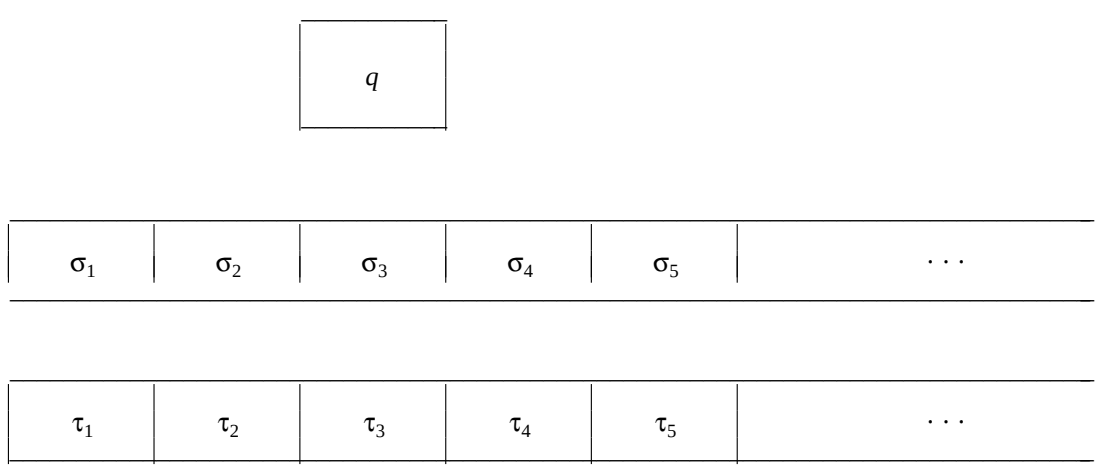
4. וריאנטים של המודל של מכונות טיורינג

בנוסף לוריאציות על ההגדרה של הפונקציה המחושבת ע"י מכונת טיורינג (שהוזכרו בסוף פרק 2) מופיעים במקורות שונים גם וריאנטים על המודל עצמו. כפי שנראה כל הוריאנטים הללו שקולים. מכל הוריאנטים הללו יש רק אחד שיש בו טעם של ממש, והוא המודל של מכונת טיורינג בעלת מספר סרטים.

לפני שנציג חלק מהוריאנטים השונים על המודל של מכונת טיורינג, נזכור שמטרתנו בהצגת המודל היתה להציג מודל פשוט ככל האפשר (כלומר מינימליסטי) ואילו נוחות התכנות בו לא ענינה אותנו כלל. מטרת הוריאנטים שיוצגו להלן היא להקל על התכנות במכונת טיורינג, תכנות שלא יהיה ממנו מנוס בהוכחת חלק מהטענות.

בפרט יהיה לנו נוח יותר לתכנת מכונת טיורינג בעלת מספר סרטים וראש קורא/כותב נפרד לכל סרט. במכונה כזו ניתן יהיה להעתיק מחרוזת ממקום אחד בסרט למקום שני, מבלי לסרוק את המחרוזת הרבה פעמים. היתרון המהותי של מכונת טיורינג בעלת מספר סרטים הוא, שהיא מסוגלת בכל צעד חישוב להזיז כל אחד מראשיה לכיוון אחר. התזוזה והכתיבה על כל סרט נעשים על סמך מצבה ועל סמך האותיות שהיא קוראת בכל אחד מהראשים.

לשם הפשטות נתבונן במכונה בעלת שני סרטים:



ציור 4.1: המכונה נמצאת במצב q, הראש הראשון שלה נמצא על התא השני בסרט הראשון, והראש השני על התא הרביעי בסרט השני.

