3. טכניקות תכנות של מכונות טיורינג

נקדים ונאמר שאין לנו שום כוונה להשתמש באמת במכונות כבמחשבים טיורינג לפתרון של בעיות. כל מטרתן היא לשמש כנושא הדיון בחישוב ומחשבים. במהלך דיון זה נרצה לטעון כי כל מיני פונקציות ניתנות לחישוב, וכדי להוכיח זאת, נצטרך להיות מסוגלים לבנות מכונות טיורינג המחשבות פונקציות אלו. בתחילה אמנם נעשה כך, אך בהמשך נסתפק בכך שנטען ונוכיח שאנו מסוגלים לעשות כך. ככל שהבנתנו בנושא תגדל, נרשה לעצמנו לדלג על יותר פרטים בהוכחות אלו, אולם עלינו להיות מסוגלים תמיד, למלא את הפרטים ולהציג מכונה המבצעת את החישוב.

אחת הבעיות הטכניות שהקשו ויקשו עלינו לבנות מכונות טיורינג, היא הבעיה של "תנועה" שמאלה מן התא השמאלי ביותר בסרט. נסיון תנועה כזה גורם לעצירה ועלינו להזהר שלא יתבצע אלא אם כן ברצוננו לעצור. (למעשה עדיף, ראה הערה ותרגיל בפרק קודם, שלא נעצור כך לעולם). הבעיה מתעוררת כמעט בכל חישוב לא טריביאלי אשר מחייב סריקה של הקלט יותר מפעם אחת.

תן דעתך, לדוגמא, על חישוב הפונקציה הבאה: לכל $\sigma \in \Sigma$ ולכל $\alpha \in \Sigma^*$, מתקיים $f_{RIGHT}(\alpha\sigma) = \sigma$, וכן $f_{RIGHT}(\lambda) = \lambda$ (כאשר λ הוא הקלט הריק). כל שנדרש הוא להעתיק את האות הימנית ביותר של הסרט אל התא השמאלי ביותר ולעצור. אולם עלינו למצוא תא זה. הרעיון הוא לסמן תא זה באות מיוחדת. לפיכך, מכונה המחשבת את f_{RIGHT} יכולה לפעול כדלקמן:

(1) כותבת סימן מיוחד $\# \notin \Sigma$, בתא השמאלי.

(2) סורקת את הסרט משמאל לימין בחיפוש אחר אות הקלט האחרונה.

(3) חוזרת לכתוב אות זו בתא המסומן # ועוצרת.

<u>להלן תאור המכונה:</u>

$Q = \{q_0, f\} \cup \{q_\sigma, q_\sigma' : \sigma \in \Sigma\}$.

$F = \{ f \}$.

$\Gamma = \Sigma \cup \{\not b, \#\}$.

<u>קידוד המכונה:</u>

סימון התא הראשון: $\delta(q_0,\sigma) = (q_\sigma,\#,R) \quad \forall \sigma \in \Sigma$.

מעבר זה יטפל בחישוב הפונקציה על קלט ריק: $\delta(q_0,\not b) = (f,\not b,S)$.

תנועה ימינה תוך זכרון האות האחרונה: $\delta(q_\tau,\sigma) = (q_\sigma,\sigma,R) \quad \forall \sigma,\tau \in \Sigma$.

זהוי סוף הסרט: $\delta(q_\tau,\not b) = (q_\tau',\not b,L) \quad \forall \tau \in \Sigma$.

תנועה שמאלה: $\delta(q_\tau',\sigma) = (q_\tau',\sigma,L) \quad \forall \sigma,\tau \in \Sigma$.

עצירה: $\delta(q_\tau',\#) = (f,\tau,R) \quad \forall \tau \in \Sigma$.

בתרגיל זה נעשה שימוש בטכניקה של סימון התא השמאלי ביותר. אולם, סימון זה מחק את התוכן הקיים של התא, דבר שלא היה לו חשיבות בתרגיל שלנו. בעתיד, בעיקר כאשר נשתמש במספר סימונים לצרכים שונים, לא נוכל להרשות לעצמנו את הלוקסוס הזה. סימון של תא עם תוכן σ בסימן $\#$ יתבצע ע"י כתיבה של תוכן חדש $(\sigma,\#)$ ועוד נרחיב את הדיבור על כך. טכניקה נוספת שנעשה בה שימוש מובלע בפתרון, היא מימוש של זכרון סופי ע"י מצבי המכונה. המכונה היתה צריכה לזכור את תוכן התא הימני ביותר תוך כדי תנועתה מן הקצה הימני של הסרט לקצהו השמאלי. דבר זה נעשה ע"י היותה באחד המצבים $\{q'_\sigma\}$ עפ"י הערך σ שהיה בתא הימני ביותר.

