

UFR de mathématiques  
École Doctorale de Mathématiques  
et d'Informatique Fondamentale de Lyon  
Université Claude Bernard - Lyon 1

---

# THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

**LUCAS FRESSE**

pour obtenir le grade de

Docteur de Mathématiques de l'Université Claude Bernard - Lyon 1

---

## Une étude combinatoire de la géométrie des fibres de Springer de type $A$

---

Thèse soutenue le 12 décembre 2007 devant le jury composé de :

Henning Haahr ANDERSEN	Professeur à l'Université d'Aarhus
Olivier MATHIEU (directeur)	Directeur de Recherche à l'Université Lyon 1
Kenji IOHARA	Professeur à l'Université Lyon 1
Bernhard KELLER	Professeur à l'Université Paris 7
Marc VAN LEEUWEN	Professeur à l'Université de Poitiers

au vu des rapports de :

Henning Haahr ANDERSEN

Marc VAN LEEUWEN



## Remerciements

J'exprime ma reconnaissance infinie à mon directeur de thèse Olivier Mathieu. Travailler à son contact a été un honneur et un plaisir et je sais bien mesurer les progrès qu'il m'a permis d'accomplir. Je le remercie de m'avoir orienté vers un sujet de thèse si passionnant. Je lui suis reconnaissant de tout le temps qu'il a consacré à relire ma thèse, pour m'aider à améliorer la rédaction. Je le remercie pour sa disponibilité et pour la liberté qu'il m'a laissée.

Je remercie très sincèrement Henning Haahr Andersen et Marc van Leeuwen qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse et qui ont accepté de participer au jury. Je leur suis d'autant plus reconnaissant que j'ai rédigé une thèse bien longue et dont la lecture de certains passages, où les calculs abondent, fut probablement pénible. Je remercie Marc van Leeuwen dont les remarques m'ont permis d'améliorer sensiblement la rédaction. Je suis grandement reconnaissant à Henning Haahr Andersen d'avoir consenti à lire ma thèse en français.

Je remercie vivement Kenji Iohara et Bernhard Keller qui m'ont fait l'honneur d'accepter de participer au jury.

Je remercie les membres et le personnel de l'Institut Camille Jordan que j'ai eu l'immense plaisir de côtoyer durant ces années. Je les remercie pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée. Grâce à leur bienveillance j'ai travaillé sereinement. J'ai été enchanté par l'atmosphère conviviale des bureaux "111a" et "105". J'ai rencontré des collègues doctorants qui sont devenus de merveilleux amis. Je remercie toutes les personnes qui, par leurs conseils, leur amitié ou leur soutien, ont contribué à faire de cette thèse une aventure joyeuse.

Enfin je remercie ma famille pour tout le bonheur qu'elle m'apporte. Mon frère Benoit qui me prodigue de précieux conseils. Lucien, Lily et Marie qui me motivent chaque jour.



## Introduction

Les fibres de Springer sont les fibres de la résolution de singularités du cône nilpotent de l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique semi-simple, introduite par T.A. Springer (cf. [23]). En s'appuyant sur cette construction, Springer a obtenu une réalisation géométrique des représentations complexes des groupes de Weyl de tous types (voir [25] ou [24]). Cela a constitué une surprise car jusqu'alors seule une description combinatoire était connue. La construction de Springer a été interprétée de différentes manières par D. Kazhdan, G. Lusztig ([9] ou [12]), W. Borho et R. MacPherson ([2]).

Les fibres de Springer sont des variétés algébriques projectives, connexes. Cependant elles sont réductibles et singulières. Elles semblent receler des données décisives. Ainsi Kazhdan et Lusztig ont conjecturé que la structure des représentations des algèbres de Hecke et la géométrie des composantes des fibres de Springer sont étroitement liées (cf [8], §6.3).

Cependant la géométrie des fibres de Springer reste globalement mal comprise, même pour le type A (cas que nous nous limiterons à considérer dans cette thèse). Ainsi, les couples de composantes irréductibles qui se rencontrent en codimension 1 jouent un grand rôle dans la conjecture de Kazhdan et Lusztig, mais ils ne sont pas connus en général. La description des composantes irréductibles non-singulières est un autre problème ouvert.

La combinatoire des diagrammes de Young apparaît naturellement dans la théorie des fibres de Springer de type A, comme l'ont souligné R. Steinberg [27], N. Spaltenstein [22] et M. van Leeuwen [28].

N. Shimomura a montré qu'un rôle est joué par les numérotations des diagrammes de Young qui sont croissantes suivant les lignes (cf. [19]).

Notre but est d'illustrer l'importance du rôle joué par ces tableaux "lignes-croissants" au travers de l'étude de trois thèmes principaux : la recherche de décompositions en cellules des fibres de Springer, l'étude des composantes irréductibles et de leurs intersections, la recherche de critères de singularité pour les composantes.

### I. FIBRES DE SPRINGER DE TYPE A. REPRÉSENTATIONS DE SPRINGER

#### I.1. *Résolution de Springer. Définition des fibres de Springer*

On fixe un corps  $k$  algébriquement clos. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 0$  sur le corps  $k$ . Soit  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V)$  l'ensemble des drapeaux complets sur  $V$ , i.e. des suites de sous-espaces  $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$  vérifiant  $\dim V_i = i$  pour tout  $i$ . L'ensemble  $\mathcal{B}$  a une structure de variété algébrique projective lisse, pour laquelle il est isomorphe au quotient du groupe  $GL(V)$  par un sous-groupe de Borel. On appelle  $\mathcal{B}$  la variété drapeau du groupe  $GL(V)$ .

Soit  $\mathcal{N} \subset \text{End}(V)$  le cône des endomorphismes nilpotents. L'ensemble  $\mathcal{N}$  hérite de la structure d'espace vectoriel de  $\text{End}(V)$  une structure de variété algébrique singulière. Dans [23], Springer a construit une application  $R_S : T^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$  qui est une résolution de singularités de  $\mathcal{N}$ . Pour  $u : V \rightarrow V$  un endomorphisme nilpotent, notons  $\mathcal{B}_u$  l'ensemble des drapeaux complets  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$  vérifiant  $u(V_i) \subset V_i$  pour tout  $i$ . La projection naturelle  $T^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  induit un isomorphisme  $R_S^{-1}(u) \cong \mathcal{B}_u$ . C'est pourquoi la variété  $\mathcal{B}_u$  est appelée *fibre de Springer*.

Dans le chapitre 3, nous détaillerons la définition de l'application  $R_S$  et montrerons qu'en effet la fibre de  $R_S$  au dessus de  $u$  s'identifie à l'ensemble  $\mathcal{B}_u$ .

### I.2. Lien entre la géométrie de $\mathcal{B}_u$ et la combinatoire des diagrammes de Young

Ce paragraphe sera plus abondamment développé dans le chapitre 4 prochain. Rappelons qu'un *diagramme de Young* est la donnée d'un ensemble de cases réparties suivant des lignes justifiées à gauche et dont la longueur décroît. Par exemple :

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

est un diagramme de Young à 7 cases. Si  $Y$  est un diagramme de Young à  $n$  cases, un *tableau standard de forme  $Y$*  est une numérotation des cases de  $Y$  de 1 à  $n$  telle que les lignes et colonnes sont croissantes (respectivement de gauche à droite et de haut en bas). On note  $\mathcal{T}(Y)$  l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y$ . On appellera *tableau lignes-standard de forme  $Y$*  une numérotation des cases de  $Y$  de 1 à  $n$  telle que les lignes sont croissantes. Soit  $\mathcal{T}'(Y)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y$ . Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, on note  $\mathcal{T}'(T)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y$  contenant les mêmes numéros que  $T$  dans chaque colonne.

À un endomorphisme nilpotent  $u : V \rightarrow V$ , on associe un diagramme de Young à  $n$  cases. Soient  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$  les tailles des blocs de Jordan de  $u$ . On note  $Y(u)$  le diagramme de Young de lignes de longueurs  $m_1, m_2, \dots, m_r$ .

Les composantes irréductibles de la variété  $\mathcal{B}_u$  sont paramétrées par les tableaux standards de forme  $Y(u)$ . Il y a en effet une manière naturelle d'associer un tableau standard à un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Les restrictions de  $u$  aux espaces du drapeau induisent une suite croissante de diagrammes

$$\emptyset = Y(u|_{V_0}) \subset Y(u|_{V_1}) \subset \dots \subset Y(u|_{V_n}) = Y(u).$$

On numérote les cases de  $Y(u)$  de 1 à  $n$  en associant l'indice  $i$  à l'unique case de  $Y(u|_{V_i}) - Y(u|_{V_{i-1}})$ . En numérotant les cases de cette manière on construit un tableau standard  $T(\mathcal{F})$ . Pour  $T \in \mathcal{T}(Y(u))$  standard, on pose alors

$$\mathcal{B}_u^T = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u : T = T(\mathcal{F})\}.$$

Ainsi les ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  forment une partition de  $\mathcal{B}_u$ . Comme l'ont montré N. Spaltenstein et R. Steinberg, ces ensembles sont localement fermés, irréductibles, non-singuliers, et de même dimension, de sorte que les fermetures des ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  sont exactement les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$  (cf. [22] ou [27]).

Fixons une base de Jordan de  $u$ . Cette base peut être indexée sur l'ensemble des cases de  $Y(u)$  de telle sorte que l'action de  $u$  sur la base corresponde à l'opération consistant à envoyer une case sur sa voisine à gauche, les cases de la première colonne de  $Y(u)$  correspondant aux vecteurs du noyau de  $u$ . Soit  $T'$  un tableau lignes-standard de forme  $Y(u)$ . Notons  $e[i]$  le vecteur de la base de Jordan qui correspond à la case de  $Y(u)$  qui porte le numéro  $i$  dans  $T'$ . Comme les lignes du tableau  $T'$  sont croissantes, on obtient  $u(e[i]) \in \{0, e[1], \dots, e[i-1]\}$  pour tout  $i$ . Ainsi le drapeau  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$  défini par

$$V_i = \langle e[1], \dots, e[i] \rangle \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$$

est un élément de  $\mathcal{B}_u$

Soit  $H \subset GL(V)$  le tore maximal des automorphismes diagonaux dans la base de Jordan fixée. Le tore  $H$  agit sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$ . Les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  sont exactement les drapeaux de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  qui sont fixés par  $H$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(Y(u))$  standard. Les drapeaux de l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  qui sont fixés par  $H$  sont les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  pour  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ .

### I.3. Représentations de Springer

Supposons  $k = \mathbb{C}$ . Springer a construit des représentations complexes du groupe  $\Sigma_n$  sur les espaces de cohomologie  $H^l(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$  (cf. [25]).

Rappelons que les représentations irréductibles du groupe symétriques  $\Sigma_n$  sur le corps  $\mathbb{C}$  sont paramétrées par les diagrammes de Young à  $n$  cases. Si  $Y$  est un diagramme de Young à  $n$  cases, on note  $M(Y)$  la représentation irréductible associée à  $Y$ .

On pose  $N = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$ . On a l'isomorphisme suivant, plus connu sous le nom de *correspondance de Springer* :

$$H^{2N}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q}) \cong M(Y(u)).$$

Les caractères des représentations de Springer ont été déterminés par Lusztig [12]. Plus explicitement Lusztig a relié les multiplicités des facteurs irréductibles de  $H^l(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$  aux coefficients des polynômes de Kostka-Foulkes (cf. [13]). Comme les caractères irréductibles du groupe symétrique sont connus, cela permet de déduire le caractère de la représentation de  $\Sigma_n$  sur  $H^l(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$ . En particulier cela permet de calculer les nombres de Betti  $b_l = \dim H^l(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$ .

Notre but, tout d'abord, est de calculer ces nombres de Betti de manière plus directe, à l'aide d'une décomposition en cellules de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .

*Notations.* On suppose désormais fixés un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n \geq 0$  sur  $k$  et un endomorphisme nilpotent  $u : V \rightarrow V$ . À l'occasion des calculs de nombres de Betti, on supposera  $k = \mathbb{C}$ . On pose  $Y = Y(u)$ .

## II. DÉCOMPOSITIONS CELLULAIRES DES FIBRES DE SPRINGER

Soit  $X$  une variété algébrique. Une *décomposition cellulaire filtrante* de  $X$  est la donnée d'une suite finie de fermés imbriqués

$$\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_r = X$$

telle que chaque sous-ensemble  $Z_p = X_p - X_{p-1}$  ( $p \in \{1, \dots, r\}$ ) est isomorphe comme variété à un espace vectoriel. Si  $X$  est une variété projective sur  $\mathbb{C}$ , la donnée d'une décomposition cellulaire filtrante  $X = \bigsqcup_{p=1}^r Z_p$  permet un calcul des nombres de Betti de  $X$  : en effet le nombre de Betti  $\dim H^l(X, \mathbb{Q})$  ( $l \geq 0$ ) s'obtient comme le cardinal de l'ensemble  $\{p : 2 \cdot \dim Z_p = l\}$ .

Considérons le problème de construire une décomposition cellulaire filtrante de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  possédant les deux propriétés suivantes :

- (1) Chaque cellule contient un unique point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  (avec  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ).
- (2) Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  est réunion de cellules. La cellule contenant le point fixe  $\mathcal{F}_T$  est un ouvert de  $\mathcal{B}_u^T$ .

N. Shimomura [19] a construit une décomposition en cellules possédant ces deux propriétés. Le principe de la construction est le suivant. Rappelons que la variété drapeau  $\mathcal{B}$  admet une décomposition cellulaire filtrante, dont les cellules sont les *cellules de Schubert*. La décomposition de  $\mathcal{B}$  en cellules de Schubert dépend du choix d'un sous-groupe de Borel  $B = GL(V)$ . Alors les cellules de Schubert sont les orbites de  $\mathcal{B}$  pour l'action naturelle de  $B$ . Chaque cellule de Schubert contient un unique drapeau fixé par le tore maximal de  $B$ . Shimomura a montré que, pour un sous-groupe de Borel  $B \subset GL(V)$  bien choisi, les intersections des cellules de Schubert avec la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  forment une décomposition cellulaire de cette dernière qui possède les propriétés (1) et (2). Néanmoins la dimension des cellules est donnée par une formule relativement compliquée, cela rend le calcul des nombres de Betti de  $\mathcal{B}_u$  difficile à mettre en pratique.

Nous noterons  $S_u(T')$  l'unique cellule contenant le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  ( $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) pour la construction de Shimomura.

Dans le chapitre 8, nous définissons une notion d'inversion sur un tableau lignes-standard. Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . On appelle *inversion* un couple  $(i, j)$  de numéros d'une même colonne de  $T'$  vérifiant  $i < j$  et une des deux propriétés suivantes :

- Le numéro  $i$  n'a pas de numéro voisin à sa droite dans  $T'$  et est situé en dessous de  $j$ .
- Les numéros  $i, j$  ont des voisins à droite respectifs  $i', j'$  dans  $T'$  et  $i' > j'$ .

Par exemple  $(1, 2)$  est une inversion dans les trois tableaux suivants. Le couple  $(3, 4)$  est une inversion dans le troisième tableau.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Les tableaux lignes-standards de nombre d'inversion nul sont exactement les tableaux standards.



Dans le chapitre 9, nous construisons une décomposition cellulaire filtrante de  $\mathcal{B}_u$  qui possède les propriétés (1) et (2), et telle que la codimension de l'unique cellule contenant le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  ( $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) est égale au nombre d'inversions de  $T'$ . Les cellules sont construites par récurrence, en utilisant la trivialité locale du morphisme

$$\mathcal{B}_u^T \rightarrow \mathcal{H}_u^T, \quad (V_0, \dots, V_n) \mapsto V_{n-1}$$

où  $\mathcal{H}_u^T$  est un ensemble d'hyperplans approprié.

Le nombre d'inversions s'interprète comme une longueur de Bruhat généralisée, cela permet un calcul pratique des nombres de Betti de  $\mathcal{B}_u$  (cf. chapitre 11). Notons qu'il pourrait être intéressant, dans le but de donner une expression combinatoire aux représentations de Springer, de chercher à généraliser la construction des modules de Specht en munissant l'espace vectoriel engendré par les tableaux lignes-standards de même nombre d'inversions d'une structure de  $\mathbb{C}\Sigma_n$ -module.

Il s'avère en revanche peu pratique d'étudier les fermetures des cellules de notre décomposition, ou leurs intersections avec les composantes de  $\mathcal{B}_u$ . Les cellules  $S_u(T')$  de la décomposition de Shimomura sont plus intéressantes de ce point de vue, comme nous le verrons ensuite.

### III. ÉTUDE DES COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES DES FIBRES DE SPRINGER

Un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  définit une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  obtenue comme l'adhérence de l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$ . La méthode que nous suggérons pour étudier la composante  $K^T$  consiste à déterminer tout d'abord les points fixes du tore que cette composante contient, puis à travailler localement au voisinage de ces points fixes : Supposons  $\mathcal{F}_{T'} \in K^T$ . On étudie alors l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  (mais ce calcul est fastidieux en général) ou bien on considère les courbes projectives arrivant en  $\mathcal{F}_{T'}$  ou émanant de  $\mathcal{F}_{T'}$  qui proviennent de l'action d'un sous-groupe à un paramètre de l'ensemble des automorphismes qui laissent stable  $\mathcal{B}_u$ . Dans certains cas ces courbes sont très abondantes. Par exemple, si le diagramme  $Y(u)$  est de forme rectangulaire ou a deux colonnes, on montre que tous les points fixes sont reliés entre eux (cf. §5.4.3).

Nous expérimentons cette méthode dans trois cas : lorsque le diagramme  $Y = Y(u)$  est de type "crochet" (toutes les lignes ont longueur 1, sauf une) ou a deux lignes ou bien deux colonnes. Dans ces trois cas les composantes de  $\mathcal{B}_u$  sont déjà relativement bien comprises : Le cas crochet a été élucidé par J.A. Vargas [29], le cas deux-colonnes a été traité par N.G.J. Pagnon et A. Melnikov [16]. Dans le cas deux-lignes, F. Fung [5] a décrit les composantes et déterminé les nombres de Betti d'une intersection de deux composantes, en établissant un lien avec la théorie de Kazhdan-Lusztig. Notre méthode permet une description alternative.

Supposons désormais le diagramme  $Y$  de type crochet, deux-lignes ou deux-colonnes.

### III.1. Points fixes du tore dans les composantes des fibres de Springer

La première étape de notre étude consiste à obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  (pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) soit contenu dans la composante  $K^T$  et à exprimer ce critère sous la forme d'une propriété combinatoire que le couple de tableaux  $(T, T')$  doit vérifier. Nous proposons les deux caractérisations suivantes.

(A) Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Pour  $0 \leq i < j \leq n$  l'endomorphisme quotient  $u|_{V_j/V_i} \in \text{End}(V_j/V_i)$  peut être considéré. On montre que l'application  $Y_{j/i} : \mathcal{F} \mapsto Y(u|_{V_j/V_i})$  est semi-continue inférieurement, où l'ensemble des diagrammes de Young est muni de la relation de dominance  $\preceq$ . On pose  $Y_{j/i}(T') = Y_{j/i}(\mathcal{F}_{T'})$ . Si  $\mathcal{F}$  est un point générique de la composante  $K^T$ , on pose  $Y_{j/i}^T = Y_{j/i}(\mathcal{F})$ . Le diagramme  $Y_{j/i}(T')$  se déduit aisément de  $T'$ . Le diagramme  $Y_{j/i}^T$  a été déterminé par M. van Leeuwen (cf. [28]). Si le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ , alors on a la relation  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j$ . L'implication inverse n'est pas vraie en général, mais nous montrons qu'elle est vraie lorsque le diagramme  $Y$  est de type crochet, deux-lignes ou deux-colonnes.