בהגדרה פורמלית של מכונת טיורינג כזו, השינוי היחיד יהיה בהגדרת פונקצית המעברים δ (הגדרת Q, q_0, F, Γ, Σ, $\not{b}$ תשאר ללא שינוי). במקום שפונקציה זו תעבור מזוגות (של מצב ואות) לשלישיות (מצב, אות וכיוון תנועה) היא תהא: $\delta : \left[(Q \setminus F) \times \Gamma \times \Gamma\right] \to \left[Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{L,R,S\} \times \{L,R,S\}\right]$. זאת אומרת $\delta(q,\sigma,\tau) = (p,\sigma',\tau',L,S)$ משמעו כי המכונה במצב q כאשר היא קוראת σ בתא מהסרט הראשון ו-τ מהסרט השני,

עוברת למצב p, כותבת σ' על תא הסרט הראשון, τ' על תא הסרט השני, נעה שמאלה על הסרט הראשון ונשארת במקומה על הסרט השני.

באופן דומה תוגדר פונקצית המעברים של מכונה בעלת k סרטים.

$$\delta : \left[(Q \setminus F) \times \Gamma^k\right] \to \left[Q \times \Gamma^k \times \{L,R,S\}^k\right].$$

<u>הערה:</u> שים לב להבדל המהותי בין עבודה עם ערוצים (שהינו תרגיל מחשבתי גרידא בעת תכנות מכונת טיורינג בעלת סרט יחיד) לבין מכונת טיורינג בעלת מספר סרטים. למכונת טיורינג בעלת מספר סרטים ישנם מספר ראשים שתנועתם אינה זהה.

הגדרת קונפיגורציה רגעית של מכונה רבת-סרטים מסורבלת יותר מאשר הגדרת קונפיגורציה רגעית של מכונה רגילה. אולם אין מעבר לעצם הסירבול כל דבר מעניין. בפרט ניתן להגדיר קונפיגורציה רגעית של מכונת k סרטים כ k-יה של סדרות $(\alpha_1 q \beta_1, \alpha_2 q \beta_2, \ldots, \alpha_k q \beta_k)$ כאשר $q \in Q$ ואילו $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\ldots,\alpha_k,\beta_k \in \Gamma^*$. הקונפיגורציה ההתחלתית עם קלט $\alpha \in \Sigma^*$ תוגדר כ k-יה $(q_0\alpha, q_0, \ldots, q_0)$ וקונפיגורציה סופית עם פלט $\beta_k \in \Gamma^*$ תהא מהצורה $(\beta_1 q \gamma_1, \beta_2 q \gamma_2, \ldots, \beta_k q \gamma_k)$. הגדרת צעד חישוב תכלול 3^k מקרים עפ"י כל התנועות האפשריות של k הראשים. כתיבת הגדרה כזו (למקרה $k=2$) ניתנת בזאת כתרגיל. הפונקציה שמכונה כזו מחשבת, תוגדר על סמך תוכן הסרט הראשון בקונפיגורציה ההתחלתית ותוכן הסרט ה k-י בקונפיגורציה הסופית (השלם את הפרטים!).

הבחירה להגדיר את הקלט על סמך תוכן הסרט הראשון בעת הקונפיגורציה ההתחלתית, ולהגדיר את הפלט על סמך תוכן הסרט האחרון בקונפיגורציה סופית, נוחה במיוחד. אפשר אפילו להסכים כי המכונה לא משנה אף פעם את תוכן הסרט הראשון (ז.א. תמיד חוזרת וכותבת בתא שם את תוכנו הקודם) וכן שאינה הולכת אף פעם שמאלה על גבי הסרט האחרון. במקרה זה זיהוי הסרט הראשון עם הקלט וזיהוי הסרט האחרון עם הפלט הם מוחלטים. כל הסרטים האחרים יקראו סרטי עבודה ויכילו תוצאות ביניים של החישוב.

<u>תרגיל 4.1:</u> הוכח כי לכל מכונת טיורינג רבת סרטים, יש מכונת טיורינג רבת סרטים שקולה (זכור מכונות נקראות שקולות אם הן מחשבות אותה פונקציה) אשר הפעילות שלה על הסרט הראשון והאחרון מוגבלת באופן המתואר בפסקה הקודמת. (הדרכה: הוסף שני סרטים).

