau$, הינו T. שים לב כי מכיוון שההצבה $\tau$ מספקת את $\phi$, הרי שלכל פסוקית $C_j$, קיים (לפחות) ליטראל אחד כזה. שים לב כי כל הקשתות של $G$ מכוסות ע"י $U$: הקשתות $(x_i,\overline{x_i})$, מכוסות ע"י אחד הליטראלים אשר מצוי ב-$U$, קשתות כל אחד מהמשולשים מכוסות ע"י (שני) צמתי המשולש המצויים ב-$U$ ואילו הקשתות המחברות צמתי משולש עם צמתי ליטראל, מכוסות ע"י אחד הצמתים אשר מצוי ב-$U$ (שים לב כי אם $[j,i]$ אינו מצוי ב-$U$, בהכרח $l_{j,i}$ מצוי ב-$U$). אנו מסיקים כי $U$ מהווה אמנם כיסוי של $G$. לסיום כיוון זה, שים לב כי $|U| = n+2m = K$.

<u>כיוון II:</u> נניח כעת כי $(G,K) \in VC$. כלומר, קיים ל-$G$ כיסוי ע"י $n+2m$ צמתים. עלינו להראות כי הנוסחא המקורית, $\phi$, ניתנת לסיפוק. יהי $U$ כיסוי של $G$ ע"י $n+2m$ צמתים. בהכרח, $U$ מכיל לפחות $n$ צמתי ליטראלים (אחרת, אחת הקשתות $(x_i,\overline{x_i})$ אינה מכוסה) ולפחות $2m$ צמתי משולש (אחרת, אחד המשולשים אינו מכוסה, כי לא ניתן לכסות קשתות משולש ע"י פחות משנים מצמתיו). נובע כי $U$ מכיל בדיוק $n$ צמתי ליטראל ובדיוק שני צמתים מכל משולש. יתר על כן, לכל $i$, הכיסוי $U$ מכיל בדיוק את אחד הצמתים $x_i, \overline{x_i}$. נבנה את הצבת האמת המתאימה לכיסוי: $\tau(x_i)=\mathrm{T}$ אמם $x_i \in U$. כעת נטען כי לכל $1 \leq j \leq m$, ההצבה $\tau$ שנבנתה, מספקת את הפסוקית $C_j$. נתבונן במשולש המתאים לפסוקית $c_j$. אחד מצמתי המשולש, נאמר $[j,i]$, אינו מופיע בכיסוי. נובע בהכרח כי הקשת $([j,i],l_{j,i})$ מכוסה ע"י $l_{j,i}$ ולכן לפי הבניה של $\tau$ נובע כי $\tau(l_{j,i})=\mathrm{T}$. □

ישנן שתי בעיות בתורת הגרפים הקשורות באופן הדוק לבעית כיסוי בצמתים. הבעיה הראשונה, היא מציאת קבוצה גדולה ביותר של צמתים שאין קשתות בינהם. קבוצה כזאת נקראת קבוצה בלתי תלויה.

<u>הגדרה 16.2:</u> בעית קבוצה בלתי תלויה מקסימום - Maximum Independent Set ($IS$).

<u>קלט:</u> גרף $G(V,E)$ ומספר שלם $K$.

<u>שאלה:</u> האם קיימת קבוצת צמתים $U \subseteq V$, כך ש- $|U| \geq K$ ולכל $u,v \in U$ מתקיים $(u,v) \notin E$?

האבחנה הבסיסית. היא כי $U$ הינה כיסוי בצמתים של הגרף $G$ אם ורק אם $V \setminus U$ הינה קבוצה בלתי תלויה ב-$G$.

<u>למה 16.1:</u> יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון ותהא $U$ תת-קבוצה של $V$. מתקיים, $U$ היא קבוצה בלתי תלויה ב-$G$ אם ורק אם $V \setminus U$ היא כיסוי בצמתים של $G$.

<u>כיוון I:</u> ראשית, שים לב כי אם $U$ הינה קבוצה בלתי תלויה, אז לא קיימת אף קשת בגרף אשר $U$ מכסה אותה משני צדדיה (כלומר, לא קיימת קשת $(u,v) \in E$, כך ש- $u \in U$ וגם $v \in U$). מכיוון ש-$V$ מכסה את קשתות הגרף משני צדדיהן, נובע כי גם $V \setminus U$ מכסה את קשתות הגרף (הכוונה היא לכיסוי מצד אחד לפחות) כלומר, $V \setminus U$ הינו

כיסוי בצמתים של $G$.

כיוון II: שים לב כי אם $V \setminus U$ הינו כיסוי בצמתים של הגרף $G$, אז אין קשת $(u,v) \in E$ כך ש- $u \notin V \setminus U$ וגם $v \notin V \setminus U$. נובע מכך כי לכל $u,v \in U$, בהכרח $(u,v) \notin E$. כלומר, $U$ הינה קבוצה בלתי תלויה ב- $G$. □

תרגיל 16.1: הוכח כי השפה $IS$ הינה **NP**-שלמה.