(B) Un critère plus pratique repose sur une notion que nous appelons  $T$ -constructibilité. On définit un algorithme qui vise à construire le tableau lignes-standard  $T'$  en insérant successivement les numéros  $1, 2, \dots, n$  dans un tableau initialement vide, en suivant certaines règles imposées par  $T$ . L'algorithme peut réussir ou échouer, s'il réussit on dit que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible. On montre ensuite que les points fixes du tore contenus dans la composante  $K^T$  sont exactement les points fixes associés aux tableaux lignes-standards  $T$ -constructibles.

Comme nous l'avons dit, le critère (A) ne donne pas une condition suffisante en général. Le critère (B) suggère en revanche que les points fixes de  $K^T$  puissent correspondre à une classe de tableaux lignes-standards  $T$ -constructibles. Cependant la notion générale de  $T$ -constructibilité paraît plus difficile à formaliser, l'algorithme général de  $T$ -construction pouvant fort bien être non-déterministe.

Il peut être intéressant de se limiter dans un premier temps à considérer les points fixes du tore associés aux tableaux standards : un tableau standard  $S \in \mathcal{T}(Y)$  est a fortiori lignes-standard, donc définit un drapeau  $\mathcal{F}_S \in \mathcal{B}_u$ . Un rôle prépondérant semble joué par ces "points fixes standards" (cf. corollaire 5.4.2 ou proposition 5.4.5). Nous n'avons pas trouvé de tableau standard qui mette en défaut le critère (A). D'autre part la notion de  $T$ -constructibilité relative aux tableaux standards semble plus facile à définir.

### III.2. Description des composantes dans les cas crochet et deux-lignes

Dans [11], P. Lorist étudie les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$ , dans le cas où le diagramme  $Y(u)$  a deux lignes de longueurs respectives  $m_1 \geq 2$  et  $m_2 = 2$ . Sa méthode, fort simple mais a priori fastidieuse, consiste à calculer les intersections des composantes de  $\mathcal{B}_u$  avec les cellules de Schubert de la variété drapeau. Nous raisonnons de manière similaire, mais dans le cas plus général où  $Y(u)$  est un diagramme quelconque à deux lignes. Au voisinage de chaque point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$

contenu dans  $K^T$ , en nous appuyant sur l'algorithme de  $T$ -construction de  $T'$ , nous construisons un voisinage ouvert  $\mathcal{W}(T, T') \subset K^T$  isomorphe comme variété à un espace vectoriel et tel que l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  s'obtient comme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{W}(T, T')$ . Le calcul de l'intersection de la cellule  $S_u(T')$  avec un nombre fini de composantes de  $\mathcal{B}_u$  est possible lorsque  $T'$  est un tableau standard. Cela suffit pour calculer la dimension d'une intersection de composantes.

Nous traitons le cas où  $Y(u)$  est de type crochet selon la même méthode. Le cas crochet est d'autre part bien moins complexe.

### III.3. Description des composantes dans le cas deux-colonnes

On note  $Z(u) \subset GL(V)$  le sous-groupe des automorphismes qui commutent avec  $u$ . Le groupe  $Z(u)$  agit sur la variété  $\mathcal{B}_u$  et laisse stable ses composantes. Chaque composante est donc réunion de  $Z(u)$ -orbites. Dans le cas où le diagramme  $Y(u)$  a deux colonnes, nous montrons que toute  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{B}_u$  contient un point fixe du tore. Ce résultat est similaire au résultat d'A. Melnikov selon lequel les variétés orbitales de type deux-colonnes sont réunions finies de  $B$ -orbites (cf. [14]). En utilisant la caractérisation des points fixes des composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$  évoquée ci-dessus, nous en déduisons une description des composantes et la dimension d'une intersection finie de composantes.

## IV. QUESTIONS DE SINGULARITÉ

Dans le cas où le diagramme  $Y(u)$  est de type crochet ou deux-lignes, toutes les composantes de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  sont non-singulières (cf. [5]). La première composante singulière connue est la composante  $K^T$  associée au tableau

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}$$

(cf. [22]). Certains critères de non-singularité ont été établis (cf. [17]) mais en général on ne sait pas décider de la singularité d'une composante de  $\mathcal{B}_u$ .

Nous établissons un critère de singularité dans le cas où le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. On introduit alors un sous-ensemble  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}'(Y)$  tel que la singularité de la composante  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  est liée au nombre de tableaux  $T$ -constructibles contenus dans l'ensemble  $\mathcal{A}$  : si ce nombre est trop grand, alors la composante  $K^T$  est singulière. Ce critère nous permet d'identifier bon nombre de composantes singulières, dont la composante liée au tableau  $T$  ci-dessus. Jusqu'alors nous n'avons pas trouvé de composante singulière qui ne satisfasse à ce critère.

## SOMMAIRE ET NOTATIONS

Notre étude comporte les cinq parties suivantes :

- Première partie.* Rappels de géométrie algébrique élémentaire. Définition des fibres de Springer.
- Deuxième partie.* Décompositions cellulaires des fibres de Springer.
- Troisième partie.* Points fixes du tore dans les composantes des fibres de Springer dans les cas crochet, deux-lignes et deux-colonnes.
- Quatrième partie.* Cellules de Schubert intersectées avec les composantes des fibres de Springer dans les cas crochet et deux-lignes.
- Cinquième partie.* Composantes irréductibles des fibres de Springer dans le cas deux-colonnes. Critère de singularité.

Les notations sont introduites au fur et à mesure. et répertoriées dans un index à la fin de cette thèse.

Posons quelques conventions : On note  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  l'ensemble des entiers positifs ou nuls. On note  $\Sigma_n$  le groupe symétrique.

Si  $Y$  est un diagramme de Young, on note en général  $r$  son nombre de lignes et  $s$  son nombre de colonnes. On note  $p \in \{1, \dots, r\}$  les numéros des lignes et  $q \in \{1, \dots, s\}$  les numéros des colonnes. On note  $m_1, \dots, m_r$  les longueurs des lignes (ainsi  $m_1 = s$ ) et  $n_1, \dots, n_s$  les hauteurs des colonnes (ainsi  $n_1 = r$ ). On note  $|Y|$  l'ensemble des cases de  $Y$  et on désigne en général par  $x, x', z \dots \in |Y|$  les cases de  $Y$ . Les drapeaux sont désignés en général par les lettres  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \dots$ . Les tableaux standards sont notés  $T, S \dots$ . Les tableaux lignes-standards sont notés  $T', T'' \dots$

*Première partie*

**Rappels de géométrie algébrique élémentaire.**

**Définition des fibres de Springer**

Outre certains rappels de géométrie algébrique et de combinatoire des diagrammes et tableaux de Young, cette première partie contient la définition des fibres de Springer.

Les cinq chapitres suivants composent cette partie.

Chapitre. 1. VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Chapitre. 2. VARIÉTÉS GRASSMANNIENNES ET VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

Chapitre. 3. DÉFINITION DES FIBRES DE SPRINGER  $\mathcal{B}_u$

Chapitre. 4. LIEN ENTRE LES DIAGRAMMES DE YOUNG  
ET LA GÉOMÉTRIE DE  $\mathcal{B}_u$

Chapitre. 5. ACTION DU SOUS-GROUPE CENTRALISATEUR DE  $u$

Le premier chapitre est une introduction succincte aux notions de base de la géométrie algébrique : variétés algébriques affines, variétés projectives, actions de groupes algébriques. Deux types de variétés projectives sont plus abondamment décrits : les variétés grassmanniennes et les variétés de drapeaux. Cela nous conduit à la définition des fibres de Springer au chapitre 3.

À partir du troisième chapitre on fixe un espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n \geq 0$  sur un corps  $k$  algébriquement clos ainsi qu'un endomorphisme nilpotent  $u : V \rightarrow V$ . La *fibre de Springer au dessus de  $u$* , notée  $\mathcal{B}_u$ , est définie comme l'ensemble des drapeaux complets stables par  $u$ . La fibre de Springer est une variété projective.

Dans le quatrième chapitre nous rappelons comment certaines propriétés géométriques des fibres de Springer sont liées à la combinatoire des diagrammes et tableaux de Young. Ainsi un diagramme de Young  $Y(u)$  est naturellement associé à  $u$  et les composantes irréductibles de la variété  $\mathcal{B}_u$  sont paramétrées par les tableaux standards de forme  $Y(u)$ .

On appellera *tableau lignes-standard de forme  $Y(u)$*  une numérotation de 1 à  $n$  des cases de  $Y(u)$  telle que les lignes soient croissantes de gauche à droite. À un tableau lignes-standard  $T'$  de forme  $Y(u)$  correspond un drapeau  $\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$  fixé par le tore des automorphismes diagonaux dans une base de Jordan de  $u$ . Les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  seront par la suite d'un grand intérêt.

La définition de ces drapeaux dépend du choix d'une base de Jordan de  $u$ . Dans le dernier chapitre de cette partie, nous décrivons l'orbite du drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  sous l'action du groupe  $Z(u)$  des automorphismes qui commutent avec  $u$  et voyons que cette orbite est indépendante de la base de Jordan choisie.

*Références bibliographiques.*

Le livre de D. Perrin [18] est une introduction efficace à la géométrie algébrique élémentaire. Les deux premières parties du livre de R. Hartshorne [6] fournissent un parfait approfondissement. Les groupes algébriques et les variétés de drapeaux sont traités dans les livres de T.A. Springer [26] et A. Borel [1].

La résolution de Springer est décrite dans [23], par P. Slodowy dans [20] ou [21], par R. Steinberg dans [27]. L'ouvrage de N. Spaltenstein [22] traite des propriétés géométriques des fibres de Springer pour tous les types. Nous nous intéressons uniquement au type A, ce cas est aussi traité par R. Steinberg [27] ou J.A. Vargas [29]. Le livre de W. Fulton [4] sera notre référence quant à la combinatoire des diagrammes et tableaux de Young.

