הערות מסכמות לחלק ראשון

הניסיון מראה, כי למרות כל ההסברים, עדיין נמצאים סטודנטים אשר בשלב זה עדיין תוהים האם אוטומט סופי אינו מודל סביר יותר של חישוב (בעולמינו). הטיעון השגוי מתבסס על סופיות עולמנו המתאימה, כביכול, לסופיות של אוטומט סופי, אך לא לאינסופיות שבהגדרת מכונת טיורינג. כבר הודגש בפרק המבוא, כי האינסופיות של הקונפיגורציות במכונת טיורינג, משמשת אותנו כאמצעי פורמלי, לנגד (מלשון ניגוד) את גודל הסביבה עליה פועל המחשב, עם הפשטות המצומצמת של הכללים שהוא מפעיל על סביבה זאת. ניגוד זה, שהוא מהותו של מושג החישוב, נעדר לחלוטין מן המודל של אוטומט סופי המופעל על מילים סופיות. יתר על כן, כמעט בכל מקרה, האוטומט המחשב פונקציה מסויימת, לא רק שאינו פשוט (קטן) יותר מאורך הקלט, אלא שהוא גדול ממנו בהרבה. שים לב למשל כי גודל האוטומט המזהה את השפה הסופית, $\{ww : w \in \{0,1\}^n\}$, הינו לפחות 2^n, בזמן שגודל מכונת טיורינג המזהה את השפה הזאת הינו $O(n)$ (ויתר על כן, מכונת טיורינג המזהה את $\{ww : w \in \{0,1\}^*\}$, הינה בגודל קבוע). סיבה נוספת לכך שאוטומט סופי אינו מהווה מודל סביר של חישוב, היא שאוטומט בגודל 2^n, מאפשר לזהות כל שפה המכילה רק מילים מאורך n. מכך יוצא כי תאור ע"י אוטומט סופי, אינו מבחין בין בעיות שיש אלגוריתם פשוט לפיתרונן (כגון הכרעה "האם מילה היא מהצורה ww?") לבין בעיות שאין אלגוריתם "פשוט" לפתרונן והשיטה היחידה לפתור אותן עבור קלטים מאורך n, היא סריקת טבלה של כל 2^n הקלטים האפשריים. המסקנה היא, שהמודל של אוטומט סופי, חסר ערך בדיון אלגוריתמי כללי. המקום היחיד שיש במודל אוטומט סופי ערך, הוא בתיאור מערכות פשוטות מאוד (כמו למשל בקרת שעון דיגיטלי) או באלגוריתמים פשוטים מאד (כגון "מנתח לקסיקוגרפי").

<u>הערה למתקדמים:</u> מושג החישוב, חופף את מושג ההוכחה בתורה לוגית. הוכחה בתורה לוגית, היא סדרה סופית של פסוקים $(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$, כך שכל פסוק בסדרה (ϕ_i), ניתן <u>לאישוש אוטומטי</u> על סמך כל הפסוקים הקודמים לו $(\phi_1,\ldots,\phi_{i-1})$ והאקסיומות של התורה. האישוש האוטומטי נעשה על סמך כללי ההסק של התורה הלוגית. כללים אלו הינם תמיד "פשוטים" ולפיכך האישוש שלהם כרוך בחישוב הניתן לביצוע. מכאן נובע שקיימת מכונת טיורינג אשר בהנתן סדרת פסוקים בתורה, מכריעה בשאלה "האם סדרה זו היא הוכחה בתורה?". נראה כי מכאן נובע שתורה לוגית קונסיסטנטית, אשר מאפשרת "לדבר על חישובים של מכונות טיורינג", היא בהכרח לא שלמה (כלומר, לא לכל פסוק נכון בה ישנה הוכחה). ראשית נבהיר כי באמרנו "התורה מאפשרת לדבר על חישובים של מכונות טיורינג", כוונתנו היא שהתחביר של התורה מכיל פסוקים מהצורה, $\alpha q \beta \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \gamma p \delta$ (כלומר, המכונה M, עוברת במהלך החישוב מקונפיגורציה $\alpha q \beta$ לקונפיגורציה $\gamma p \delta$) וכן (חשוב יותר) התחביר של התורה מכיל גם פסוקים מהצורה, $\alpha q \beta \overset{*}{\underset{M}{\nvdash}} \gamma p \delta$ (כלומר, לא מתקיים $\alpha q \beta \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \gamma p \delta$). קיום הוכחות לפסוקים משני הסוגים הנ"ל, גורר קיום מכונת טיורינג M_U, המכריעה בשאלה "האם ניתן לעבור מקונפיגורציה נתונה אחת $(\alpha q \beta)$, של מכונה M, לקונפיגורציה אחרת $(\gamma q \delta)$?" (שאלה שראינו כי אינה ניתנת להכרעה). המכונה M_U, מנסה "במקביל" לייצר הוכחה בתורה לאחת משתי הטענות $\alpha q \beta \overset{*}{\underset{M}{\nvdash}} \gamma p \delta$ או $\alpha q \beta \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \gamma p \delta$. מכאן יוצא כי משפט אי-השלמות של Gödel, הינו

מסקנה מאי-כריעות בעיית העצירה ומהעובדה שתחשיב הפרדיקטים מאפשר "לדבר על מכונות טיורינג". ההתפתחות ההסטורית היתה כמובן הפוכה. לא רק ש- Gödel קדם לטיורינג, אלא שטיורינג היה לוגיקאי במקורו וההגדרה (ה"לוגית" במקורה) של פונקציות רקורסיביות (באופן שהוצג בפרק 6), קדמה להגדרתן באמצעות מכונות טיורינג. אולם, נראה כי הדיבור על פונקציות הניתנות לחישוב באמצעות מודל חישוב ספציפי, תרמה רבות לקידום ההבנה של הכרוך בחישובים כאלו. בפרט הדברים אמורים בחישובים יעילים שידונו בחלק השני של חוברת זו.

לסיום החלק הראשון, נציג מספר "הרהורים פילוסופים" על ההבדל המהותי בין המושגים (האינטואיטיבים) של מחשבה וחישוב. כאשר אנו מדברים על **חישוב** הכוונה היא לתהליך של הפעלת כללים פשוטים הידועים לנו (לפחות בעקרון). לעומת זאת כל דיבור שאינו מתכחש למהות **המחשבה** מדבר (ולו במעורפל) על העדר (או אי-ידיעת) כללים פשוטים המכתיבים את המחשבה (ראה מושגים כגון יצירתיות ומקוריות, הקשורים באופן הדוק למושג המחשבה). הבדל נוסף בין שני המושגים, הוא בעוד שהאספקט המעניין אותנו ביותר ביחס לחישוב הוא תוצאתו, האספקט המעניין אותנו ביותר ביחס למחשבה הוא מהותה (כלומר, המחשבה על נושא, לעיתים מעניינת יותר מהמסקנות לגביו). לסיום, יש להבחין כי בדברנו על חישוב אנחנו כסובייקטים איננו זהים עם האובייקט של הדיון, בזמן שבדברנו על מחשבה לא ברור כל כך הגבול ביננו כחושבים ובין המחשבה שאנו מנסים לנתח.