הגדרה 16.3: בעית הקליק - Clique.

קלט: גרף לא מכוון $G = (V,E)$ ושלם $K$.

שאלה: האם קיים בגרף $G$ קליק בגודל $K$ (קליק הוא קבוצת צמתים $U$, כל שלכל $u,v \in U$ מתקיים $(u,v) \in E$)?

תרגיל 16.2: הוכח כי השפה Clique הינה **NP**-שלמה (רמז: הסתכל בגרף המשלים).

תרגיל 16.3:

א. בעית $VC/2$ מוגדרת כמו בעית $VC$ רק ש-$K$ אינו חלק מהקלט אלא מוגדר כ- $K \triangleq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$. הוכח כי $VC/2$ הינה **NP**-שלמה.

ב. חזור על השאלה כאשר $K \triangleq \left\lfloor |V|^{\varepsilon} \right\rfloor$, עבור $0 < \varepsilon < 1$.

ג. ודא כי הרדוקציה הנ"ל אינה פולינומיאליות עבור $K \triangleq \lfloor \log |V| \rfloor$.

## 16.2 כיסוי בצמתים של גרפים חסומי דרגה

לכל $d \geq 1$ ניתן להגדיר את הבעיה הבאה:

הגדרה 16.4: כיסוי בצמתים של גרפים בעלי דרגה $d$ לכל היותר $(VC_d)$.

קלט: גרף $G = (V,E)$ שדרגתו $d$ לכל היותר ושלם $K$.

שאלה: האם ניתן לכסות את $G$ ע"י $K$ צמתים?

משפט 16.2: לכל $d \geq 3$, השפה $VC_d$ הינה **NP**-שלמה.

הוכחה: $VC_d \in \mathbf{NP}$ באופן זהה ל- $VC \in \mathbf{NP}$ (ראה הוכחת משפט 16.1). נראה כעת, כי $VC \propto_p VC_3$. שים לב כי

זה מספיק בגלל תכונת הטרנזיטיביות של הרדוקציה, משום שלכל $d \geq 3$ מתקיים $VC_3 \propto_p VC_d$ (ע"י העתקת הזהות). בציור 16.2 מובאת סקיצה ציורית של הרדוקציה מהשפה $VC$ אל השפה $VC_3$, כפי שהיא פועלת על צומת $v$ מדרגה $t$.

ציור 16.2: הרדוקציה מהשפה $VC$ אל השפה $VC_3$, כפי שהיא פועלת על צומת $v$ מדרגה $t$.

אנו מחליפים צומת $v$ מדרגה $t$ בגרף הנתון, במסלול באורך $2t-1$, כאשר כל אחד מהצמתים האי-זוגיים במסלול, מקושר לאחד הצמתים אליהם היה $v$ קשור. באופן פורמלי, נציג את המיפוי (רדוקציה) $f$, מקלטים לבעיה $VC$ לקלטים לבעיה $VC_3$. יהי $Deg_G(v)$ דרגתו של הצומת $v$ בגרף $G$. נניח ללא הגבלת הכלליות, כי לכל $v \in V$, מתקיים $Deg_G(v) > 0$ (כלומר, אין ב-$G$ צמתים מבודדים). אחרת, המיפוי מתעלם מצמתים מבודדים.
נגדיר,

$$f((V,E),K) = ((V',E'),K')$$

$$V' = \bigcup_{v \in V} (\{v^{(i)} : 1 \leq i \leq Deg_G(v)\} \bigcup \{v^{(i,i+1)} : 1 \leq i < Deg_G(v)\})$$

$$E' = \bigcup_{v \in V} \left[ \{(v^{(i)},v^{(i,i+1)}) : 1 \leq i < Deg_G(v)\} \bigcup \{(v^{(i,i+1)},v^{(i+1)}) : 1 \leq i < Deg_G(v)\} \right] \bigcup_{(u,v) \in E} \{(u^{(i)},v^{(j)})\}$$

כאשר $u$ הוא השכן ה-$j$ של $v$ ואילו $v$ הוא השכן ה-$i$ של $u$. את הקבוע $K'$, נקבע כדלקמן:

$$K' = (\sum_{v \in V} (Deg_G(v)-1)) + K$$

שים לב, כי דרגתו המקסימלית של הגרף $(V',E')$ היא אמנם 3.

<u>טענת הפולינומיאליות:</u> המיפוי $f$, ניתן לחישוב בזמן פולינומיאלי (ודא!).

<u>טענת התקפות:</u> $((V,E),K)\in VC$ אמ"מ $((V',E'),K')\in VC_3$.