## Chapitre 1 . VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Nous présentons les principales notions de géométrie algébrique élémentaire.  
Un corps  $k$  algébriquement clos est fixé.

### 1.1. Variétés algébriques affines

#### 1.1.1. Espace affine

Soit  $n \geq 0$  un entier naturel. L'espace affine de dimension  $n$ , que l'on note  $\mathbb{A}^n$ , est la donnée de l'ensemble  $k^n$  et de l'anneau des polynômes  $k[\mathbb{A}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$ , dit son anneau structurel. Par convention  $\mathbb{A}^0 = \{0\}$  et  $k[\mathbb{A}^0] = k$ .

Les fonctions polynomiales sur  $\mathbb{A}^n$  sont prépondérantes. Ainsi une fonction  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow k$  est dite *algébrique* si elle est polynomiale. Plus généralement une application  $\varphi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ , qui est le produit de  $m$  fonctions  $\mathbb{A}^n \rightarrow k$ , est dite algébrique si ses  $m$  facteurs sont algébriques.

Un espace vectoriel de dimension finie sur  $k$  a une structure naturelle d'espace affine.

#### 1.1.2. Topologie de Zariski

Soit  $S \subset k[\mathbb{A}^n]$ . On note  $\mathbb{X} \subset \mathbb{A}^n$  l'ensemble des zéros de  $S$  :

$$\mathbb{X}(S) = \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0 \forall f \in S\}.$$

Un sous-ensemble de la forme  $\mathbb{X}(S)$  est dit *algébrique*. Les ensembles algébriques de  $\mathbb{A}^n$  forment la famille des fermés d'une topologie sur  $\mathbb{A}^n$ . Cette topologie est appelée *topologie de Zariski*. Les applications algébriques sont continues pour la topologie de Zariski.

#### 1.1.3. Variétés algébriques affines

Si  $X \subset \mathbb{A}^n$ , on note  $\mathbb{I}(X) \subset k[\mathbb{A}^n]$  l'idéal annulateur de  $X$  :

$$\mathbb{I}(X) = \{f \in k[\mathbb{A}^n] : f(x) = 0 \forall x \in X\}.$$

Si  $I$  est un idéal d'un anneau  $A$ , on pose  $\sqrt{I} = \{f \in A : \exists r \in \mathbb{N}, f^r \in I\}$  et on appelle  $\sqrt{I}$  le radical de  $I$ . L'idéal  $I$  est dit *radical* si  $I = \sqrt{I}$ . Clairement l'idéal  $\mathbb{I}(X)$  est radical.

Soit un sous-ensemble algébrique  $X \subset \mathbb{A}^n$ . Son anneau structurel, noté  $k[X]$ , est défini par

$$k[X] = k[\mathbb{A}^n]/\mathbb{I}(X).$$

En fait  $k[X]$  est une  $k$ -algèbre réduite (i.e. l'idéal  $\{0\}$  est radical) et de type fini.

Une *variété algébrique affine* est la donnée d'un sous-ensemble algébrique  $X \subset \mathbb{A}^n$  et de son anneau structurel  $k[X]$ .

Une fonction  $f : X \subset \mathbb{A}^n \rightarrow k$  est algébrique si elle est polynomiale (restriction d'une fonction polynomiale  $\mathbb{A}^n \rightarrow k$ ). L'anneau  $k[X]$  correspond donc aux fonctions algébriques  $X \rightarrow k$ .

Soient  $X \subset \mathbb{A}^n$  et  $Y \subset \mathbb{A}^m$  deux ensembles algébriques. Une application  $\varphi : X \rightarrow Y$  est dite algébrique si elle s'obtient comme la restriction d'une application

algébrique de  $\mathbb{A}^n$  vers  $\mathbb{A}^m$ . Alors  $\varphi$  induit un morphisme d'anneaux  $\varphi^* : k[Y] \rightarrow k[X]$ .

L'application  $\varphi$  est un isomorphisme si elle est bijective et si son inverse est algébrique. On a l'équivalence suivante :

$\varphi$  est un isomorphisme  $\Leftrightarrow \varphi^*$  est un isomorphisme d'anneaux.

#### 1.1.4. Nullstellensatz de Hilbert

Soit  $X \subset \mathbb{A}^n$  et soit  $\overline{X}$  l'adhérence de  $X$ . Par définition on a :

$$\overline{X} = \mathbb{X}(\mathbb{I}(X)).$$

Le théorème de Hilbert s'énonce ainsi.

**THÉORÈME** (Nullstellensatz de Hilbert)

*Soit un idéal  $I \subset k[\mathbb{A}^n]$ . On a l'égalité :*

$$\sqrt{I} = \mathbb{I}(\mathbb{X}(I)).$$

En vertu de cette égalité les ensembles algébriques de  $\mathbb{A}^n$  correspondent aux idéaux radicaux de l'anneau  $k[\mathbb{A}^n]$ . D'autre part le foncteur qui fait correspondre à une variété affine  $X$  son anneau structural  $k[X]$  est une équivalence de catégories entre la catégorie des variétés algébriques affines et la catégories des  $k$ -algèbres de type fini réduites.

#### 1.1.5. Sous-variétés fermées d'une variété affine

Soit  $X \subset \mathbb{A}^n$  un ensemble algébrique. On appelle encore topologie de Zariski la topologie induite sur  $X$ . Une *sous-variété fermée de  $X$*  est un fermé de  $X$  pour la topologie de Zariski.

Si  $Y \subset X$  est une sous-variété fermée alors on a  $\mathbb{I}(Y) \supset \mathbb{I}(X)$ . Inversement si  $I \subset k[\mathbb{A}^n]$  est un idéal vérifiant  $I \supset \mathbb{I}(X)$ , alors  $Y = \mathbb{X}(I)$  est contenu dans  $X$  et est une sous-variété fermée de  $X$ . Ainsi les sous-variétés fermées de  $X$  correspondent aux idéaux de  $k[\mathbb{A}^n]$  qui contiennent  $\mathbb{I}(X)$  et par là-même aux idéaux de l'algèbre  $k[X]$ .

#### 1.1.6. Espace topologique noethérien

Un espace topologique  $X$  est noethérien si toute suite décroissante de fermés  $Z_0 \supset Z_1 \supset \dots$  est stationnaire. Si  $X$  est une variété algébrique affine, une telle suite de fermés équivaut à une suite croissante d'idéaux d'après ce qui précède. Comme l'anneau  $k[X]$  est noethérien, l'espace topologique  $X$  est lui-même noethérien.

#### 1.1.7. Immersion fermée

Un morphisme de variétés affines  $\varphi : X \rightarrow Y$  est une *immersion fermée* si  $\varphi(X)$  est une sous-variété fermée de  $Y$  et si  $\varphi : X \rightarrow \varphi(X)$  est un isomorphisme de variétés affines.

**PROPOSITION**

*Le morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  est une immersion fermée si et seulement si le morphisme d'anneaux  $\varphi^* : k[Y] \rightarrow k[X]$  est surjectif.*



### 1.1.8. Produit de variétés affines

On a tout d'abord l'égalité  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ .

Soient d'autre part  $X \subset \mathbb{A}^n$  et  $Y \subset \mathbb{A}^m$  deux ensembles algébriques. Le produit  $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$  est encore un ensemble algébrique, d'idéal

$$\mathbb{I}(X \times Y) = \mathbb{I}(X) \otimes k[\mathbb{A}^m] + k[\mathbb{A}^n] \otimes \mathbb{I}(Y)$$

et d'anneau structurel

$$k[X \times Y] = k[X] \otimes k[Y].$$

La catégorie des variétés algébriques affines est donc équipée d'un produit.

### 1.1.9. Ouverts principaux

Soit  $X \subset \mathbb{A}^n$  un ensemble algébrique. Soit  $f \in k[X]$  non-nul. L'ensemble

$$\mathbb{D}_X(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

est un ouvert pour la topologie de Zariski, dit *principal*. L'application

$$\mathbb{D}_X(f) \rightarrow X \times \mathbb{A}^1, x \mapsto (x, f(x)^{-1})$$

est un homéomorphisme sur son image, cette dernière est le sous-ensemble  $\{(x, t) : tf(x) = 1\} \subset X \times \mathbb{A}^1$  qui est une sous-variété fermée du produit  $X \times \mathbb{A}^1$ . De cette manière l'ouvert principal  $\mathbb{D}_X(f) \subset X$  a une structure de variété affine, d'anneau structurel :

$$k[\mathbb{D}_X(f)] = k[X]_{(f)} = k[X][t]/(tf - 1).$$

Les ouverts principaux forment une base d'ouverts de la topologie de Zariski de  $X$ .

### 1.1.10. Variétés quasi-affines

Une *variété quasi-affine* est un ouvert d'une variété affine pour la topologie de Zariski.

Pour  $I \subset k[X]$ , on note  $\mathbb{D}_X(I) = X - \mathbb{V}(I)$ . Ainsi  $\mathbb{D}_X(I)$  est une variété quasi-affine et toute variété quasi-affine est de cette forme. L'idéal  $I$  admet un système fini de générateurs  $f_1, \dots, f_s$  et on obtient :

$$\mathbb{D}_X(I) = \bigcup_{i=1}^s \mathbb{D}_X(f_i).$$

Ainsi une variété quasi-affine admet un recouvrement fini par des ouverts affines.

Soient  $U \subset X$  et  $V \subset Y$  deux variétés quasi-affines. Une application  $\varphi : U \rightarrow V$  est dite *algébrique* si elle est continue pour la topologie de Zariski et si la restriction de  $\varphi$  à tout ouvert principal  $U' \subset U \cap \varphi^{-1}(V)$  est algébrique.

## 1.2. Variétés algébriques

### 1.2.1. Variétés algébriques

Une variété algébrique s'obtient en recollant un nombre fini de variétés affines. Une *variété algébrique* est un espace topologique  $X$  admettant un recouvrement fini par des ouverts  $U_i$  ( $i \in I$ ) homéomorphes à des variétés affines  $X_i$  ( $i \in I$ ) de telle sorte que, pour  $i, j \in I$ , les deux structures de variété quasi-affine de l'intersection  $U_i \cap U_j$  (dans  $X_i$  ou dans  $X_j$ ) sont isomorphes.

