Curriculum Vitae

Lucas Fresse

Né à Saint-Dié (France), le 24 Novembre 1979.
Nationalité française.

Addresse professionnelle :
Einstein Institute of Mathematics, Hebrew University of Jerusalem, Edmond J. Safra Campus, Givat Ram, 91904 Jerusalem, Israel.

Adresse de contact :
289 route de Rambervillers, 88470 Saint Michel sur Meurthe, France.

Contact :
Téléphone : +33 6 75 14 45 30
E-mail : `lucasfresse@math.huji.ac.il`

1. Emplois

2010-2011 : Post-doctorant à l'Université Hébraïque de Jérusalem, Israël.
Superviseur : Prof. David Kazhdan.

2008-2010 : Post-doctorant à l'Institut Weizmann, Rehovot, Israël.
Superviseur : Prof. Anthony Joseph.

2007-2008 : Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'Université Lyon 1.

2. Formation

2003-2007 : Doctorat de Mathematiques, sous la direction du Prof. Olivier Mathieu, au sein de l'équipe d'algèbre de l'Université Lyon 1, France.
Thèse : *Une étude combinatoire de la géométrie des fibres de Springer de type A*, soutenue le 12 Décembre 2007.

2002-2003 : 1) DEA de Mathematiques à l'Université Lyon 1, mémoire : *Représentations du groupe spécial linéaire en caractéristique naturelle.* Directeur : Prof. Olivier Mathieu.
2) Agrégation de Mathematiques.

2001-2002 : Maîtrise de Mathématiques à l'École Normale Supérieure de Lyon. Stage : *Classification des groupes de réflexions*, sous la direction du Prof. David Bessis, à l'Université Lyon 1.

2000-2001 : Licence de Mathématiques à l'École Normale Supérieure de Lyon. Stage : *Représentations linéaires des groupes finis*, sous la direction du Prof. Cédric Bonnafé, à l'Université de Besançon.

2000-2004 : Études à l'École Normale Supérieure de Lyon.

1996-1997 : Baccalauréat.

3. Recherche

Sujet de recherche : Géométrie des orbites nilpotentes et fibres de Springer.

Domaines : Théorie géométrique des représentations, combinatoire.

Mots-clefs : Variétés de drapeaux, orbites nilpotentes, fibres de Springer, variétés orbitales, correspondance de Springer, théorie de Kazhdan-Lusztig, diagrammes et tableaux de Young.

Liste des travaux

1. *Une étude combinatoire de la géométrie des fibres de Springer de type A*, thèse de doctorat, Université Lyon 1, 2007.
2. *Nombres de Betti des fibres de Springer de type A*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **347** (2009), pp. 283–287.
3. *Composantes singulières des fibres de Springer dans le cas deux-colonnes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **347** (2009), pp. 631–636.
4. *Betti numbers of Springer fibers in type A*, J. Algebra **322** (2009), pp. 2566–2579.
5. *Singular components of Springer fibers in the two-column case*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), pp. 2429–2444.
6. *On the singularity of the irreducible components of Springer fibers in $sl(n)$* (avec A. Melnikov), Selecta Math. (N.S.) **16** (2010), pp. 393–418.
7. *A unified approach on Springer fibers in the hook, two-row and two-column cases*, Transform. Groups **15** (2010), pp. 285–331.
8. *On the singularity of some special families of components of Springer fibers*, J. Lie Theory. **21** (2011), pp. 205–242.
9. *Some characterizations of the singular components of Springer fibers in the two-column case* (avec A. Melnikov), Algebr. Rep. Theory., à paraître. doi :10.1007/s10468-010-9227-5
10. *On geometric properties of orbital varieties in type A* (avec A. Melnikov), prépublication (2010), 6 pages, soumis.

4. Exposés dans des séminaires

– Séminaire d'algèbre de l'Université Lyon 1 (19 Juin 2007).

– Séminaire sur les algèbres enveloppantes de l'Université Paris 7 (15 Février 2008).

– Séminaire de géométrie algébrique de l'Université de Grenoble 1 (31 Mars 2008, 15 Juin 2009).

– Groupe de travail sur la théorie de Lie et la géométrie symplectique, Université Lyon 1 (1er Juillet 2008).

– Séminaire de théorie des représentations et géométrie algébrique de l'Institut Weizmann, Israël (24 Septembre 2008, 5 Novembre 2008, 5 Février 2009, 4 Décembre 2009).

– Séminaire d'algèbre de l'Université de Haïfa, Israël (13 Novembre 2008, 19 Novembre 2009).

