6. התזה של Church ופונקציות רקורסיביות

נפתח את הפרק בניסוח חוזר של התזה של Church, כפי שכבר הופיעה בפרקים קודמים. התזה טוענת, כי כל מודל כללי וסביר של חישוב, שווה בכוחו למודל של מכונת טיורינג. קיימים שני תנאים על מודל החישוב. תנאי מינימום, הדורש שהמודל יהיה מודל כללי של חישוב, אשר מסוגל לבצע חישובים, שברור אינטואיטיבית שניתן לבצעם. ניסוח זה של תנאי המינימום מסוכן, מכיוון שכפי שציינו, האינטואיציה שלנו בנושא החישוב עדיין רופפת. ניסוח בטוח יותר יבוטא בדרישה מהמודל הכללי, שיוכל לבצע כל חישוב הניתן לביצוע במודל של מכונת טיורינג. התנאי השני הוא תנאי המקסימום, הדורש שמודל החישוב יכיל מכונות אשר "תאורן" הוא סופי. הדגש הוא, שאין דרישה שיהיה חסם על גודל כל המכונות במודל (דרישה שהיתה גוררת קיום של מספר סופי בלבד של מכונות) אלא רק שהתיאור של כל מכונה יהיה סופי. הכוונה בתיאור של מכונה, היא תאור מלא של הדרך בה המכונה מבצעת צעד חישוב בודד על כל סביבה אפשרית.

התזה של צ'רץ' (ניסוח ראשון): כל מודל סביר וכללי של חישוב, שקול למודל של מכונת טיורינג (שקילות בין מודלים, משמעה שהם מסוגלים לחשב בדיוק את אותן פונקציות).

יש פגם אסטטי בניסוח הנ"ל המתכוון להתייחס אל תופעה כללית (מדל סביר של חישוב) ונזקק לפרטים הספציפיים של המודל המסוים של מכונת טיורינג. לפיכך עדיף לנסח את התזה, כך שתהיה חופשיה מן הספציפיות הזאת (מה שיגרור בהכרח ניסוח מעורפל יותר).

התזה של צ'רץ' (ניסוח שני): כל המודלים הסבירים והכלליים של חישוב, שקולים בכוחם (כלומר, מחשבים את אותן פונקציות).

אך מהי אותה קבוצת פונקציות אשר כל המודלים הסבירים והכלליים מחשבים? כמובן שניתן לענות תוך שימוש באחד המודלים (הסבירים והכלליים) והניסוח הראשון של התזה אפילו מציע תשובה זו במפורש. אבל, האם ניתן לאפיין את הפונקציות הללו שלא באמצעות מודל חישובי, אלא בצורה "פונקציונלית"? נראה כי התשובה לשאלה חיובית, וניתנת בהגדרה של פונקציות רקורסיביות.

6.1 פונקציות רקורסיביות

פרק זה מציג גישה "מתמטית" לנושא של תורת החישוביות. נציג את קבוצת הפונקציות הרקורסיביות, נבחן מספר תכונות שלה ונראה את הקשר בין קבוצת פונקציות זו לבין הפונקציות, הניתנות לחישוב על-ידי מכונות טיורינג. לנסיון לעסוק במושג החישוב באמצעות כלים "מתמטיים", יש שני יתרונות חשובים. היתרון הראשון הינו שההגדרה בצורה מתמטית, איננה תלויה במודל מסויים של חישוב, ובפרט אינה מצריכה אותנו לעסוק בפרטים טכנים של

המודל החישובי הספציפי ושל הוריאנטים השונים שלו. יתרונה השני של הגישה הינו שהיא מאפשרת לנו להפעיל בקלות כלים מתמטיים מוכרים (כמו למשל, אינדוקציה מתמטית) על מנת להוכיח טענות.