D'autre part les ouverts affines forment une base de la topologie de  $X$ .

*Exemple.* Une variété affine est une variété algébrique. Une variété quasi-affine est une variété algébrique. Plus généralement un ouvert ou un fermé d'une variété algébrique est encore une variété algébrique.

### 1.2.2. Morphisme de variétés algébriques

Soient  $X, Y$  deux variétés algébriques. Soit  $\varphi : X \rightarrow Y$  une application continue. On dit que  $\varphi$  est *algébrique* si pour tout ouvert affine  $V \subset Y$  et tout ouvert affine  $U \subset \varphi^{-1}(V)$ , la restriction  $\varphi|_U : U \rightarrow V$  est algébrique.

*Immersion ouverte.*

Un morphisme  $\varphi : X \rightarrow Y$  est une *immersion ouverte* si  $\varphi(X)$  est une sous-variété ouverte de  $Y$  et si  $\varphi : X \rightarrow \varphi(X)$  est un isomorphisme de variétés.

### 1.2.3. Produit de variétés algébriques

Le produit de deux variétés algébriques a une structure naturelle de variété algébrique.

### 1.2.4. Espace topologique irréductible

Un espace topologique  $X$  est *réductible* s'il est vide ou bien s'il s'écrit comme réunion de deux fermés  $X_1, X_2$  propres et non-vides. On dit que  $X$  est *irréductible* si  $X$  n'est pas réductible.

LEMME

*On a les propriétés suivantes.*

- (a) *Un ouvert non vide d'un espace topologique irréductible est dense et irréductible.*
- (b) *Un espace topologique qui admet un ouvert dense irréductible est irréductible.*

*Composantes irréductibles.* Si  $X$  est noethérien, il s'écrit comme réunion finie d'unique fermés irréductibles  $X_1, \dots, X_m \subset X$  non imbriqués (i.e.  $X_i \subset X_j \Rightarrow i = j$ ) appelés ses *composantes irréductibles*.

Comme une variété algébrique  $X$  admet un recouvrement fini par des ouverts affines et comme une variété affine est un espace topologique noethérien, il suit qu'une variété algébrique est un espace topologique noethérien. Dès lors on peut considérer ses composantes irréductibles.

### 1.2.5. Dimension

Soit  $X$  un espace topologique noethérien. La dimension de  $X$ , notée  $\dim X$ , est la valeur maximale de  $d$  pour laquelle il existe une suite  $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_d$  de fermés de  $X$  irréductibles strictement imbriqués. Voyons quelques propriétés de la dimension.

#### PROPOSITION

*On a les propriétés suivantes.*

- (a) *On a  $\dim \mathbb{A}^n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*
- (b) *Si  $Y$  est un fermé (resp. un ouvert) de  $X$ , alors  $\dim Y \leq \dim X$ .*
- (c) *Soit  $Y_i$  ( $i \in I$ ) un recouvrement fini de  $X$  par des sous-ensembles fermés (resp. ouverts). On a l'égalité  $\dim X = \sup_{i \in I} \dim Y_i$ .*
- (d) *Si  $X$  est irréductible et  $Y \subset X$  fermé et propre, alors on a  $\dim Y < \dim X$ .*
- (e) *Si  $X$  est irréductible et  $Y \subset X$  ouvert, alors on a  $\dim Y = \dim X$ .*

### 1.2.6. Sous-ensembles localement fermés

Une partie *localement fermée* d'un espace topologique est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé. Une partie localement fermée d'une variété algébrique a une structure de sous-variété algébrique.

*Partition filtrante.* Soient  $X$  un espace topologique et  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  une partition finie en sous-ensembles localement fermés. Cette partition est dite *filtrante* si l'on peut numéroter les éléments de  $I$  en les écrivant  $i_1, \dots, i_r$  de telle sorte que  $\bigsqcup_{q=1}^p X_{i_q}$ , la réunion des  $p$  premiers sous-ensembles, soit fermée pour tout  $p \in \{0, \dots, r\}$ .

*Décomposition en cellules.* Soit  $X$  une variété algébrique. On appelle *décomposition cellulaire* de  $X$  une partition

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

où  $I$  est un ensemble fini et les  $X_i$  ( $i \in I$ ) sont des parties localement fermées isomorphes en tant que sous-variétés algébriques à des espaces affines  $\mathbb{A}^{d_i}$  ( $d_i \in \mathbb{N}$ ).

La décomposition cellulaire est dite *filtrante* si la partition de  $X$  sous-jacente est elle-même filtrante.

## 1.3. Variétés projectives

### 1.3.1. Espace projectif

Soit  $n > 0$  un entier naturel non-nul. Le groupe multiplicatif  $G_m = (k^\times, \cdot)$  agit sur la variété quasi-affine  $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$  par multiplication scalaire. L'espace projectif  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(k)$  est défini comme l'espace quotient pour cette action. Il est muni de la topologie quotient (rappelons que  $\mathbb{A}^{n+1}$  est muni de la topologie de Zariski). Il s'identifie à l'ensemble des droites vectorielles de l'espace  $k^{n+1}$ .

Soit  $(e_0, \dots, e_n)$  la base canonique de  $k^{n+1}$ . Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  on note  $U_i$  l'ensemble des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan  $W_i = \langle e_j : j \neq i \rangle$ . Le sous-ensemble  $U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$  est un ouvert dense. Une droite  $\Delta \in U_i$  admet un

unique vecteur directeur de la forme  $e_i + w_i(\Delta)$  avec  $w_i(\Delta) \in W_i$ . L'application  $w_i : U_i \rightarrow W_i \cong \mathbb{A}^n$  est un homéomorphisme par l'intermédiaire duquel l'ouvert  $U_i$  acquiert une structure de variété algébrique affine irréductible de dimension  $n$ . Par recollement de ces ouverts affines, l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(k)$  est une variété algébrique irréductible de dimension  $n$ .

Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $n + 1$  sur  $k$ , l'ensemble noté  $\mathbb{P}(V)$  des droites vectorielles de  $V$  a une structure d'espace projectif de dimension  $n$ .

### 1.3.2. Droite projective

La droite projective  $\mathbb{P}^1$  est la réunion disjointe d'un ouvert isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}^1$  et d'un point à l'infini noté  $\infty$ .

### 1.3.3. Variété projective

Une *variété projective* est une sous-variété fermée d'un espace projectif. Rappelons quelques propriétés des variétés projectives.

#### PROPOSITION

*On a les propriétés suivantes.*

- (a) *Le produit de deux variétés projectives est une variété projective.*
- (b) *Soit  $X$  une variété projective. Soient  $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{P}^1$ . Un morphisme de variétés  $\varphi : \mathbb{P}^1 - \{P_1, \dots, P_m\} \rightarrow X$  admet un prolongement  $\bar{\varphi} : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ .*

Observons par ailleurs que, pour  $k = \mathbb{C}$ , l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  a également une structure de variété analytique sur  $\mathbb{R}$  pour laquelle il est compact. Plus généralement toute variété algébrique sur  $\mathbb{C}$  a une structure de variété analytique et toute variété projective est compacte pour cette structure.

## 1.4. Cohomologie

On suppose  $k = \mathbb{C}$ . La cohomologie classique des faisceaux est considérée. Le lecteur pourra consulter la troisième partie du livre de R. Hartshorne [6] pour plus de précisions.

Pour tout  $\mathbb{Z}$ -module  $M$ , on admet juste l'existence de foncteurs de cohomologie  $H^n(\cdot, M)$  et de foncteurs de cohomologie à support compact  $H_c^n(\cdot, M)$  de la catégorie des variétés algébriques dans la catégorie des  $\mathbb{Z}$ -modules. Si  $X$  est une variété projective, on a

$$H^n(X, M) = H_c^n(X, M) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La proposition suivante est l'unique résultat dont nous aurons besoin en matière de cohomologie. Ce résultat, classique, trouve sa justification par exemple dans la section 4.6 du livre de M. Kashiwara et P. Shapira [7].

### 1.4.1. PROPOSITION

Soit  $X$  une variété algébrique sur  $k = \mathbb{C}$ . Supposons que  $X$  admet une filtration

$$X = X_r \supset X_{r-1} \supset \dots \supset X_1 \supset X_0 = \emptyset$$

par des sous-ensembles fermés  $X_i$  tels que  $X_i - X_{i-1} \cong \mathbb{A}^{d_i}$  avec  $d_i \in \mathbb{N}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Pour  $l \in \mathbb{N}$  on pose  $r_l := \#\{i \in \{1, \dots, r\} : d_i = l\}$ . Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module.

On a  $H_c^m(X, M) = 0$  pour  $m$  impair et  $H_c^{2l}(X, M) = M^{\oplus r_l}$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ .

De plus si la variété  $X$  est projective, alors on a  $H^m(X, \mathbb{Q}) = 0$  pour  $m$  pair et  $\dim_{\mathbb{Q}} H^{2l}(X, \mathbb{Q}) = r_l$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ .

## 1.5. Espace tangent et points singuliers

### 1.5.1. Espace tangent

Soit  $X$  une variété algébrique et soit  $x \in X$ . La variété  $X$  admet un voisinage ouvert affine  $Y$  contenant  $x$ . Par définition  $Y$  peut être vue comme un sous-ensemble fermé de l'espace affine  $\mathbb{A}^n$  et modulo une translation on peut supposer que  $x$  est le point de coordonnées nulles. L'espace  $\mathbb{A}^n$  a une structure naturelle d'espace vectoriel. On construit un sous-espace tangent en  $x$  à la variété  $X$ . Pour cela on considère  $f_1, \dots, f_r \in k[\mathbb{A}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$  des générateurs de l'idéal  $I(Y)$ . L'espace tangent  $T_x X$  s'identifie alors au sous-espace vectoriel de  $\mathbb{A}^n$  des  $n$ -uplets  $(h_1, \dots, h_n)$  satisfaisant aux équations

$$\sum_{q=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_q}(0, \dots, 0) \cdot h_q = 0.$$

L'espace vectoriel  $T_x X$  ainsi défini ne dépend pas essentiellement des choix arbitraires qui ont été faits durant la construction.