<u>כיוון I:</u> נניח תחילה כי $U$ הוא כיסוי של $(V,E)$ בגודל $K$ לכל היותר. נכסה את קשתות $(V',E')$ ע"י הקבוצה $U'$ בדלקמן: לכל $v\in U$, ניקח לתוך $U'$ את הצמתים האי-זוגיים של המבנה שהחליף את $v$ (כלומר, $U'$ מכיל את $\{v^{(i)}:1\le i\le Deg_G(v)\}$) ואילו לכל $v\notin U$, ניקח לתוך $U'$ את הצמתים הזוגיים של המבנה שהחליף את $v$ (כלומר, את הקבוצה $\{v^{(i,i+1)}:1\le i\le Deg_G(v)-1\}$). שים לב כי כל הקשתות ב-$E'$, מכוסות ע"י $U'$ (קשתות המסלולים מכוסות בכל אחד מהמקרים, ואילו הקשתות בין המבנים המחליפים מכוסות "באותו אופן" שכוסו הקשתות המקוריות ע"י $U$. כלומר, הקשת המתאימה לקשת שכוסתה ב-$U$ ע"י צומת $v$, תכוסה ע"י הצומת המחוברת לקשת זו במבנה המתאים ל-$v$ ב-$V'$). לסיום, שים לב כי:

$$|U'| = \sum_{v\in U} Deg_G(v) + \sum_{v\in V\setminus U}(Deg_G(v)-1) = |U| + \sum_{v\in V}(Deg_G(v)-1) \le K + \sum_{v\in v}(Deg_G(v)-1) = K'$$

<u>כיוון II:</u> נניח כעת כי $((V',E'),K')$ הינו ב-$VC_3$. כלומר, קיים כיסוי $U'$, אשר גודלו $K'$ לכל היותר, המכסה את $E'$. לכל $v\in V$, הכיסוי $U'$ משתמש לפחות ב-$Deg_G(v)-1$ צמתים מהמבנה שהחליף את $v$ (משום שדרושים לפחות $t-1$ צמתים על מנת לכסות מסלול באורך $2t-1$ צמתים). נסמן צמתי מבנה זה ב-$V_v'$. כלומר,

$$V_v' \triangleq \{v^{(i)}:1\le i\le Deg_G(v)\}\bigcup\{v^{(i,i+1)}:1\le i<Deg_G(v)\}$$

נגדיר $U\subseteq V$, כך שצומת $v$ נמצא ב-$U$ אמ"מ $|U'\cap V_v'|\ge Deg_G(v)$. מתוך הגדרת $U'$ ו-$K'$, נובע כי $|U|\le K$. נראה כעת, כי לכל $(u,v)\in E$, מתקיים $u\in U$ או $v\in U$. די להראות כי עבור $u$ או $v$, מספר הצמתים ב-$U'$ מתוך המבנה המתאים אינו קטן מהדרגה המתאימה נניח בשלילה כי עבור $u$ מתקיים $|U'\cap V_u'|<Deg_G(u)$. ובאופן דומה עבור $v$. במקרה כזה, כל אחד מהמסלולים המתאימים היה חייב להיות מכוסה ע"י הצמתים הזוגיים (כי על מנת לכסות מסלול באורך $2t-1$ צמתים ע"י $t-1$ צמתים, חייבים להשתמש בצמתים הזוגיים). נובע שהקשת המתאימה ל-$(u,v)$ לא היתה מכוסה ע"י $U'$, בסתירה להנחה ש-$U'$ מהווה כיסוי של $G'=(V',E')$. קיבלנו כי $U$ שבנינו אמנם מכסה את $G=(V,E)$. □

### 16.3 כיסוי ע"י תת-קבוצות $(SC,XC)$

בעית כיסוי גרף ע"י צמתים היא מקרה פרטי של בעיה כללית יותר, בעית כיסוי אברי קבוצה נתונה ע"י תת-קבוצות. מכך ינבע כי בעית כיסוי ע"י תת-קבוצות, הינה **NP**-קשה (עליך להיות מסוגל בשלב זה לודא גרירה זו).

<u>הגדרה 16.5:</u> בעית כיסוי ע"י תת-קבוצות - Set Cover $(SC)$.

<u>קלט:</u> קבוצה $S$, אוסף $C=\{C_i\}_{i=1}^m$ של תת-קבוצות של הקבוצה $S$ ושלם $K$.

שאלה: האם קיים אוסף חלקי $C' \subseteq C$, בגודל $K$ לכל היותר, כך ש-$C'$ מכסה את $S$ (כל איבר ב-$S$ נמצא לפחות באחת מתת-הקבוצות של $C'$)?

משפט 16.3: השפה $SC$ הינה **NP**-שלמה.

הוכחה: כל אוסף חלקי $C' \subseteq C$, בגודל $K$ לכל היותר, המכסה את $S$, מהווה עדות לשייכות של $(S,C,K)$ לשפה $SC$. כתוב את היחס הדו-מקומי המתאים והראה שהוא מתאים להגדרת **NP**. נראה כי $VC \propto_p SC$ (בהתאם לאינטואיציה שנטענה לעי"ל, כי בעית כיסוי בצמתים הינה מקרה פרטי של בעית כיסוי ע"י תת-קבוצות). הרדוקציה תעתיק את הגרף $G=(V,E)$ (מתוך הקלט לבעיה $VC$) אל הזוג $(S,C)$ כך:

$$S \triangleq E$$

$$C \triangleq \left\{ \{(u,v) \in E \ : \ v \in V\} : u \in V \right\}$$

לכל צומת, נתאים את (תת-הקבוצה של $E$ המהווה את) קבוצת הקשתות הנוגעות בו. המספר $K$ בקלט יועתק אל עצמו. ודא כי המיפוי ניתן לביצוע בזמן פולינומיאלי (למעשה, אם הגרף ניתן כרשימת שכנויות, אין כמעט מה לעשות) וכי הינו תקף. □