באופן כללי, כל הפונקציות שנגדיר יהיו פונקציות בעלות מספר ארגומנטים, ממספרים טבעיים למספרים טבעיים. הפונקציות היסודיות הן הפונקציות הבאות:

(1) **פונקצית האפס** (Zero function): $Z(x) = 0$

(2) **פונקצית העוקב** (Successor function): $S(x) = x+1$

(3) **פונקציות ההיטל** (Projection functions): לכל מספר טבעי $n \geq 1$ ולכל $1 \leq i \leq n$ מגדירים את הפונקציה, $P_i^n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_i$

<u>דוגמא:</u> פונקצית הזהות מוגדרת על-ידי $P_1^1(x) = x$

קל לראות שהפונקציות הללו ניתנות לחישוב באמצעות מכונות טיורינג. אולם, פונקציות אלה לבדן מהוות קבוצה קטנה מאוד מתוך אוסף הפונקציות הניתנות לחישוב. לפיכך נציג שני כללים אשר בעזרתם ניתן יהיה לקבל אוסף עשיר יותר של פונקציות. אינטואיטיבית, כללים אלה מבטאים פעולות מוכרות בהקשר של תוכניות מחשב: האפשרות להפעיל פונקציה עם קלטים שהינם פלטים של פונקציות אחרות והאפשרות להפעיל פונקציה באופן רקורסיבי. פורמלית, שני הכללים לקבלת אוסף פונקציות עשיר יותר הם:

(1) <u>כלל ההרכבה</u> (Composition): תהי נתונה פונקציה של n ארגומנטים, שתסומן f ו-n פונקציות של m ארגומנטים כל-אחת, שנסמן ב-g_i, $(1 \leq i \leq n)$. ההרכבה של f על $g_1,g_2,\ldots,g_n$ הינה הפונקציה:

$$h(x_1,\ldots,x_m) = f(g_1(x_1,\ldots,x_m),g_2(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_n(x_1,\ldots,x_m))$$

(2) <u>כלל הרקורסיה הפרימיטיבית</u> (Primitive Recursion): תהיינה נתונות פונקציה של n ארגומנטים, שתסומן f (בסיס הרקורסיה) ופונקציה של $n+2$ ארגומנטים, שתסומן g (צעד הרקורסיה). הפונקציה המתקבלת מ-f ו-g על-ידי הפעלת כלל הרקורסיה הפרימיטיבית הינה הפונקציה:

$$h(i,x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} f(x_1,\ldots,x_n) & i=0 \\ g(i-1,h(i-1,x_1,\ldots,x_n),x_1,\ldots,x_n) & i>0 \end{cases}$$

<u>הגדרה 6.1:</u> **פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית**, הינה פונקציה, הניתנת לביטוי בעזרת שלוש פונקציות היסוד, תוך שימוש במספר סופי של פעמים בכלל ההרכבה ובכלל הרקורסיה הפרימיטיבית.

<u>דוגמא:</u> לכל מספר טבעי m, הפונקציה הקבועה $C_m(x) = m$ היא פרימיטיבית רקורסיבית.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על m.

<u>בסיס</u> ($m=0$) הפונקציה C_0 הינה פונקצית האפס שהיא אחת מפונקציות היסוד.

<u>צעד:</u> נניח שהפונקציה C_m הינה פרימיטיבית רקורסיבית ונראה שהפונקציה C_{m+1} הינה פרימיטיבית רקורסיבית על-ידי הרכבת פונקצית העוקב על הפונקציה C_m שכן $C_{m+1}(x) = S(C_m(x)) = m+1$. □

<u>דוגמא:</u> פונקצית החיבור, $\text{add}(x,y)=x+y$, היא פרימיטיבית רקורסיבית.