Pour  $x \in X$ , on note  $\dim_x X$  le maximum des dimensions des composantes irréductibles de  $X$  contenant  $x$ . On a :

### PROPOSITION

Les propriétés suivantes sont satisfaites.

- (a) On a  $\dim_x X \leq \dim T_x X$ .
- (b) La fonction  $x \mapsto \dim T_x X$  est semi-continue supérieurement.

### 1.5.2. Points singuliers et non-singuliers

Un point  $x \in X$  est dit *singulier* si on a  $\dim_x X < \dim T_x X$ . Une variété qui contient un point singulier est *singulière*.

Un point  $x \in X$  est dit *non-singulier* si on a l'égalité  $\dim_x X = \dim T_x X$ . Les points non-singuliers forment un ouvert dense de  $X$ . Une variété est dite *non-singulière* (ou *lisse*) si tous ses points sont non-singuliers.

*Fait.* Un point contenu dans au moins deux composantes irréductibles de  $X$  est singulier.

## 1.6. Groupes algébriques

### 1.6.1. Définition

Un groupe algébrique (affine)  $G$  est une variété algébrique affine munie d'une structure de groupe telle que la multiplication  $G \times G \rightarrow G$  et l'inversion  $G \rightarrow G$  soient des morphismes de variétés algébriques.

Par exemple le groupe linéaire  $GL_n(k)$  est un groupe algébrique irréductible de dimension  $n^2$ .

Dans le cas des groupes algébriques, les notions de connexité et d'irréductibilité sont confondues :

#### LEMME

*Un groupe algébrique est connexe si et seulement s'il est irréductible.*

### 1.6.2. Action d'un groupe algébrique

Soit  $G$  un groupe algébrique. Soit  $X$  une variété algébrique. Une action de  $G$  sur  $X$  est dite *algébrique* si l'application  $G \times X \rightarrow X$  correspondante est algébrique.

#### PROPOSITION

*Soit  $G$  un groupe algébrique connexe. Soit  $X$  une variété algébrique.*

- (a) *Le groupe  $G$  laisse stable les composantes irréductibles de  $X$ .*
- (b) *Les orbites de l'action de  $G$  sur  $X$  sont localement fermées. Soit  $x \in X$ . Soit  $G.x$  l'orbite de  $x$  sous l'action de  $G$ . Son adhérence  $\overline{G.x}$  est réunion de  $G.x$  et d'orbites de dimension strictement plus petite.*
- (c) *Si l'action de  $G$  sur  $X$  est homogène (i.e. une seule orbite), alors la variété  $X$  est irréductible et non-singulière.*
- (d) *Soit  $x \in X$ . On a l'égalité*

$$\dim G.x = \dim G - \dim \text{Stab}_G(x)$$

où  $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G : g.x = x\}$  est le sous-groupe stabilisateur de  $x$ .

### 1.6.3. Tores, sous-groupes de Borel et sous-groupes paraboliques

Fixons  $G$  un groupe algébrique connexe.

Rappelons que  $G_m$  désigne le groupe multiplicatif  $(k^\times, \cdot)$ . Un *tore*  $H$  est un groupe algébrique isomorphe au produit  $G_m^r$ . Alors  $r$  est le rang de  $H$ . Un tore de  $G$  est un sous-groupe fermé isomorphe à  $G_m^r$ . Les tores maximaux de  $G$  ont tous même rang (dit *rang de  $G$* ) et sont conjugués.

Par exemple le sous-groupe  $H_n \subset GL_n(k)$  des matrices diagonales est un tore maximal.

Un *sous-groupe de Borel* est un sous-groupe  $B \subset G$  fermé, résoluble, maximal.

Par exemple le sous-groupe  $B_n \subset GL_n(k)$  des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe de Borel.

Tout sous-groupe qui est conjugué à un sous-groupe de Borel est un sous-groupe de Borel. Inversement tous les sous-groupes de Borel de  $G$  sont conjugués.

Un sous-groupe  $P \subset G$  est dit *parabolique* s'il contient un sous-groupe de Borel.

## PROPOSITION

Soit  $G$  un groupe algébrique connexe agissant de façon homogène sur une variété projective  $X$ . Soit  $x \in X$ . Le sous-groupe formé par éléments  $g \in G$  qui fixent  $x$  est un sous-groupe parabolique.

## 1.6.4. Action d'un groupe à un paramètre. Théorème de Bialynicki-Birula

Rappelons que  $G_m$  désigne le groupe multiplicatif. Notons  $G_a = (k, +)$  le groupe additif. On appelle *groupe à un paramètre* un groupe algébrique isomorphe à  $G_m$  ou  $G_a$ .

Soit  $H = (h_t)_t$  un groupe à un paramètre agissant sur une variété projective  $X$ . Soit  $x \in X$ . Si le morphisme de variétés  $H \rightarrow X, h \mapsto h.x$  admet un prolongement  $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ , alors ce dernier est unique. La courbe projective alors obtenue prolonge la courbe  $(h_t.x)_t$  par l'ajout, en particulier, d'un point à l'infini noté  $\lim_{t \rightarrow \infty} h_t.x$ . Ce dernier est nécessairement fixé par le groupe  $H$ .

Notons  $X^H$  l'ensemble des points fixes de l'action de  $H$  sur  $X$ . Supposons l'ensemble  $X^H$  fini. Pour  $y \in X^H$ , on note

$$X(y) = \{x \in X : \lim_{t \rightarrow \infty} h_t.x = y\}.$$

L'ensemble  $X(y)$  est localement fermé dans  $X$ .

Soit  $x \in X(y)$ . Observons que l'application  $z \mapsto \dim T_z X$  est constante sur la courbe  $(h_t.x)_t$ . Il résulte :

$$\dim T_x X \leq \dim T_y X \quad \forall x \in X(y).$$

Le théorème de Bialynicki-Birula s'énonce ainsi (n.b. une variété quasi-projective est un ouvert d'une variété projective) :

## THÉORÈME (Bialynicki-Birula, cf. [3])

Supposons la variété  $X$  irréductible et quasi-projective. Soit  $y$  un point non-singulier de  $X$  et isolé dans  $X^H$ . L'ensemble  $X(y)$  est isomorphe à un espace affine.

*Action d'un groupe à un paramètre sur une variété projective.* Supposons que la variété  $X$  est projective. D'après la proposition 1.3.3, les ensembles  $X(y)$  ( $y \in X^H$ ) forment une partition de  $X$  en sous-ensembles localement fermés.

Si de plus la variété  $X$  est non-singulière et l'ensemble  $X^H$  fini, alors cette partition est une décomposition cellulaire de  $X$ .

## Chapitre 2. VARIÉTÉS GRASSMANNIENNES ET VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

Dorénavant est fixé un  $k$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie  $n \geq 0$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ . Notons  $G = GL(V) \cong GL_n(k)$ .

### 2.1. Variétés grassmanniennes

Soit  $l \in \{0, \dots, n\}$ . On note  $\text{Grass}_l(V)$  l'ensemble des sous-espaces  $W \subset V$  de dimension  $l$ . Soit  $W \in \text{Grass}_l(V)$ . Le produit extérieur  $\wedge^l W$  est une droite vectorielle, sous-espace de  $\wedge^l V$ . Ainsi on définit une application :

$$\Phi_l : \text{Grass}_l(V) \rightarrow P(\wedge^l V).$$

#### 2.1.1. PROPOSITION

*L'application  $\Phi_l$  est injective et son image est fermée dans l'espace projectif  $P(\wedge^l V)$ .*

Via l'application  $\Phi_l$ , l'ensemble  $\text{Grass}_l(V)$  est une variété projective, appelée *variété grassmannienne*.

#### 2.1.2. Ouverts affines

Soit  $I \subset \{1, \dots, n\}$  une partie à  $l$  éléments. On a  $V = W_I \oplus W'_I$  avec  $W_I = \langle e_i : i \in I \rangle$  et  $W'_I = \langle e_i : i \notin I \rangle$ . On pose

$$\Omega_I = \{W \in \text{Grass}_l(V) : W \cap W'_I = 0\}.$$

L'ensemble  $\Omega_I$  est un ouvert de la variété  $\text{Grass}_l(V)$ . Les ouverts  $\Omega_I$  recouvrent  $\text{Grass}_l(V)$ .

Soit  $p : V \rightarrow W_I$  la projection parallèlement à  $W'_I$ . Pour  $W \in \Omega_I$ , la restriction de  $p$  à  $W$  est un isomorphisme sur  $W_I$ . C'est pourquoi il existe d'unique scalaires  $\zeta_{i,j}(W)$  ( $i \in I, j \in \{1, \dots, n\} - I$ ) tels que les vecteurs

$$\varepsilon_i(W) = e_i + \sum_{j \notin I} \zeta_{i,j}(W) e_j$$

forment une base de  $W$ . Les fonctions coordonnées  $\zeta_{i,j}$  ainsi définies sont algébriques sur l'ouvert  $\Omega_I$  et l'application

$$\Omega_I \rightarrow \mathbb{A}^{(n-l)l}, \quad W \mapsto (\zeta_{i,j}(W))_{(i,j)}$$

est un isomorphisme de variétés.



### 2.1.3. PROPOSITION

Les propriétés suivantes sont satisfaites.

(a) L'action naturelle du groupe  $G$  sur la variété grassmannienne  $\text{Grass}_l(V)$  est algébrique.

(b) Soient  $l, l' \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $l < l'$ . Notons

$$\text{Drap}_{l,l'}(V) = \{(W, W') \in \text{Grass}_l(V) \times \text{Grass}_{l'}(V) : W \subset W'\}.$$

L'ensemble  $\text{Drap}_{l,l'}(V)$  est fermé dans le produit  $\text{Grass}_l(V) \times \text{Grass}_{l'}(V)$ .