אפילו עיון שטחי ברדוקציה שהוצגה בהוכחת משפט 16.3, מראה כי גודל תת-הקבוצות באוסף הנוצר, שווה לדרגת הצמתים המתאימים. לפיכך, אם גרף הקלט הינו חסום דרגה, נקבל אוסף של תת-קבוצות בגודל חסום.

הגדרה 16.6: בעית כיסוי ע"י תת קבוצות בגודל $d$ ($SC_d$).

קלט: קבוצה $S$, אוסף $C=\{C_i\}_{i=1}^{m}$ של תת-קבוצות בגודל d לכל היותר, של הקבוצה $S$ ושלם $K$.

שאלה: האם קיים אוסף חלקי $C' \subseteq C$, בגודל $K$ לכל היותר, כך ש-$C'$ מכסה את $S$ (כל איבר ב-$S$ נמצא לפחות באחת מתת-הקבוצות של $C'$)?

תרגיל 16.4: הראה כי לכל $d \geq 3$, השפה $SC_3$ הינה **NP**-שלמה (רמז: להוכחת השלמות, הראה כי לכל $d$ טבעי מתקיים $VC_d \propto_p SC_d$).

בעיה "קרובה" בניסוחה לבעית כיסוי ע"י תת-קבוצות ($SC$) היא הבעיה של כיסוי מדויק. בעוד שבבעית הכיסוי הכללית ניתן לכסות איבר בעזרת מספר תתי-קבוצות, הרי שבבעית הכיסוי המדויק נדרש שכל איבר יכוסה ע"י תת-קבוצה אחת ויחידה. שים לב כי אין ב"קירבת" הניסוח שום עדות לגבי קושי בעית הכיסוי המדויק.

הגדרה 16.7: בעית כיסוי מדויק ע"י תת-קבוצות - Exact Cover ($XC$).

קלט: קבוצה $S$, אוסף $C=\{C_i\}_{i=1}^{m}$ של תת-קבוצות של הקבוצה $S$ ושלם $K$.

שאלה: האם קיים אוסף חלקי $C'\subseteq C$, בגודל $K$ לכל היותר, כך שלכל איבר, $e$, ב-$S$ יש באוסף $C'$ תת-קבוצה אחת ויחידה המכילה את $e$?

נוכל גם להגדיר וריאנט לבעיה $XC$, המתאים לבעיה $SC_d$.

הגדרה 16.8: בעית כיסוי מדויק ע"י תת-קבוצות בגודל $d$ לכל היותר ($XC_d$).

קלט: קבוצה $S$, אוסף $C=\{C_i\}_{i=1}^{m}$ של תת-קבוצות בגודל d לכל היותר, של הקבוצה $S$ ושלם $K$.

שאלה: האם קיים אוסף חלקי $C'\subseteq C$, בגודל $K$ לכל היותר, כך שלכל איבר, $e$, ב-$S$ יש באוסף $C'$ תת-קבוצה אחת ויחידה המכילה את $e$?

משפט 16.4: השפה $XC$, וכן השפות $XC_d$ לכל $d\geq 3$, הינן **NP**-שלמות.

הוכחה: קל להראות כי $XC$ וכן כל אחת מהשפות $XC_d$ (לכל $d\geq 1$) הינן ב-**NP** (באותה דרך בה הראינו זאת לגבי $SC$ ו-$SC_d$). טענת ה **NP**-קושי תנבע מכך שנראה כי $XC_3$ הינה **NP**-קשה (מכיוון ש- $XC_3\propto_p XC$ וכן $XC_3\propto_p XC_d$ לכל $d\geq 3$). אנו נראה כי $SC_3\propto_p XC_3$ (הוכחה דומה תקפה גם לכל $d$ קבוע לגבי $SC_d\propto_p XC_d$). הבניה הינה פשוטה בתכלית. בהנתן קלט $(S,C,K)$ לבעית $SC_3$, נבנה את הקלט $(S,D,K)$ לבעיה $XC_3$, כך ש-$D$ יהיה אוסף כל תת-הקבוצות של תת-הקבוצות ($C_j$-ים) באוסף $C$. כלומר,

$$D=\bigcup_{B\in C}\{A:A\subseteq B\}$$

טענת הפולינומיאליות: קיימת מכונת טיורינג פולינומיאלית, המחשבת את המיפוי $(S,C,K)\rightarrow(S,D,K)$.

הוכחה: שים לב כי העובדה שתת-הקבוצות באוסף $C$ הן מגודל 3 (שהוא קבוע) משחקת כאן תפקיד מרכזי. הבניה אמנם אקספוננציאלית בגודל תת-הקבוצות, אך מכיוון שגודל זה הינו כאמור קבוע (שאינו תלוי בקלט) גם גורם זה הינו קבוע.