<u>הוכחה:</u> לצורך ההוכחה נצטרך להוכיח קודם שהפונקציה $g(x,y,z) = y+1$ הינה פרימיטיבית רקורסיבית. זאת קל להראות באמצעות כלל ההרכבה של פונקצית היטל על פונקצית העוקב: $g(x,y,z) = P_2^3(x,S(y),z)$. כעת, באמצעות כלל הרקורסיה הפרימיטיבית, תוך שמוש בפונקצית הזהות כבסיס הרקורסיה, ובפונקציה g כצעד הרקורסיה נוכיח כי פונקצית החיבור היא פרימיטיבית רקורסיבית:

$$\text{add}(x,y)=\begin{cases} P_1^1(y) = y & x=0 \\ g(x-1,\text{add}(x-1,y),y) = (x-1+y)+1 = x+y & x>0 \end{cases}$$

□

<u>תרגיל 6.1:</u> הוכח כי פונקצית הכפל, $\text{mult}(x,y) = x \cdot y$, היא פרימיטיבית רקורסיבית.

<u>דוגמא:</u> נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$\text{sub1}(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$$

ונראה שהיא פרימיטיבית רקורסיבית (תוך שמוש בכלל הרקורסיה הפרימיטיבית):

$$\text{sub1}(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ P_1^2(x-1,\text{sub1}(x-1)) = x-1 & x>0 \end{cases}$$

<u>תרגיל 6.2:</u> הוכח כי הפונקציה, $\text{monus}(x,y)$, המוגדרת:

$$\text{monus(x,y)}=\begin{cases} 0 & x \le y \\ x-y & x>y \end{cases}$$

היא פרימיטיבית רקורסיבית.

<u>תרגיל 6.3:</u> הוכח כי הפונקציה $\text{abs_dif}(x,y) = |x-y|$ היא פרימיטיבית רקורסיבית.

קבוצת הפונקציות הפרימיטיביות רקורסיביות הינה קבוצה רחבה של פונקציות בעלות תכונות מעניינות (אשר לא יידונו במסגרת קורס זה). בפרט, ניתן לראות שכל פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית ניתנת לחישוב על-ידי מכונת טיורינג (הוכחה מפורטת בהמשך הפרק). אולם, עדין קבוצת הפונקציות הפרימיטיביות רקורסיביות מהוה תת-קבוצה ממש של הפונקציות הניתנות לחישוב על-ידי מכונות טיורינג. ראשית, נשים לב כי פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית היא תמיד פונקציה שלמה ואילו מכונות טיורינג לא בהכרח עוצרות על כל קלט ולפיכך יש מכונות טיורינג המחשבות פונקציות חלקיות. יתר על-כן, קיימות גם פונקציות שלמות הניתנות לחישוב על-ידי מכונות טיורינג, שאינן פרימיטיביות רקורסיביות. דוגמא מפורסמת של פונקציה כזו הינה הפונקציה (השייכת למשפחה של פונקציות "דומות") הידועה בשם, <u>פונקצית אקרמן</u> (Ackermann's function) אשר מוגדרת באופן הבא:

$$\begin{cases} A(0,y) = y+1 & y \geq 0 \\ A(x,0) = A(x-1,1) & x > 0 \\ A(x,y) = A(x-1,A(x,y-1)) & x,y > 0 \end{cases}$$

למרות שניתן לחשב אותה על-ידי מכונת טיורינג, אקרמן הוכיח שפונקציה זו איננה פרימיטיבית רקורסיבית, על-ידי כך שהוא הראה שהיא "גדלה" מהר יותר מכל פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית. דרך אחרת להראות פונקציה שלמה שאיננה פרימיטיבית רקורסיבית, הינה על-ידי ההבחנה שהפונקציות הפרימיטיביות רקורסיביות ניתנות למניה $f_1, f_2, f_3, \ldots$. כעת, נגדיר פונקציה, $H(i,j) = f_i(j)$, כאשר f_i הינה הפונקציה ה-i בסדר המניה וכן נגדיר פונקציה $f(i) = H(i,i)+1$. לו f היתה פרימיטיבית רקורסיבית, אז קיים k, כך ש- $f = f_k$. אבל, במקרה כזה מתקיים, $H(k,k) = f_k(k) = f(k) = H(k,k)+1$ - סתירה. לכן f איננה פרימיטיבית רקורסיבית.