– Séminaire d'algèbre de l'Université Hébraïque de Jérusalem, Israël (20 Novembre 2008).
– Séminaire de combinatoire algébrique de l'Université de Bar-Ilan, Israël (25 Novembre 2008).
– Séminaire sur les groupes de Lie et espaces de module de l'Université de Genève, Suisse (25 Février 2009).
– Séminaire d'algèbre de l'Institut Israëlien de Technologie (Technion), Israël (16 Mars 2009, 6 Janvier 2011).
– Séminaire de physique mathématique de l'Université de Dijon (2 Avril 2009).
– Séminaire d'algèbre et topologie de l'Université ETH Zürich, Suisse (8 Avril 2009).
– Séminaire d'algèbre de l'Université de Besançon (16 Avril 2009).
– Séminaire sur les groupes de Lie et l'analyse harmonique de l'Université Nancy 1 (4 Juin 2009).
– Groupe de travail sur la théorie des représentations de l'Université de Caen, France (9 Juin 2009).
– Séminaire d'algèbre de l'Université Ben Gurion de Beer Sheva, Israël (4 Novembre 2009, 8 Décembre 2010).

5. Participations à des congrès

– *10th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory* à l'Université de Kyushu, Fukuoka, Japon (19–23 Février 2011), exposé d'une heure.
– *Workshop on Algebra, Combinatorics, Dynamics and Applications* à la Queen's University de Belfast, Irlande du Nord (30 Août – 2 Septembre 2010), exposé de 40 minutes.
– *Workshop on Problems and Progress in Lie Algebraic Theory* à l'Institut Weizmann, Rehovot, Israël (7–8 Juillet 2010), exposé d'une heure.
– *Algebraic Groups and Invariant Theory* à Ascona, Suisse (30 Août – 4 Septembre 2009), exposé de 20 minutes.
– *Structures in Lie Representation Theory* à l'Université de Brême, Allemagne (9–22 Août 2009), exposé d'une heure.
– *The Israel Mathematical Union annual meeting* à l'Institut Weizmann, Rehovot, Israël (30 Avril – 1er Mai 2009), exposé d'une heure dans la session topologie-géométrie.
– *Algebraic Lie Structures with Origins in Physics* à l'Institut Newton, Angleterre (Mars 2009), présentation d'un poster.
– *Workshop on Enveloping Algebras and Related Topics* à l'Institut Weizmann, Rehovot, Israël (Janvier – Février 2008).
– *Groupes et géométrie* à Luminy (Décembre 2006).
– *Semaine dérivée* à l'Université Paris 7 (Janvier 2005).

6. Activités

Rapporteur pour les journaux suivants :

- Annales de l'Institut Fourier,
- Bulletin de la Société Mathématique de France,
- Journal of Algebra,
- Proceedings of the American Mathematical Society.

7. Enseignement

Travaux dirigés aux différents niveaux de la Licence de Mathématiques, à l'Université Lyon 1, dans la période 2004–2008. J'ai pris part aux unités d'enseignement suivantes :

- "Techniques mathématiques de base" (analyse réelle, limites, continuité, dérivation, intégration, trigonométrie, équations différentielles du premier et du second ordre).
- "Math 2" (fonctions à plusieurs variables, calcul différentiel, intégration multiple).
- "Math 3" (analyse mathématique, séries, séries de Fourier, séries entières, équations aux dérivées partielles).
- "Math 5" (calcul différentiel, courbes, surfaces, volumes).
- "Math II algèbre" (algébre linéaire de base, polynômes).
- "Math IV algèbre" (algèbre linéaire, réduction des endomorphismes).
- "Math IV analyse" (topologie, espaces métriques, calcul différentiel).

Pour chaque unité d'enseignement, au sein de l'équipe pédagogique, j'ai participé à la conception de feuilles d'exercices, de sujets d'examen, à l'organisation d'examens et à la correction de copies.

Présentation des travaux

À un élément nilpotent dans une algèbre de Lie réductive, on associe plusieurs variétés algébriques qui jouent un rôle important en théorie géométrique des représentations. Parmi ces variétés, figurent les *fibres de Springer* et les *variétés orbitales*. Dans mes travaux, j'ai étudié la géométrie des fibres de Springer et des variétés orbitales. Ce sujet possède à la fois des aspects algébriques, géométriques et combinatoires. Dans ce qui suit, je présente le contexte de cette étude, avant de décrire les résultats que j'ai obtenus.