טענת התקפות: $(S,C,K)\in SC_3$ אם ורק אם $(S,D,K)\in XC_3$.

ביוון I: בהנתן כיסוי של $S$ ע"י אוסף תת-קבוצות $C'\subseteq C$, בגודל $K$ לכל היותר, נתאים (במעבר סדרתי על כל הקבוצות ב-$C'$) לכל קבוצה $A$ מתוך $C'$ קבוצה מ-$D$ המוכלת ב-$A$ ושאינה מכילה אף איבר שכוסה כבר ע"י קבוצה קודמת. אוסף קבוצות אלו יהווה את $D'$ והוא כיסוי מדויק של $S$ (ודא!). שים לב שבהתאמה זו נקבל לעיתים קבוצות ריקות ובמקרה כזה לא נכניסן ל-$D'$. בכל מקרה, הכיסוי $D'$ יכיל לכל היותר $K$ תת-קבוצות מתוך

$D$. כיוון II: בהנתן כיסוי מדוייק $D' \subseteq D$ של הקבוצה $S$ אשר גודלו $K$ לכל היותר, נבנה את $C'$ (הכיסוי של $S$ מתוך $C$) מתת-הקבוצות ה"מקוריות" שמהן נוצרו תת-הקבוצות ב-$D'$. גם במקרה זה נקבל כי $C'$ מכסה את $S$ וגודלה $K$ לכל היותר.

### 16.4 בעית כיסוי נוספת ($3XC$)

בעית הכיסוי הבאה שנציג, הינה מקרה פרטי מאד של בעית הכיסוי המדויק. זאת בעית כיסוי מדויק ע"י תת-קבוצות בגודל 3 בדיוק, שתסומן $3XC$. בעית כיסוי זו הינה אולי מצומצמת מדי מכדי להופיע באמת במציאות, אך היא שימושית מאד להוכיח כי בעיות אחרות (לעיתים מציאותיות) הינן **NP**-שלמות. שימושיות זו, משמעה שכדי להראות כי שפה $L_0 \in$ **NP** הינה **NP**-שלמה, יהיה נוח לפעמים להראות כי $3XC \propto_p L_0$. נוחות זו נובעת מהמבנה ה"קשוח" של הקלט לבעיה $3XC$. בפרט, מכיוון שמדובר בכיסוי מדויק ע"י תת-קבוצות בגודל זהה, אין טעם לתת כנתון את מספר תת-הקבוצות בכיסוי (קלט עם $K$ נתון שאינו מתאים ידחה מיד). נובע גם, שגודל הקבוצה שיש לכסות, חייב להיות כפולה של 3. אחרת ברור שלא ניתן לכסות אותה באופן מדויק. ללא הגבלת הכלליות, נוכל לזהות את אברי הקבוצה עם המספרים $1,2,\ldots,3n$.

הגדרה 16.9: כיסוי מדויק ע"י תת-קבוצות בגודל 3 - 3-Exact Cover ($3XC$).
קלט: שלם $n$ ואוסף תת קבוצות $C=\{C_i\}_{i=1}^{m}$, כך שלכל $i$, מתקיים $C_i \subseteq \{1,2,\ldots,3n\}$ וכן $|C_i|=3$.
שאלה: האם קיים תת אוסף $C' \subseteq C$ בעל $n$ תת-קבוצות, המכסה את $\{1,2,\ldots,3n\}$ במדויק?

משפט 16.5: השפה $3XC$ הינה **NP**-שלמה.

הוכחה: $3XC \in$ **NP** מוכח באופן זהה לזה של $XC \in$ **NP** (ע"י נתינת הכיסוי עצמו כעד). על מנת להוכיח את השלמות של $3XC$ ב-**NP**, נראה רדוקציה מבעית $XC_3$ אל הבעיה $3XC$. שים לב כי הבעיה $XC_3$ שונה מ-$3XC$ בשני גורמים מהותיים:

1. תתי-הקבוצות בבעיה $XC_3$ הינן בגודל 3 לכל היותר, אך הן יכולות להיות גם קטנות יותר מ-3.
2. השאלה ב-$XC_3$ היא, "האם קיים כיסוי מדויק בגודל $K$ לכל היותר?", אך הכיסוי יכול להיות בגודל קטן מ-$K$.

אנו בחרנו לטפל בכל אחת מנקודות השוני בנפרד. לשם כך נציג בעיה נוספת, שתסומן $XC_3'$, הזהה ל-$XC_3$, פרט לכך שהדרישה היא לכיסוי ע"י $K$ קבוצות בדיוק.

הגדרה 16.10: בעית הכיסוי המדויק ע"י $K$ תת-קבוצות בגודל 3 לכל היותר ($XC_3'$).
קלט: קבוצה $S$, אוסף $C=\{C_i\}_{i=1}^{m}$ של תת-קבוצות בגודל 3 לכל היותר, של הקבוצה $S$ ושלם $K$.