## 2.2. Variétés de drapeaux

La propriété (c) précédente se généralise : soient  $l_1, \dots, l_s \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $l_1 < \dots < l_s$ . Notons

$$\text{Drap}_{l_1, \dots, l_s}(V) = \{(W_1, \dots, W_s) \in \text{Grass}_{l_1}(V) \times \dots \times \text{Grass}_{l_s}(V) : W_1 \subset \dots \subset W_s\}.$$

L'ensemble  $\text{Drap}_{l_1, \dots, l_s}(V)$  est fermé dans le produit  $\text{Grass}_{l_1}(V) \times \dots \times \text{Grass}_{l_s}(V)$  donc est une variété projective. Ses éléments sont appelés  $(l_1, \dots, l_s)$ -drapeaux, ou plus simplement *drapeaux*.

### 2.2.1. Action de $G$

L'action naturelle de  $G = GL(V)$  sur la variété  $\text{Drap}_{l_1, \dots, l_s}(V)$  est algébrique et homogène.

Soit  $\mathcal{F} \in \text{Drap}_{l_1, \dots, l_s}(V)$ . On note  $P(\mathcal{F})$  le sous-groupe de  $G$  formé par les éléments qui fixent  $\mathcal{F}$ . D'après la proposition 1.6.3 le groupe  $P(\mathcal{F})$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ .

## 2.3. Drapeaux complets. Variété drapeau $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V)$

La variété  $\text{Drap}_{0, \dots, n}(V)$  est notée  $\mathcal{B}(V)$ , ou plus simplement  $\mathcal{B}$ , et est appelée *variété drapeau*. Les éléments de  $\mathcal{B}$  sont appelés *drapeaux complets*. Comme nous le verrons dans §2.3.2 ci-après, la variété  $\mathcal{B}$  s'identifie à l'ensemble des sous-groupes de Borel de  $G$ , ce qui justifie cette notation.

### 2.3.1. Base adaptée

Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$ . Une base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $V$  telle que  $V_i = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i \rangle$  pour tout  $i$  sera dite *adaptée à  $\mathcal{F}$* .

### 2.3.2. Action de $G$

a) L'action naturelle du groupe  $G = GL(V)$  sur la variété  $\mathcal{B}$  est algébrique et homogène. Fixons  $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{B}$ . L'application

$$G \rightarrow \mathcal{B}, g \mapsto g\mathcal{F}_0$$

est algébrique et surjective. Il résulte que la variété  $\mathcal{B}$  est irréductible et lisse.

b) Soit  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$ . On note  $B(\mathcal{F})$  le sous-groupe de  $G$  formé par les éléments qui fixent  $\mathcal{F}$ . Fixons  $\underline{\varepsilon}$  une base adaptée à  $\mathcal{F}$ . Alors  $B(\mathcal{F})$  est exactement le sous-groupe des automorphismes triangulaires supérieurs dans  $\underline{\varepsilon}$ . Par conséquent  $B(\mathcal{F})$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ . Inversement tout sous-groupe de Borel de  $G$

est de cette forme. Finalement on obtient que  $\mathcal{F} \mapsto B(\mathcal{F})$  est une bijection de  $\mathcal{B}$  dans l'ensemble des sous-groupes de Borel de  $G$ .

c) Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ . Par ce qui précède, il existe  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$  tel que  $B = B(\mathcal{F})$ . L'application  $G \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $g \mapsto g\mathcal{F}$  induit un isomorphisme de variétés

$$\varphi : G/B \cong \mathcal{B}.$$

d) Soit  $\mathcal{G} = (W_1 \subset \dots \subset W_s) \in \text{Drap}_{l_1, \dots, l_s}(V)$  un drapeau partiel. Soit  $P = P(\mathcal{G})$  le sous-groupe de  $G$  formé par les automorphismes qui fixent le drapeau  $\mathcal{G}$  (cf. §2.2.1). L'action du groupe  $G$  sur la variété  $\mathcal{B}$  se restreint en une action de  $P$ . Décrivons les  $P$ -orbites de  $\mathcal{B}$ . À un drapeau complet  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  on associe la matrice de taille  $(n, s)$  dont le coefficient  $(i, q)$  est donné par  $m_{i,q} = \dim V_i \cap W_q$ . Les orbites de  $P$  dans  $\mathcal{B}$  sont exactement les fibres de l'application  $\mathcal{B} \rightarrow M_{n,s}(\mathbb{Z})$  ainsi définie.

### 2.3.3. Points fixes du tore

Soit  $H \subset G$  le tore maximal formé par les automorphismes diagonaux dans la base  $(e_i)$ . Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ . Notons  $\mathcal{F}(\sigma) = (V_0, \dots, V_n)$  le drapeau complet défini par  $V_i = \langle e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_i} \rangle$ . L'élément  $\mathcal{F}(\sigma) \in \mathcal{B}$  est fixé par l'action de  $H$  sur  $\mathcal{B}$ . Inversement tout point fixe de  $H$  sur  $\mathcal{B}$  est de cette forme.

### 2.3.4. Ouverts affines

Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ . On définit  $\Omega_\sigma$  comme l'ensemble des drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$  tels que

$$V_i \not\subset V_{i-1} + \langle e_{\sigma_{i+1}}, \dots, e_{\sigma_n} \rangle, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

L'ensemble  $\Omega_\sigma$  est ouvert dans  $\mathcal{B}$ . Il contient le point fixe  $\mathcal{F}(\sigma)$ . Les ouverts  $\Omega_\sigma$  recouvrent la variété  $\mathcal{B}$ .

On note  $J = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$ . Soit  $\mathcal{F} \in \Omega_\sigma$ . Il existe d'unique scalaires  $\zeta_{i,j}(\mathcal{F})$  (pour  $(i, j) \in J$ ) tels que les vecteurs

$$\varepsilon_i(\mathcal{F}) = e_{\sigma_i} + \sum_{j=i+1}^n \zeta_{i,j}(\mathcal{F}) e_{\sigma_j}$$

forment une base adaptée à  $\mathcal{F}$ . Les fonctions coordonnées  $\zeta_{i,j}$  ainsi définies sont algébriques sur l'ouvert  $\Omega_\sigma$ . L'application

$$\Omega_\sigma \rightarrow \mathbb{A}^{n(n-1)/2}, \quad \mathcal{F} \mapsto (\zeta_{i,j})_{(i,j) \in J}$$

est un isomorphisme de variétés.

*Remarque.* L'application  $G \rightarrow \mathcal{B}$  de §2.3.2.a) est un fibré vectoriel de fibre  $B$ , qui trivialise au dessus des ouverts  $\Omega_\sigma$  ( $\sigma \in \Sigma_n$ ).

### Chapitre 3 . DÉFINITION DES FIBRES DE SPRINGER

Soit  $u : V \rightarrow V$  un endomorphisme nilpotent. On définit

$$\mathcal{B}_u = \{\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B} : u(V_i) \subset V_i\}$$

l'ensemble des drapeaux stables par  $u$ . D'après la proposition suivante  $\mathcal{B}_u$  est encore une variété projective.

#### 3.1. PROPOSITION

*L'ensemble  $\mathcal{B}_u$  est une partie fermée de la variété drapeau  $\mathcal{B}$ .*

*Démonstration.* On pose  $\tilde{u} = \text{id}_V + u$ . L'ensemble  $\mathcal{B}_u$  est l'ensemble des points fixes de l'automorphismes  $\tilde{u}$  pour son action sur  $\mathcal{B}$ , donc  $\mathcal{B}_u$  est fermé.  $\square$

#### 3.2. Résolution de Springer

La *résolution de Springer* est une résolution de singularités du cône nilpotent  $\mathcal{N} \subset \text{End}(V)$ . Nous donnons ici une simple définition. Le lecteur pourra consulter l'ouvrage de P. Slodowy [20] pour de plus amples renseignements.

On note  $G = GL(V)$ . Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  et soit  $\mathfrak{b}$  son algèbre de Lie. Il existe  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$  tel que  $B = B(\mathcal{F})$  (cf. §2.3.2). Dans §2.3.2 nous avons évoqué l'isomorphisme

$$\varphi : G/B \rightarrow \mathcal{B}, \quad gB \mapsto g\mathcal{F}.$$

Cet isomorphisme fait correspondre  $\mathcal{B}_u$  et l'ensemble

$$(G/B)_u = \{gB \in G/B : \text{Ad}(g^{-1})u \in \mathfrak{b}\}.$$

L'ensemble  $(G/B)_u$  est donc un fermé de  $G/B$ .

Soit  $\mathfrak{n}$  la partie nilpotente de  $\mathfrak{b}$ . Si on suppose de plus l'endomorphisme  $u$  nilpotent, alors on a l'égalité

$$(G/B)_u = \{gB \in G/B : \text{Ad}(g^{-1})u \in \mathfrak{n}\}.$$

Le groupe  $B$  agit sur la variété produit  $G \times \mathfrak{n}$  de la manière suivante :

$$b.(g, X) \mapsto (gb^{-1}, \text{Ad}(b)X) \quad \text{pour } (g, X) \in G \times \mathfrak{n}.$$

L'espace quotient, noté  $G \times_B \mathfrak{n}$ , est encore une variété algébrique. Le groupe  $G$  agit naturellement à gauche sur le produit  $G \times_B \mathfrak{n}$  et son action est homogène. Par conséquent la variété  $G \times_B \mathfrak{n}$  est irréductible et non-singulière.

*Remarque.* La variété  $G \times_B \mathfrak{n}$  est isomorphe au fibré cotangent  $T^*\mathcal{B}$ .

Soit  $\mathcal{N}$  le cône nilpotent de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \text{End}(V)$ . L'application

$$\psi : G \times \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{N}, \quad (g, X) \mapsto \text{Ad}(g)X$$

est constante sur les  $B$ -orbites. L'application quotient  $R_S : G \times_B \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{N}$  est une résolution des singularités de  $\mathcal{N}$  (cf. [20].§4.1) appelée *résolution de Springer*.