1. Contexte

Dans ce qui suit, G est un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{g}$ désigne son algèbre de Lie. L'orbite adjointe $\mathcal{O}_x := G \cdot x$ d'un élément nilpotent $x \in \mathfrak{g}$ est dite nilpotente. Depuis 30 ans, l'impact de la géométrie des orbites nilpotentes en théorie des représentations est devenu un sujet d'étude important. Dans ce qui suit, on présente deux objets géométriques liés aux orbites nilpotentes et la manière dont ils apparaissent en théorie des représentations.

1) La variété $\mathcal{B}$ des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ est appelée variété drapeau. La sous-variété

$$\mathcal{B}_x = \{\mathfrak{b} \in \mathcal{B} : x \in \mathfrak{b}\}$$

est appelée *fibre de Springer*, car elle s'identifie à une fibre de la résolution de Springer du cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. La variété $\mathcal{B}_x$ est projective, équidimensionnelle, et en général non-irréductible. En 1976, T. Springer [?] a construit une action linéaire du groupe de Weyl W sur les espaces de cohomologie $H^k(\mathcal{B}_x, \mathbb{Q})$ de $\mathcal{B}_x$, permettant de retrouver toutes les représentations irréductibles. Ensuite, D. Kazhdan et G. Lusztig [?] ont conjecturé un lien combinatoire entre la configuration des intersections des composantes des fibres de Springer et les bases de Kazhdan-Lusztig pour les représentations de l'algèbre des algèbres de Hecke. La construction de Springer et la conjecture de Kazhdan-Lusztig ont motivé l'étude de la cohomologie des fibres de Springer et la géométrie de leurs composantes irréductibles.

2) On fixe un sous-groupe de Borel $B \subset G$ et on note $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. L'intersection $\mathcal{O}_x \cap \mathfrak{b}$ est une variété algébrique quasi-affine, équidimensionnelle, en général non-irréducible. Ses composantes irréductibles sont appelées *variétés orbitales*. Elles ont d'abord été étudiées par A. Joseph [?] qui a suggéré que leurs propriétés géométriques pourraient refléter des propriétés algébriques des idéaux primitifs de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$. De plus, Joseph a élaboré un programme [?] pour comprendre plus profondément la relation entre les idéaux primitifs et les variétés orbitales.

Les variétés orbitales et les composantes des fibres de Springer sont intimement liées. Pour $G = GL_n(\mathbb{C})$, on a une bijection entre les variétés orbitales de l'orbite nilpotente $\mathcal{O}_x$ et les composantes de la fibre de Springer $\mathcal{B}_x$, et cette bijection préserve de nombreuses propriétés géométriques, en particulier les propriétés locales (comme la lissité). Pour G général, on a une correspondance plus restreinte.

Pour $G = GL_n(\mathbb{C})$, les variétés orbitales et les composantes des fibres de Springer ont une interprétation combinatoire en termes de diagrammes de Young et tableaux. Tout d'abord on peut représenter la forme de Jordan d'un élément nilpotent $x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ par le diagramme de Young $Y(x)$ dont les longueurs des lignes coïncident avec les tailles des blocs de Jordan de x. D'autre part, d'après N. Spaltenstein [**?**], les variétés orbitales de $\mathcal{O}_x$ de même que les composantes irréductibles de $\mathcal{B}_x$ sont paramétrées par les tableaux de Young standards de forme $Y(x)$. Notons par $\mathcal{V}_T \subset \mathcal{O}_x$ et $\mathcal{K}_T \subset \mathcal{B}_x$, respectivement, la variété orbitale et la composante irréductible de $\mathcal{B}_x$ correspondant au tableau T. Il est remarquable que les algorithmes combinatoires classiques sur les tableaux, tels que le jeu de taquin, l'involution de Schützenberger et la correspondance de Robinson-Schensted ont une interprétation naturelle en termes de composantes des fibres de Springer et de variétés orbitales (cf. [**?**]).

2. Résultats obtenus

Les composantes des fibres de Springer et les variétés orbitales restent des objets assez mystérieux. Même dans le cas où $G = GL_n(\mathbb{C})$ (le cas le plus simple), la plupart de leurs propriétés géométriques et topologiques restent inconnues en dehors d'un petit nombre de formes de Jordan particulières.

Deux problèmes particuliers sont les suivants. En général, les composantes des fibres de Springer (resp. les variétés orbitales) peuvent être singulières, et une question naturelle consiste à déterminer lesquelles sont en singulières. D'autre part, notons que le sous-groupe de Borel B agit sur chaque variété orbitale, en général sans orbite dense, et une autre question naturelle consiste à déterminer les variétés orbitales qui possèdent une orbite dense.