<u>תרגיל 4.2:</u> הוכח כי לכל מכונת טיורינג רבת סרטים, יש מכונת טיורינג שקולה בעלת סרט אחד. (הדרכה: בצע סימולציה של פעולת מכונת טיורינג בעלת k סרטים, ע"י מכונת טיורינג שהסרט היחיד שלה מחולק ל $2k$ ערוצים. זוג הערוצים ה i-י יכיל את תוכן הסרט ה i-י של המכונה שלה אנו מבצעים סימולציה ואת מיקום הראש ה i-י).

<u>תרגיל 4.3:</u> בנה מכונת טיורינג (רבת-סרטים) אשר מבצעת מעבר מיצוג בינארי ליצוג אונרי. (הייצוג האונרי של 5 הוא 11111 והייצוג הבינארי שלו 101).

<u>תרגיל 4.4:</u> בנה מכונת טיורינג אשר מבצעת מעבר מיצוג אונרי ליצוג בינארי.

שני וריאנטים של המודל של מכונת טיורינג אשר אין בהם תועלת מרובה הם: מכונה בעלת סרט אינסופי לשני הכיוונים, ומכונה ללא היכולת להשאר במקום. המכונה מהסוג הראשון פטורה מהצורות שהתעוררו אצלנו לגבי תנועה שמאלה מקצה הסרט (צורות שראינו שניתן להתגבר עליהן בקלות) בעוד שהמכונה מהסוג השני "פשוטה יותר", אך תכנות בה מסורבל יותר (שים לב כי במכונת טיורינג בעלת סרט אחד אין שימוש ביכולת העמידה במקום, פרט לסיום החישוב).

הגדרת מכונה עם סרט אינסופי לשני הכיוונים זהה להגדרת מכונה רגילה. השוני קיים בהגדרת צעד חישוב. כעת אם בקונפיגורציה $\overset{q}{\sigma}\alpha$ צריך ללכת שמאלה, למשל $\delta(q,\sigma)=(p,\tau,L)$, אז מגיעים לקונפיגורציה $\alpha\overset{p}{\not b}\tau$. הגדרת הפלט של קונפיגורציה מסיימת נותרת כפי שהייתה אך משמעותה שונה: את הפלט יש לקרוא לא ממקום קבוע והלאה אלא מהמקום השמאלי ביותר שאליו הגיע חישוב המכונה. שים לב כי מכונה כזו עוצרת רק ע"י מעבר למצב סופי.

<u>תרגיל 4.5:</u> הראה כי לכל מכונת טיורינג בעלת סרט אינסופי לשני הכיוונים קיימת מכונת טיורינג שקולה בעלת סרט אינסופי לכיוון אחד בלבד.

<u>הדרכה:</u> "קפל" את הסרט האינסופי הדו-כיווני סביב המיקום ההתחלתי של הראש הקורא/כותב והתאם ערוץ אחד בסרט החד-כיווני לכל כיוון של הסרט הדו כיווני. זכור לדאוג לכך שבסיום החישוב המכונה תחשב את אותו פלט (ולא "קיפול" שלו) כדאי לשם כך להשתמש בערוץ נוסף.

במודל שאינו מאפשר עמידה במקום, הכל זהה למודל הרגיל, פרט לפונקצית המעבר שכעת מוגדרת:

$$\delta:\ \Big[(Q\setminus F)\times\Gamma\Big]\to\Big[Q\times\Gamma\times\{L,R\}\Big]$$

<u>תרגיל 4.6:</u> הראה כי לכל מכונת טיורינג בעלת יכולת עמידה במקום, קיימת מכונת טיורינג שקולה שאינה עומדת במקום. (שים לב כי הכיוון ההפוך טריוואלי). פתור את התרגיל עבור מכונת טיורינג בעלת סרט בודד. תן דעתך לכך שלא ניתן לבצע סימולציה פשוטה כל כך במכונה רבת-סרטים, משום שבצעד חישוב יתכן שראש אחד עומד בעוד שהשני נע. (תרגיל למתקדמים: פתור התרגיל, עבור מכונת טיורינג רבת-סרטים).