<u>שאלה:</u> האם קיים כיסוי מדויק של $S$, ע"י בדיוק $K$ תת-קבוצות של האוסף $C$?

שים לב כי גם $XC_3'$ הינה ב-**NP** אך זה אינו חשוב לנו. אנו נראה תחילה כי $XC_3 \propto_p XC_3'$ ואחר כך נראה כי $XC_3' \propto_p 3XC$. מכך ינבע (ראה תרגיל 15.1) כי $XC_3 \propto_p 3XC$.

בשתי הרדוקציות יש לטפל בנפרד במקרה בו $K$ "גדול מאד" ובפרט $K > |C|$. הסיבה לצורך בטיפול כזה הינה שהרדוקציות הללו הינן פולינומיאליות (בין השאר) ב-$K$ (ולא באורך הקידוד הבינארי של $K$). טיפול טריביאלי אפשרי הינו להתייחס למקרה של $K > |C|$ כמו למקרה $K = |C| + 1$ (ובזה לנהוג כפי המתואר).

<u>הרדוקציה הראשונה:</u> $XC_3 \propto_p XC_3'$. נפתח בדיון אינטואיטיבי. השאלה העומדת בפנינו, היא איך לאפשר הגדלה של הכיסוי מבלי לפגוע בהיותו כיסוי מדויק. שים לב כי הגדלת הכיסוי אפשרית באופן טריביאלי במקרה של כיסוי כלשהו (כלומר, לא בהכרח כיסוי מדויק). כל הרחבה של כיסוי (ע"י תת-קבוצה נוספת) נותנת כיסוי. הדבר אינו נכון לגבי כיסוי מדויק. הרעיון הוא להוסיף איברים נוספים שניתן לכסותם באופן חסכוני או באופן בזבזני וזה מאפשר להגדיל את הכיסוי. בהנתן קלט $(S,C,K)$ לבעיה $XC_3$, נבנה קלט $(S',C',2K)$ לבעיה $XC_3'$ כדלקמן:

$$S' = S \bigcup \{e_1, e_2, \ldots, e_{2K}\}$$

$$C' = C \bigcup \{\{e_i\} : 1 \le i \le 2K\} \bigcup \{\{e_{2i-1}, e_{2i}\} : 1 \le i \le K\}$$

שים לב כי $S'$ נוצר ע"י הוספת $K$ זוגות של איברים חדשים לקבוצה $S$. כל אחד מהזוגות ניתן לכיסוי ע"י תת-קבוצה אחת או ע"י שתי תתי-קבוצות. ודא כי הינך מבין את ההעתקה שהרדוקציה מבצעת וכן כי העתקה זו ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי. לסיום, נודא כי ההעתקה הינה תקפה (כלומר, $(S,C,K) \in XC_3$ אמם $(S',C',2K) \in XC_3'$).

<u>כיוון I:</u> נניח תחילה כי $(S,C,K) \in XC_3$). נובע כי ישנו אוסף $D \subseteq C$ בגודל $l$, כך ש- $l \le K$ המכסה במדויק את אברי $S$. יהי $t \triangleq K - l$. נבנה אוסף $D' \subseteq C'$ המכסה (במדויק) את אברי $S'$ כדלקמן:

$$D' = D \bigcup \{\{e_i\} : 1 \le i \le 2t\} \bigcup \{\{e_{2i-1}, e_{2i}\} : t < i \le K\}$$

שים לב, כי $|D'| = |D| + 2t + (K-t) = 2K$.

<u>כיוון II:</u> נניח כעת כי $(S',C',2K) \in XC_3'$). מכאן שיש אוסף $D' \subseteq C'$ של $2K$ תת-קבוצות, המכסה (במדויק) את $S'$. מכיוון שבכדי לכסות את $S' \setminus S$ יש צורך ב-$K$ תתי-קבוצות לפחות, נובע כי $S$ מכוסה (במדויק) ע"י $K$ תת-קבוצות (מתוך $C$) לכל היותר. בזאת סיימנו להוכיח את תקפות הרדוקציה הראשונה.

<u>הרדוקציה השניה:</u> $XC_3' \propto_p 3XC$. נפתח שוב בדיון. הקלט ל-$XC_3'$ הוא מהצורה $(S,C,K)$, והשאלה היא "האם קיים תת-אוסף בגודל $K$ המכסה בדיוק את $S$?". תת-אוסף כזה יכול להיות מורכב מתתי-קבוצות בגדלים כלשהם,