נחזור אל הטכניקה של סימון תאים. ע"מ לפתח צורת תיאור נוחה יותר של טכניקה זו, ניתן דעתנו על חישוב הפונקציה: $\text{double}(\alpha) = \alpha\alpha \quad \forall\alpha \in \Sigma^*$. כל שיש לעשות הוא להעתיק את אותיות הקלט α אחת - אחת אל מימין לקלט (כמובן שלא ניתן לעשות זאת בבת אחת). לשם כך יש לסמן את האותיות שכבר העתקנו. הסימון יעשה ע"י שימוש באי"ב עבודה אשר יכיל שלוש גרסאות של א"ב הקלט Σ. גירסא אחת תשמש לקלט ופלט. גירסא שניה תשמש לאותיות שעוד לא העתקנו וצריך להעתיקן. וגרסא שלישית לאותיות שהן העתקים.

<u>המכונה תפעל כדלקמן:</u>

(1) תסרוק את אותיות הקלט ותשנה אותן (מלבד הראשונה) לאותיות של גרסה שלא הועתקה. בסיום סריקה זו, תרשום מימין לקלט את העתק האות השמאלית ביותר.

(2) תבצע סריקות של הקלט. בכל סריקה תגיע אל האות השמאלית ביותר שלא הועתקה, תזכור אותה, תשנה אותה לאות מועתקת, ותעתיק אותה מימין לסרט הפעיל הנוכחי.

להלן קידוד של המכונה המבצעת את החישוב:

$$Q = \{q_0,q_1,q_2,q_3,f\} \bigcup \{q_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$$
$$F = \{f\}$$
$$\Sigma' = \{\sigma' : \sigma \in \Sigma\}$$
$$\Sigma'' = \{\sigma'' : \sigma \in \Sigma\}$$
$$\Gamma = \Sigma \bigcup \Sigma' \bigcup \Sigma'' \bigcup \{\not b\}$$

<u>קידוד המכונה:</u>

עצירה על קלט ריק: $\delta(q_0,\not b) = (f,\not b,L)$.

אות ראשונה: $\forall\sigma \in \Sigma \quad \delta(q_0,\sigma) = (q_\sigma,\sigma,R)$.

שינוי גירסא במעבר ראשון: $\forall\sigma,\tau \in \Sigma \quad \delta(q_\sigma,\tau) = (q_\sigma,\tau',R)$.

מעבר ימינה: $\forall\sigma \in \Sigma\ \forall\tau' \in \Sigma' \quad \delta(q_\sigma,\tau') = (q_\sigma,\tau',R)$, $\forall\sigma \in \Sigma\ \forall\tau'' \in \Sigma'' \quad \delta(q_\sigma,\tau'') = (q_\sigma,\tau'',R)$.

כתיבת האות: $\forall\sigma \in \Sigma \quad \delta(q_\sigma,\not b) = (q_1,\sigma'',L)$.

סריקה שמאלה על החלק שכבר הועתק: $\forall\sigma'' \in \Sigma'' \quad \delta(q_1,\sigma'') = (q_1,\sigma'',L)$.

גילוי שיש עוד להעתיק: $\forall\sigma' \in \Sigma' \quad \delta(q_1,\sigma') = (q_2,\sigma',L)$.

סריקה שמאלה על החלק מ-α שעדיין לא הועתק: $\forall\sigma' \in \Sigma' \quad \delta(q_2,\sigma') = (q_2,\sigma',L)$.

גילוי שכבר הועתק הכל: $\forall\sigma\in\Sigma\ \ \delta(q_1,\sigma)=(q_3,\sigma,R)$.

תחילת סריקה ימינה: $\forall\sigma\in\Sigma\ \ \delta(q_2,\sigma)=(q_0,\sigma,R)$.

זכירת האות להעתקה: $\forall\sigma'\in\Sigma'\ \ \delta(q_0,\sigma')=(q_\sigma,\sigma,R)$.