ענין נוסף הנופל חלקית לקטגוריה של וריאנט, הוא מכונת טיורינג אשר א"ב העבודה שלה מכיל את א"ב הקלט ואת הרווח ($\not b$) בלבד.

<u>תרגיל 4.7:</u> הראה כי לכל מכונת טיורינג, בעלת א"ב קלט Σ, בה הפלט הינו תמיד ב-Σ^*, קיימת מכונת טיורינג שקולה אשר בה $\Gamma'=\Sigma\cup\{\not b\}$.

הדרכה:

(1) קדד את אותיות העבודה של המכונה המקורית $\Gamma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ ע"י אותיות הקלט (השיטה הנוחה ביותר היא קידוד למילים באורך שווה).

(2) לפני תחילת החישוב, תרגם הקלט לקידודו. (דוגמא: נניח למשל כי $|\Gamma| \le |\Sigma|^5$ לכן נוכל לקודד כל אות בא"ב Γ ע"י 5 אותיות בא"ב Σ. נניח כי הקידוד מעביר כל אות $\sigma_i \in \Sigma$ למחרוזת $\sigma_i\,\sigma_1^4$ כאשר σ_1 הינה האות הראשונה בא"ב Σ. בנה מכונת טיורינג בעלת סרט יחיד אשר בהנתן קלט $\alpha \in \Sigma^*$ מחזירה כפלט את המחרוזת α מקודדת לפי קידוד זה).

(3) בצע סימולציה של צעד חישוב מקורי ע"י זיהוי האות המקודדת, חישוב האות שיש לכתוב במקומה וכתיבת קידודה.

ענין אחרון הוא צמצום הדיון לא"ב קלט $\Sigma = \{0,1\}$. כאן לא נוכל לטעון לקיום של מכונות טיורינג שקולות, משום שהראשונות יחשבו פונקציה מעל א"ב אחד, בעוד שהאחרות יחשבו פונקציות מעל א"ב אחר. אולם ניתן לטעון להתאמה מסוימת (מספקת!) בין הפונקציות.

תרגיל 4.8: יהי $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ ויהי $h : \Sigma \to \{0,1\}^*$ קידוד חד-פענח של אותיות Σ ע"י סדרות בינאריות. לשם פשטות הנח תחילה כי לכל $\sigma,\tau \in \Sigma$ מתקיים $|h(\sigma)| = |h(\tau)|$ הרחב את h למילים מעל Σ. הוכח כי לכל מכונת טיורינג M, המחשבת פונקציה $f_M : \Sigma^* \to \Sigma^*$, קיימת מכונה M' בעלת א"ב קלט $\{0,1\}$ כך שלכל $\alpha \in \Sigma^*$ מתקיים $f_{M'}(h(\alpha)) = h(f_M(\alpha))$.

הדרכה: המכונה M' מבצעת סימולציה של פעולות M באופן דומה לתרגיל 4.7.

תן דעתך, על הפונקציות המחושבות ע"י המכונות M ו-M'. הפונקציות h ו-h^{-1} "קלות מאד" לחישוב, ולכן השיויון $f_M(\alpha) = h^{-1}(f_{M'}(h(\alpha)))$ מצביע על קשר הדוק מאד בין המכונות.

הערה: בפרט ניתן לקדד בעזרת א"ב $\{0,1\}$ פונקציה רבת משתנים מעל $\{0,1\}$ ע"י החלפת הסימן # ב- 00 וביט σ ב- 1σ.

אבחנה דומה ניתן לבצע לגבי הפלט של מכונת טיורינג. החשיבות של כל הדיון הנ"ל היא בצמצום הדיון לחישוב של פונקציות בוליאניות. ובאמת מרגע זה ואילך נדבר רק על האפשרות (או חוסר האפשרות) לחשב פונקציות (חלקיות או מלאות) מן הסוג $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$.