אך דבר אחד מובטח: לו היה האוסף מורכב מתתי-קבוצות בגודל 3 בדיוק, אז הוא היה מכסה בדיוק $3K$ איברים. הרעיון המנחה של הרדוקציה, הוא: בהנתן קלט $(S,C,K)$ לבעיה $XC_3'$, נניח ללא הגבלת הכלליות כי $S = \{1, \ldots, |S|\}$, ונבנה את הקלט $(K,C)$ לבעיה $3XC$ כדלקמן. הקבוצה שאותה יש לכסות היא $\{1,2, \ldots, 3K\}$. במקרה הטריביאלי בו $|S| > 3K$, ברור כי אין פתרון לקלט של בעית $XC_3'$ ונבנה קלט קבוע $(K,C)$ לבעית $3XC$ אשר אין לו פתרון. אחרת, בקבוצה $\{1,2, \ldots, 3K\}$ ישנם $w \triangleq 3K - |S|$ איברים (שים לב כי יתכן $w = 0$) שאינם ב-$S$. האוסף $C'$ יוגדר כדלקמן:

$$C' \triangleq \{C_i : C_i \in C \wedge |C_i| = 3\} \cup \{C_i \cup \{e_j\} : C_i \in C \wedge |C_i| = 2 \wedge |S| < j \le 3K\} \cup$$
$$\{C_i \cup \{e_j, e_k\} : C_i \in C \wedge |C_i| = 1 \wedge |S| < j < k \le 3K\}$$

שים לב כי $C'$ הינו אוסף תת-קבוצות (של $\{1,2, \ldots, K\}$) בגודל 3. ודא כי הינך מבין את ההעתקה שהרדוקציה מבצעת, וכי העתקה זו ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי. לסיום נוודא כי העתקה זו אמנם תקפה (כלומר, $(S,C,K) \in XC_3'$ אמם $(K,C') \in 3XC$ למקרה בו $|S| \le 3K$).

<u>כיוון I:</u> נניח תחילה כי $(S,C,K) \in XC_3'$. נובע כי קיים תת-אוסף, $D \subseteq C$, בגודל $K$ המכסה בדיוק את $S$. נבנה תת-אוסף, $D' \subseteq C'$, המכסה בדיוק את $\{1,2, \ldots, 3K\}$. יהיו $D_1, \ldots, D_K$ תת-הקבוצות בתת-האוסף $D$. נעבור סדרתית על כל ה-$D_i$-ים, לכל $D_i$ בגודל 2 נוסיף את האיבר הראשון מתוך $\{|S|+1, \ldots, 3K\}$, שלא הוסף עד כה, ולכל $D_i$ בגודל 1 נוסיף את שני האברים הבאים (שלא הוספו עד כה). קיבלנו אוסף של $K$ תתי-קבוצות, חלקי לאוסף $C'$, אשר מכסה את $\{1,2, \ldots, 3K\}$.

<u>כיוון II:</u> נניח כעת כי $(K,C') \in 3XC$. יהי $D'$ האוסף החלקי המכסה (בדיוק) את $\{1,2, \ldots, 3K\}$. אם נחתוך כל אחת מתת-הקבוצות ב-$D'$ עם הקבוצה $S$, נקבל אוסף $D \subseteq C$ של $K$ תתי-קבוצות, המכסה (בדיוק) את $S$. □

### 16.5 בעיות NP-שלמות נוספות

כפי שכבר נאמר, השפה $3XC$ נוחה מאד כ"מקור לרדוקציות". כלומר, בהרבה מקרים נוח להראות כי שפה $L_0 \in \mathbf{NP}$ ע"י רדוקציה מהשפה $3XC$ אל השפה $L_0$. נתבונן במספר דוגמאות כאלו.

<u>הגדרה 16.11:</u> בעית האריזה (subset-sum או knapsack).

<u>קלט:</u> שלמים $a_1, \ldots, a_n, b$ ביצוג בינארי.

<u>שאלה:</u> האם קיימת קבוצה $I \subseteq \{1,2, \ldots, n\}$, כך ש- $\sum_{i \in I} a_i = b$ (כלומר, האם למשוואה $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$, במשתנים $x_i$, יש פתרון עם ערכי משתנים מתוך $\{0,1\}$)?

הבעיה נקראת, בעית האריזה (בתרמיל גב) משום שהיא מתייחסת למילוי אופטימלי של "נפח" $b$, ע"י עצמים בעלי נפחים $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

<u>משפט 16.6:</u> בעית האריזה הינה **NP**-שלמה.

<u>הוכחה:</u> הקבוצה $I$ היא עדות לכך ש- $(a_1,\ldots,a_n,b)\in$ knapsack ולפיכך knapsack$\in$ **NP** (השלם את הפרטים). תכונת ה **NP**-שלמות תנבע מהרדוקציה $3XC\propto_p$ knapsack. הרדוקציה תעתיק את הקלט $(n,C)$, כאשר $C=\{C_i\}_{i=1}^m$ (ואילו $S=\{1,2,\ldots,3n\}$ היא הקבוצה שיש לכסות) אל $m+1$ שלמים שאורך הייצוג שלהם לפי בסיס $n$ הינו $3n$ לכל היותר. בפרט, לכל $1\le i\le m$, תת-הקבוצה $C_i$, תועתק אל שלם $a_i$ שהביט ה $j$-י ביצוג שלו לפי בסיס $n$ הינו 1 אמם $j\in C_i$. הייצוג של השלם $b$ לפי בסיס $n$, יהיה כולו 1-ים. השלם את פרטי הבניה, והוכח כי ניתן לבצעה בזמן פולינומיאלי וכן שהיא תקפה (כלומר, $(n,C)\in 3XC$ אמם $(a_1,\ldots,a_m,b)\in$ knapsack). שים לב כמה נוח שאנו פטורים מהשאלה "כמה תת-קבוצות מכסות את $S$ באופן מדויק?" (למעשה, ניתן היה גם להשתמש ב-$XC_3'$).