על מנת להרחיב את קבוצת הפונקציות הפרימיטיביות רקורסיביות, מוסיפים כלל נוסף. אולם לפני כן יש להעיר שכעת נכנסות לקבוצת הפונקציות שלנו פונקציות חלקיות, שאינן מוגדרות עבור כל קלט, ולכן עלינו להגדיר איך פועלים שני הכללים הקודמים על פונקציות חלקיות. כללית, אם מגדירים פונקציה על סמך ערך של פונקציה אחרת שאיננו מוגדר אז גם הפונקציה החדשה איננה מוגדרת. למשל, בכלל ההרכבה, אם עבור איזשהו i, הפונקציה $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ אינה מוגדרת, או שלכל i מוגדר $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_m) = y_i$ אך $f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ לא מוגדרת, אז גם $h(y_1,\ldots,y_m)$ לא מוגדרת. כעת נגדיר את הכלל החדש. אינטואיטיבית, משמעות הכלל הינה שבהנתן פונקציה, f, ניתן להגדיר פונקציה אחרת שתחשב את הערך הראשון עליו f מתאפסת (בהנחה שקיים כזה ערך ובהנחה שעבור כל ערך קטן יותר הערך של f מוגדר). פורמלית,

<u>כלל המינימיזציה</u> (Minimization): בהנתן פונקציה של $n+1$ משתנים, $f(y,x_1,x_2,\ldots,x_n)$, אז מוגדרת הפונקציה הבאה:

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \min_y \{ f(y,x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0 \wedge \forall y' < y \ \ f(y',x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ מוגדר} \}$$

אם לא קיים y כזה אז $h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ אינה מוגדרת.

הגדרה 6.2: פונקציה שניתנת לביטוי בעזרת שלוש פונקציות היסוד, תוך שימוש מספר סופי של פעמים בכלל ההרכבה, בכלל הרקורסיה הפרימיטיבית ובכלל המינימיזציה נקראת **רקורסיבית**.

דוגמא: נגדיר את **פונקצית החצי** עבור קלטים זוגיים: אם $x=2\cdot k$ אז $\text{half(x)}=k$. אם x אי-זוגי אז half(x) לא מוגדר. נראה כי הפונקציה half(x) היא רקורסיבית על-ידי שמוש בפונקצית החיבור והפונקציה $\text{abs}(x,y)$ אשר ראינו שהן פרימיטיביות רקורסיביות (ולכן בפרט הן גם רקורסיביות) וכן שמוש בכלל ההרכבה וכלל המינימיזציה. נגדיר פונקציית עזר:

$$f(y,x) = \text{abs_dif}(\text{add}(P_1^2(y,x),P_1^2(y,x)),x) = |(y+y)-x|$$

וכעת,

$$\text{half(x)} = \min_y\{f(y,x)=0\}$$

ודא כי אכן מתקבלת הפונקציה הדרושה.

תרגיל 6.4: נגדיר את פונקצית השורש עבור קלטים שהם רבועים של מספרים שלמים: אם $x=k^2$ אז $\text{sqrt(x)}=k$, אחרת sqrt(x) לא מוגדר. הוכח כי פונקציה זו היא רקורסיבית.

משפט 6.1: כל פונקציה רקורסיבית ניתנת לחישוב על-ידי מכונת טיורינג.

הוכחת משפט 6.1: נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר ההפעלות של שלושת הכללים בהגדרת הפונקציות (נזכיר שההגדרה דרשה שכל פונקציה רקורסיבית ניתנת להגדרה תוך הפעלת הכללים מספר סופי של פעמים על פונקציות היסוד).

בסיס (0 הפעלות): הפונקציות הניתנות לביטוי ללא שימוש בכללים הן פונקציות היסוד. וודא כי כל אחת מפונקציות היסוד ניתנת לחישוב על-ידי מכונת טיורינג.

צעד ($n+1$ הפעלות): נניח כי הטענה נכונה עבור פונקציות הניתנות להגדרה על-ידי שמוש של n פעמים, לכל היותר, בכללים ונראה שהטענה נכונה גם עבור כל פונקציה, h, הניתנת להגדרה על-ידי שמוש של $n+1$ פעמים בכללים. נפריד לשלושה מקרים על-פי הסוג של הכלל האחרון בו משתמשים בהגדרת h.