תרגום הפלט לא"ב Σ: $\forall\sigma''\in\Sigma''\ \ \delta(q_3,\sigma'')=(q_3,\sigma,R)$.

עצירה: $\delta(q_3,\text{␣})=(f,\text{␣},S)$.

אותם זוגות שעבורם δ לא הוגדר, אינם מופיעים במהלך חישוב וניתן להגדיר אותם בכל אופן.

דרך נוחה לחשוב על מכונה זו, היא לחשוב כאילו הסרט שלה מחולק לשני "ערוצים". ערוץ אחד מכיל את אותיות א"ב הקלט, והערוץ השני מכיל סימון האם אלו אותיות מן הגירסה הראשונה או השניה, או פשוט יותר, האם אותיות אלו הועתקו כבר או לא. במהלך ההעתקה יראה הסרט כמתואר בציור 3.1.

σ_1	σ_2	$\cdots$	σ_i	σ_{i+1}	$\cdots$	σ_n	σ_1	$\cdots$	σ_i	␣	$\cdots$
V	V	$\cdots$	V	–	$\cdots$	–	*	$\cdots$	*		$\cdots$

ציור 3.1: האותיות $\sigma_1\cdots\sigma_i$ כבר הועתקו ואילו הבאות עדיין לא

הטכניקה של שימוש בסרט של מספר ערוצים, מראה בבירור כי סימון הוא מקרה פרטי של טכניקה כללית יותר של רישום אינפורמציה נוספת בתאים. רישום כזה יפשט את פתרון התרגיל הבא.

<u>תרגיל 3.1:</u> כתוב מכונת טיורינג אשר מבצעת חיבור של שני מספרים טבעיים. המספרים נתונים בייצוג בינארי ללא אפסים מובילים, כאשר סימן מיוחד, #, ניצב בינהם. הזהר מ"גלישה" של תוצעת החיבור.

<u>הדרכה:</u> "העתק" את המספר הקטן על גבי הגדול (השתמש בשני ערוצים), ובצע חיבור ביט אחר ביט (עם שארית), תוך סריקה מימין לשמאל.

<u>תרגיל 3.2:</u> כתוב מכונת טיורינג אשר מבצעת כפל של שני מספרים טבעיים הנתונים ביצוג בינארי.

<u>הדרכה:</u> עבוד עם שני ערוצים. ערוץ אחד יכיל תוצאת בינים של החישוב, ובערוץ השני תכתב כל פעם הזזה של אחד המוכפלים. (שים לב שהזזה שמאלית של i מקומות מתאימה לכפל ב-2^i).

טכניקה נוספת בעלת חשיבות היא סימון "החלק הפעיל" של הסרט של מכונת טיורינג. הכוונה היא שבכל רגע במהלך החישוב יהיו מסומנים התאים שהמכונה ביקרה בהם בעבר, כך שניתן יהיה להבדיל בינהם לבין תאים שהמכונה לא ביקרה בהם. לטכניקה זו יש חשיבות בעיקר בעת סימולציה של חישוב של מכונה אחת ע"י מכונה אחרת, כפי שיעשה בפרק הבא.

הגדרה 3.1: **החלק הפעיל** של הסרט של מכונת טיורינג, M, במהלך חישובה על קלט, α, כולל את כל התאים בהם היתה אות קלט בקונפיגורציה ההתחלתית וכן את כל התאים בהם ביקרה המכונה במהלך חישובה על הקלט α.

תרגיל 3.3: לכל מכונה M נגדיר פונקציה V_M כדלקמן: אם M עוצרת על קלט α אז $V_M(\alpha)$ הינו האורך של הקונפיגורציה הסופית המתאימה.

א. הראה עבור מכונה M הקוראת את כל הקלט שלה, כי $V_M(\alpha)-1$ הוא גודל החלק הפעיל של הסרט של המכונה, M, במהלך חישובה על הקלט α. מדוע $|\alpha q\beta|\le|\alpha' p\beta'|$ גורר $\alpha q\beta \underset{M}{\vdash} \alpha' p\beta'$ (רמז: 1–?).

ב. בנה מכונה M' אשר מחשבת את הפונקציה החלקית $f_{M'}(\alpha)=1^{V_M(\alpha)-1}$ (הפונקציה לא מוגדרת כאשר $V_M(\alpha)$ לא מוגדרת).