דוגמא נוספת לשימוש בבעיה $3XC$ תינתן להלן (גם כאן ניתן היה להשתמש גם ב-$XC_3'$. דוגמאות שבהן יש להעדיף את $3XC$ על $XC_3'$, הינן מסובכות למדי ולא יוצגו). הבעיה שנציג להלן הינה בעיה "ממשית": בהנתן רשת של מוצבים עם זוגות מוצבים השולטים זה על זה, מה המספר המינימלי של מוצבים שיש לכבוש על מנת לשלוט על כל המוצבים? ניסוח נקי יותר של הבעיה, ניתן במונחים של תורת הגרפים.

<u>הגדרה 16.12:</u> בעית השליטה על צמתי הגרף - Dominating Set.

<u>קלט:</u> גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ומספר שלם $K$.

<u>שאלה:</u> האם קיימת קבוצה של $K$ צמתים לכל היותר $U\subseteq V$, כך שלכל $v\in V\setminus U$ קיים $u\in U$ כך ש- $(u,v)\in E$ (כלומר, $V=U\cup\left[\bigcup_{u\in U}N(u)\right]$ כאשר $N(u)=\{v:(u,v)\in E\}$)?

<u>משפט 16.7:</u> בעית השליטה על צמתי גרף, הינה **NP**-שלמה.

<u>הוכחה:</u> גם כאן קל לודא כי הבעיה נמצאת ב-**NP** (נשאיר זאת כתרגיל לקורא). נראה רדוקציה מהבעיה $3XC$ אל בעית השליטה על צמתי גרף. הרעיון הבסיסי (העומד להכשל) הוא להעתיק את הקלט $(K,C)$ של $3XC$, אל גרף דו-צדדי (Bipartite) אשר צמתי צד אחד בו מתאימים לתת-הקבוצות ב-$C$, צמתי הצד השני מתאימים לאברי הקבוצה $\{1,2,\ldots,3n\}$, וקשתות הגרף מייצגות את יחס השייכות של איבר לתת-קבוצה. כמו כן נקבע $K\leftarrow n$. החלק הטוב ברעיון זה, הוא שעל מנת לכסות את הצמתים המתאימים לאברי הקבוצה $\{1,2,\ldots,3n\}$, יש להשתמש ב-$n$ צמתים המתאימים לתתי-קבוצות ומהווים כיסוי מדויק. החלק החסר הוא שהצמתים המתאימים לתת-

הקבוצות הנותרות, נשארים ללא כיסוי. התיקון המתבקש הוא להוסיף קשתות בין כל זוג צמתים המתאימים לזוג תת-קבוצות (כלומר, צד הגרף המתאים לתתי-הקבוצות הינו קליק). בציור 16.3 מופיע תיאור ציורי של הבניה המתוקנת (בצד ימין נמצאים הצמתים המתאימים לאיברים $1,2,\ldots,3n$, ובצד שמאל נמצא קליק של צמתים המתאימים לתתי-הקבוצות):

ציור 16.3 בנית הרדוקציה מהבעיה $3XC$ לבעית Dominating Set

כתוב תיאור פורמלי של ההעתקה, ודא כי ניתן לבצע אותה בזמן פולינומיאלי, והוכח שהיא תקפה.

<u>הדרכה:</u> בהוכחת הכיוון "שליטת צמתים גוררת כיסוי מדויק", השתמש באבחנה כי צומת בצד ימין יכול להיות נשלט רק ע"י עצמו או ע"י צומת בצד שמאל. משיקולי ספירה נובע כי שליטה על כל צד ימין ע"י $n$ צמתים לכל היותר, חייבת להתבצע ע"י $n$ צמתים בצד שמאל. שים לב לתפקיד הקליק בהוכחת הכיוון "כיסוי מדויק גורר שליטת צמתים".

<u>תרגיל 16.5:</u> נסח והוכח את הטענה כי בעית שליטת הצמתים הינה **NP**-שלמה גם כאשר הקלט מוגבל לגרף דו-צדדי (רמז: השתמש ברעיון הבסיסי של הבניה, אך במקום לבנות קליק על צמתי צד שמאל, הוסף צומת נוסף השולט על כולם).

תרגילים נוספים ניתן למצוא בספר של Garey & Johnson (ראה מבוא). בפרט מומלץ לקרוא את ההוכחה לכך שקבוצת הגרפים ההמילטונים הינה שפה **NP**-שלמה. זכור כי **גרף המילטוני**, הינו גרף שיש בו מסלול פשוט העובר דרך כל צומת בגרף פעם אחת ויחידה (מסלול זה נקרא **מסלול המילטוני**).