א. כלל ההרכבה: תהיינה $f, g_1, \ldots, g_n$, הפונקציות על-פיהן מוגדרת h כמובטח בכלל ההרכבה. כיון ש-h ניתנת להגדרה, תוך שימוש $n+1$ פעמים בכללי ההגדרה, הרי שאת כל אחת מהפונקציות $f, g_1, \ldots, g_n$, ניתן להגדיר תוך שימוש n פעמים (לכל היותר) בשלושת הכללים. לפיכך חלה על $f, g_1, \ldots, g_n$ הנחת האינדוקציה. כלומר, קיימות מכונות טיורינג, $M_f, M_{g_1}, \ldots, M_{g_n}$, המחשבות אותן בהתאמה. נבנה מכונת טיורינג, M_h, אשר על קלט, $x_1, \ldots, x_m$, פועלת באופן הבא:

(1) עבור $1 \le i \le n$, חשב באמצעות המכונה M_{g_i} את $y_i = g_i(x_1, \ldots, x_m)$.

(2) חשב באמצעות המכונה M_f את $h(x_1,\ldots,x_m)=f(y_1,\ldots,y_n)$.

קל להווכח שהמכונה M_h אכן מחשבת את הערך של h על הקלט $x_1,\ldots,x_m$. בנוסף, נשים לב שבמקרים בהם חלק מהפונקציות $f,g_1,\ldots,g_n$ לא מוגדרות, המכונות המתאימות אינן עוצרות וכך גם M_h. אולם במקרים אלה, כפי שהערנו קודם, h גם היא אינה מוגדרת ולכן M_h לא אמורה לעצור.

ב. <u>כלל הרקורסיה הפרימיטיבית:</u> תהיינה f ו-g הפונקציות על-פיהן מוגדרת h, כמובטח בכלל הרקורסיה הפרימיטיבית. מכיוון ש-h ניתנת להגדרה, תוך שימוש $n+1$ פעמים בכללי ההגדרה, הרי שכל אחת מהפונקציות, f ו-g, ניתנת להגדרה תוך שימוש n פעמים (לכל היותר) בשלושת הכללים. לפיכך חלה על f ו-g הנחת האינדוקציה. כלומר, קיימות מכונות טיורינג M_f ו-M_g המחשבות אותן. נבנה מכונת טיורינג M_h אשר על קלט $i,x_1,\ldots,x_n$, תחשב את $h(i,x_1,\ldots,x_n)$. נשים לב, כי h מוגדרת באופן רקורסיבי, אולם M_h תחשב את h בסדר הפוך לזה שבהגדרה (כלומר החל מחישוב $h(0,x_1,\ldots,x_n)$):

M_h תבדוק תחילה האם $i=0$.

(1) אם $i=0$, אז M_h תחשב באמצעות המכונה M_f את $h(0,x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)$

(2) אם $i\neq 0$, אז M_h תחשב באמצעות המכונה M_f, את $w_0=f(x_1,\ldots,x_n)$

עבור $k=0,1,\ldots,i-1$, M_h תחשב באמצעות המכונה M_g את $w_{k+1}=g(k,w_k,x_1,\ldots,x_n)$.

הפלט הינו w_i.

גם כאן, קל להווכח שהמכונה M_h אכן מחשבת את הערך של h על הקלט $i,x_1,\ldots,x_n$. בנוסף, נשים לב שאם הפונקציות, f או g, לא מוגדרות עבור הקלטים המבוקשים, אז המכונות המתאימות לא עוצרות וכך גם M_h. אולם במקרים אלה, כפי שהערנו קודם, h איננה מוגדרת ולכן M_h אינה אמורה לעצור.