Dans mes travaux, j'ai obtenu les résultats suivants (pour $G = GL_n(\mathbb{C})$) :

– une description combinatoire des espaces de cohomologie des fibres de Springer (références [2, 4] de la liste des travaux),
– une description de la structure des composantes irréductibles des fibres de Springer et de l'intersection entre composantes pour certaines formes de Jordan particulières ([7, 12]),
– des critères de singularité pour les composantes des fibres de Springer ([3, 5, 6, 8, 9]),
– des critères pour l'existence de B-orbite dense dans les variétés orbitales ([10, 11]).

Suit une description plus précise.

– Dans [2, 4] une décomposition cellulaire de la variété $\mathcal{B}_x$ est construite. La construction s'effectue par récurrence sur n, et s'appuie sur la décomposition en cellules de Schubert des variétés grassmanniennes.

Les cellules sont paramétrées par l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme $Y(x)$, i.e. les tableaux de forme $Y(x)$, numérotés par $1, 2, \ldots$, dont les numéros sont croissants de gauche à droite dans chaque ligne. La codimension d'une cellule est donnée par un nombre d'inversions sur les tableaux, analogue à une longueur de Coxeter. Cela permet un calcul des nombres de Betti de $\mathcal{B}_x$, i.e. les dimensions des espaces de cohomologie de $\mathcal{B}_x$. En particulier cette construction fournit un calcul des dimensions des représentations de Springer du groupe symétrique.

– Dans [7], on se restreint à l'étude des composantes de la fibre de Springer $\mathcal{B}_x$ lorsque le diagramme $Y(x)$ est de type crochet (i.e. a au plus une ligne de longueur > 1), deux-lignes, et deux-colonnes. Dans ces trois cas, on donne une formule commune pour décrire explicitement les composantes irréductibles, et on calcule la dimension d'une intersection de deux composantes.

– Les références [3, 5, 6, 8, 9] forment une série d'articles où on établit différents critères de singularité pour les composantes des fibres de Springer dans plusieurs cas particuliers. Dans [6] on montre le résultat suivant.

Théorème. *Toutes les composantes irréductibles de la fibre de Springer $\mathcal{B}_x$ sont lisses exactement dans les quatre cas suivants :*
(i) $Y(x)$ est de type crochet (i.e. $Y(x)$ a au plus une ligne de longueur > 1),
(ii) $Y(x)$ a deux lignes,
(iii) $Y(x)$ a trois lignes, dont une de longueur 1,
(iv) $Y(x)$ a trois lignes de longueur 2.

Dans [3, 5, 8, 9], des critères de singularité combinatoires sont établis pour des familles particulières de composantes irréductibles des fibres de Springer (composantes de type deux-colonnes, ou composantes dites de Bala-Carter). Les critères fournis, qui peuvent s'exprimer sous forme de configuration interdite, évoquent des critères similaires pour la singularité des variétés de Schubert. D'autre part, dans [9], pour le cas où $Y(x)$ a deux colonnes, on établit la propriété suivante :

$$\text{une composante de } \mathcal{B}_x \text{ est singulière} \Leftrightarrow \text{elle ne satisfait pas la dualité de Poincaré.}$$

– Dans [10], une relation inattendue est montrée entre la singularité des variétés orbitales et l'existence de B-orbite dense pour les variétés orbitales. Étant donné un tableau standard T, on note T^* le tableau transposé (i.e. le symétrique de T par rapport à la diagonale). Cette procédure combinatoire induit une involution $\mathcal{V}_T \mapsto \mathcal{V}_{T^*}$ sur l'ensemble des variétés orbitales. On a montré que, pour T tableau de type particulier (crochet, deux lignes, deux colonnes, et de type Richardson ou Bala-Carter), on a :

$$\mathcal{V}_T \text{ a une } B\text{-orbite dense} \Leftrightarrow \mathcal{V}_{T^*} \text{ est lisse.}$$

Un objectif de recherche naturel est d'étudier si une telle équivalence a lieu pour une variété orbitale $\mathcal{V}_T$ quelconque.

Références

[J1] A. Joseph, "On the variety of a highest weight module". J. Algebra **88** (1984), 238–278.

[J2] A. Joseph, "A surjectivity theorem for rigid highest weight modules". Invent. Math. **92** (1988), 567–596.

[KL1] D. Kazhdan, G. Lusztig, "Representations of Coxeter groups and Hecke algebras". Invent. Math. **53** (1979), 165–184.

[Spa] N. Spaltenstein, *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel.* Lecture Notes in Math., vol 946, Springer, Berlin/New York, 1982.

[Spr] T. Springer, "Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups". Invent. Math. **36** (1976), 173–207.