ג. <u>כלל המינימיזציה:</u> תהי f, הפונקציה על-פיה מוגדרת h, כמובטח בכלל המינימיזציה. כיון ש-h ניתנת להגדרה תוך שימוש $n+1$ פעמים בכללי ההגדרה, הרי ש-f ניתנת להגדרה תוך שימוש n פעמים בשלושת הכללים. לפיכך חלה על f הנחת האינדוקציה. כלומר, קיימת מכונת טיורינג M_f המחשבת אותה. נבנה מכונת טיורינג M_h אשר על קלט $x_1,\ldots,x_n$ תחשב את $h(x_1,\ldots,x_n)$:

עבור $y=0,1,2,3,\cdots$:

חשב באמצעות המכונה M_f את $f(y,x_1,\ldots,x_n)$. אם התוצאה הינה 0 - עצור והחזר את y כפלט.

קל להווכח שהמכונה M_h אכן מחשבת את הערך של h על הקלט $x_1,\ldots,x_n$. בפרט, אם לא קיים y כך ש-$f(y,x_1,\ldots,x_n)=0$ או שהגענו ל-y שעבורו ערך הפונקציה $f(y,x_1,\ldots,x_n)$ לא מוגדר (ואז M_f לא עוצרת) הרי שהמכונה M_h לא תעצור. אולם במקרה כזה, h איננה מוגדרת ולכן M_h לא אמורה לעצור. □

על מנת להוכיח שקילות, בין קבוצת הפונקציות הרקורסיביות, לבין קבוצת הפונקציות הניתנות לחישוב על-ידי מכונות טיורינג, עלינו להראות גם את המשפט ההפוך:

משפט 6.2: כל פונקציה הניתנת לחישוב על-ידי מכונת טיורינג היא פונקציה רקורסיבית.

לא נוכיח כאן את המשפט, אולם נסקור בקצרה את הרעיון המרכזי. הרעיון הינו שבהנתן מכונת טיורינג, M, ניתן לקדד את הקונפיגורציות של המכונה בעזרת מספרים טבעיים, באופן כזה שבהנתן הקדוד של שתי קונפיגורציות, α_2 ו-α_1, ישנה פונקציה רקורסיבית, $\text{next}(\alpha_1,\alpha_2)$, המחזירה ערך 1 אמם הקונפיגורציה α_2, הינה הקונפיגורציה אליה M עוברת מהקונפיגורציה α_1 (כלומר, $\alpha_1 \vdash_M \alpha_2$) וכן קיימת פונקציה רקורסיבית $\text{final}(\alpha)$ המחזירה ערך 1 אמם α הינה קידוד של קונפיגורציה סופית. בשלב השני, על-ידי שמוש בכלל הרקורסיה הפרימיטיבית, ניתן להגדיר מתוך הפונקציות הללו פונקציה רקורסיבית $\text{stop}(k,\alpha)$ המחזירה ערך 0 אם מקונפיגורציה α המכונה M עוברת ב-k לקונפיגורציה סופית וערך 1 אחרת. שים לב כי אם M עוצרת על קלט מסוים תוך k צעדים, אז k הינו השלם המינימלי המקיים $\text{stop}(k,\alpha_0) = 1$, כאשר α_0 היא הקונפיגורציה ההתחלתית המתאימה לקלט זה. לפיכך, ישנה פונקציה רקורסיבית אשר לכל מחרוזת x מחזירה את מספר הצעדים הנחוץ למכונה M לעצור על הקלט x. לסיום, באופן דומה לבנית הפונקציה stop, ניתן לבנות פונקציה $\text{value}(k,\alpha)$, אשר מחזירה את β כך שמתקיים $\alpha \vdash_M^k \beta$ (M עוברת ב-k צעדים מקונפיגורציה α לקונפיגורציה β).

6.2 התזה של צ'רץ'

לאחר שהתוודענו אל הפונקציות הרקורסיביות, ניתן לנסח את התזה של צ'רץ' באופן סופי כדלקמן :

"כל מודל סביר וכללי של חישוב, מאפשר לחשב את כל הפונקציות הרקורסיביות ורק אותן"

שים לב כי הטענה נקראת תזה משום שהיא מתייחסת למושג אינטואיטיבי, שאין בכוונתנו לפרש באופן מדויק. מושג זה כולל כמקרים פרטיים מודלים כגון המודל של מכונת טיורינג. ברגע שהסכמנו שהמודל של מכונת טיורינג הינו מודל סביר וכללי של חישוב, חובה היה עלינו להוכיח שטענת התזה מתקיימת עבורו. הטענה שהמודל של מכונת טיורינג מאפשר לחשב את כל הפונקציות הרקורסיביות ורק אותן היא משפט. אולם ההסכמה שהמודל של מכונת טיורינג הינו מודל סביר וכללי של חישוב היא ענין של שיקול דעת ולא ניתן להוכחה. באופן דומה לגבי כל מודל חישוב אחר, השאלה "האם מודל זה הינו מודל סביר וכללי של חישוב?" הינה שאלה של שיקול דעת, אולם השאלה "האם מודל זה מאפשר לחשב בדיוק את הפונקציות הרקורסיביות?", היא שאלה שהתשובה עליה הינה בתחום המתמטי/מדעי. לדוגמא, אוסף כל הפונקציות $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ לא נחשב בעיננו מודל סביר של חישוב משום ש"המכונות" בו (ר.א. הפונקציות) אינן ניתנות לתאור סופי (ראה תרגיל 6.5). מצד שני, אוסף כל הפונקציות הניתנות לחישוב ע"י מכונת טיורינג, בעלת סרט יחיד, שנעה רק ימינה, אינו מודל כללי של חישוב, משום שמודל זה אינו מסוגל לבצע חישובים פשוטים ביותר, שלא יעלה על הדעת שמחשב לא יוכל לבצעם (לדוגמא : השוואת שני

מספרים - ראה תרגיל 6.6). מנגד, המודלים שהוצגו בפרק 5 הינם מודלים סבירים וכללים של חישוב, ולפיכך היתה מוטלת עלינו חובה לודא שהם מאפשרים לחשב בדיוק את הפונקציות הרקורסיביות (דבר שאמנם עשינו).

<u>תרגיל 6.5:</u> הוכח כי לא קיימת העתקה חח"ע מקבוצת כל הפונקציות ממחרוזות אל מחרוזות, $F = \{f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*\}$, אל קבוצת כל המחרוזות, $\{0,1\}^*$.

<u>הדרכה :</u> הראה התאמה חח"ע ועל בין F לממשיים, והתאמה חח"ע ועל בין $\{0,1\}^*$ לבין הטבעיים.

<u>תרגיל 6.6:</u> הוכח כי מכונת טיורינג בעלת סרט יחיד, אשר נעה בכל צעד חישוב ימינה, אינה מסוגלת לבצע השוואה של מספרים טבעיים הנתונים בייצוג בינארי.

<u>אזהרה :</u> הוכחת אי-אפשרות היא ענין מבלבל. צריך להזהר שלא להניח במובלע שום הנחות על אותו אובייקט שמוכיחים את אי קיומו.

<u>הדרכה :</u> הנח בדרך השלילה, כי קיימת מכונה M אשר מסוגלת להשוות בין שתי מחרוזות מבלי לנוע אחורה. סמן ע"י q את מספר המצבים שלה. לשם פשטות, הנח כי הקלט הוא מן הצורה $x\#y$ והמכונה אמורה לקבל את הקלט אמם $x=y$. בחר $q+1$ קלטים שונים מהצורה $x\#$, וקבץ את הקלטים על פי המצב של המכונה בעת המעבר שלה מעל סימן ה- #. ברור כי אחת הקבוצות תכיל לפחות שני אברים (חלוקת $q+1$ קלטים ל- q קבוצות). נסמן שני אברים אלו ע"י α ו- β. הוכח כי המכונה חייבת לטעות על שניים מארבעת הקלטים : $\alpha\#\alpha$, $\beta\#\beta$, $\alpha\#\beta$ או $\beta\#\alpha$.