### 3.3. Fibres de Springer

Soit  $u \in \mathcal{N}$ . Le morphisme naturel  $G \times \mathfrak{n} \rightarrow G/B$  passe au quotient. Soit  $\pi : G \times_B \mathfrak{n} \rightarrow G/B$  le morphisme quotient. Sa restriction  $\pi|_{R_S^{-1}(u)}$  à la fibre au dessus de  $u$  est une immersion fermée d'image  $(G/B)_u$ . Le morphisme réciproque est l'application  $(G/B)_u \rightarrow G \times_B \mathfrak{n}$ ,  $gB \mapsto (g, \text{Ad}(g^{-1})u)$ .

En combinant cela avec l'isomorphisme  $(G/B)_u \cong \mathcal{B}_u$  déjà vu, on obtient finalement un isomorphisme de variétés algébriques

$$R_S^{-1}(u) \cong \mathcal{B}_u.$$

En raison de cet isomorphisme, la variété  $\mathcal{B}_u$  est appelée *fibre de Springer*.

## Chapitre 4 . LIEN ENTRE LES DIAGRAMMES DE YOUNG ET LA GÉOMÉTRIE DES FIBRES DE SPRINGER

On fixe désormais un endomorphisme nilpotent  $u : V \rightarrow V$ . Dans ce chapitre on rappelle certains aspects de la combinatoire des diagrammes de Young, puis on montre comment celle-ci intervient naturellement dans l'étude de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .

### La combinatoire des diagrammes et tableaux de Young.

#### 4.1. Diagrammes de Young

Un *diagramme de Young* est une collection de cases réparties suivant des lignes justifiées à gauche et dont la longueur décroît de haut en bas. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{Y}_n$  l'ensemble des diagrammes de Young à  $n$  cases.

*Exemple.* Soit

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

Ce diagramme appartient à l'ensemble  $\mathcal{Y}_5$ .

##### 4.1.1. Ensemble des cases $|Y|$

Pour  $Y \in \mathcal{Y}_n$ , les cases de  $Y$  forment un ensemble à  $n$  éléments, noté  $|Y|$ .

##### 4.1.2. Sous-diagramme

Soient  $Y$  et  $Y'$  deux diagrammes de Young. Soient  $m_1 \geq m_2 \geq \dots$  et  $m'_1 \geq m'_2 \geq \dots$  les longueurs des lignes de  $Y$  et  $Y'$  (éventuellement nulles). On dit que  $Y$  est un sous-diagramme de  $Y'$  et on note  $Y \subset Y'$  si on a  $m_i \leq m'_i$  pour tout  $i \geq 1$ .

*Exemple.* On a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \subset \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

##### 4.1.3. Dominance

Soient  $Y, Y' \in \mathcal{Y}_n$  deux diagrammes de même taille  $n$ . Soient  $m_1 \geq m_2 \geq \dots$  et  $m'_1 \geq m'_2 \geq \dots$  les longueurs des lignes de  $Y$  et  $Y'$  (éventuellement nulles). On écrit  $Y \preceq Y'$  si on a  $m_1 + \dots + m_i \leq m'_1 + \dots + m'_i$  pour tout  $i \geq 1$ .

*Exemple.* On a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \preceq \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

## 4.2. Tableaux standards

Soit  $Y \in \mathcal{Y}_n$ . Un *tableau standard de forme Y* est une numérotation des cases de  $Y$  de 1 à  $n$  telle que :

- chaque ligne est croissante de gauche à droite,
- chaque colonne est croissante de haut en bas.

On note  $\mathcal{T}(Y)$  l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y$ .

*Exemple.* Soit

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$$

On a  $T \in \mathcal{T}(Y)$ .

### 4.2.1. Tableaux de Young

Plus généralement un *tableau de Young de forme Y* est une numérotation des cases de  $Y$  par des entiers telle que chaque ligne soit croissante au sens large de gauche à droite et chaque colonne strictement croissante de haut en bas.

### 4.2.2. Tableau standard vu comme une suite croissante de diagrammes de Young

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$ . On note  $T_i$  le sous-tableau obtenu d'après  $T$  en retirant les numéros  $i + 1, \dots, n$ . Ce sous-tableau  $T_i$  est un tableau standard de forme un certain diagramme de Young à  $i$  cases, lequel est noté  $Y_i(T)$ . De cette manière un tableau standard  $T$  de forme  $Y$  induit une suite de diagrammes de Young  $(Y_0(T), Y_1(T), \dots, Y_n(T))$  vérifiant  $Y_i(T) \in \tilde{\mathcal{Y}}_i$ ,  $Y_n(T) = Y$  et  $Y_i(T) \subset Y_{i+1}(T)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ . Inversement une telle suite définit un tableau standard de forme  $Y$ .

### 4.2.3. Dominance

Soient  $S, T$  deux tableaux standards de même forme  $Y$ . On note  $S \preceq T$  si on a  $Y_i(S) \preceq Y_i(T)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Exemple.* On a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \prec \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$

L'ensemble  $\mathcal{T}(Y)$  des tableaux standards de forme  $Y$  contient un unique élément minimal pour l'ordre  $\preceq$ . On note ce tableau  $T_Y^{\min}$ , ou préférablement  $T^{\min}$  si le contexte est assez clair. Pour  $q \geq 0$ , notons  $\tilde{n}_q$  le nombre de cases des  $q$  premières colonnes de  $Y$  avec la convention  $\tilde{n}_0 = 0$ . Le tableau  $T^{\min}$  est alors le tableau standard de forme  $Y$  dont la  $q$ -ème colonne contient les numéros  $\tilde{n}_{q-1} + 1, \dots, \tilde{n}_q$ .

Exemple.

$$\text{Si } Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{alors on a } T^{\min} = T_Y^{\min} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 8 & 10 \\ \hline 2 & 6 & 9 & 11 \\ \hline 3 & 7 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

### 4.3. Tableaux lignes-standards

Soit  $Y \in \mathcal{Y}_n$ . On appelle *tableau lignes-standard de forme Y* une numérotation des cases de  $Y$  de 1 à  $n$  telle que :

- chaque ligne est croissante de gauche à droite.

On note  $\mathcal{T}'(Y)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y$ .

Exemple. Soient

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

On a  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

### 4.4. Rectification standard d'un tableau lignes-standard

Fixons  $Y \in \mathcal{Y}_n$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard. On remet les numéros de chaque colonne de  $T'$  dans l'ordre croissant de haut en bas. Ainsi on obtient un tableau  ${}^S T'$  de forme  $Y$  satisfaisant aux propriétés suivantes :

- Les tableaux  $T'$  et  ${}^S T'$  ont les mêmes numéros dans chaque colonne,
- chaque colonne du tableau  ${}^S T'$  est croissante de haut en bas.

On voit facilement que  ${}^S T'$  est un tableau standard de forme  $Y$ .

Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$ , on note  $\mathcal{T}'(T)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  de rectification standard  ${}^S T' = T$ .

Exemple. Soient

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Alors on a  ${}^S T' = T$ , autrement dit  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ .

### Lien avec la géométrie de la fibre de Springer $\mathcal{B}_u$ .

La combinatoire des diagrammes de Young apparaît naturellement dans l'étude de  $\mathcal{B}_u$ .

#### 4.5. Diagramme de Young $Y(u)$ associé à $u$

On associe à  $u$  un diagramme de Young  $Y(u)$  à  $n$  cases de la manière suivante. Soient  $m_1 \geq \dots \geq m_r$  les tailles des blocs de Jordan de  $u$ . On note alors  $Y(u)$  le diagramme de Young à  $r$  lignes de longueurs respectives  $m_1, \dots, m_r$ .

La dimension de la variété  $\mathcal{B}_u$  est liée à la forme du diagramme  $Y(u)$ , le montre l'énoncé suivant.

##### 4.5.1. PROPOSITION (cf. [22], §5.5)

On a

$$\dim \mathcal{B}_u = \sum_{q=1}^s \frac{n_q(n_q - 1)}{2}$$

où  $n_1, \dots, n_s$  sont les hauteurs des colonnes du diagramme  $Y(u)$ .

Pour simplifier les notations, posons  $Y = Y(u)$ .

##### 4.5.2. Base de Jordan de $u$ de forme $Y$

On a noté  $m_1 \geq \dots \geq m_r$  les tailles des blocs de Jordan de  $u$ . Rappelons qu'on appelle *base de Jordan de  $u$*  une base constituée de vecteurs  $e_1, \dots, e_r$  tels que  $e_p \in \ker u^{m_p} - \ker u^{m_p-1}$  et de leurs images itérées  $u^q(e_p)$  (pour  $0 \leq q \leq m_p - 1$ ).

Rappelons que  $m_1, \dots, m_r$  sont les longueurs des lignes du diagramme de Young  $Y = Y(u)$ . Une base de Jordan de  $u$  peut donc être paramétrée par l'ensemble des cases de  $Y$ . Ainsi on appelle *base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$*  une base  $(e_x)_{x \in |Y|}$  indexée sur  $|Y|$ , l'ensemble des cases de  $Y$ , telle que

- si  $x$  est une case de la première colonne de  $Y$ , alors on a  $u(e_x) = 0$ ,
- sinon, notant  $x'$  la case voisine à gauche de  $x$  dans  $Y$ , on a  $u(e_x) = e_{x'}$ .

On fixe  $(e_x)_{x \in |Y|}$ , une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$ .

##### 4.5.3. Points fixes du tore des automorphismes diagonaux

Soit  $H \subset GL(V)$  le tore des automorphismes de  $V$  qui sont diagonaux dans la base  $(e_x)_{x \in |Y|}$  introduite ci-dessus. L'action de  $H$  sur  $V$  induit une action sur la variété drapeau  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V)$ .

Soit  $\Sigma_{|Y|}$  l'ensemble des bijections  $\alpha : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$ . Pour  $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$  soit  $\mathcal{F}_\alpha = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$  le drapeau complet défini par

$$V_i = \langle e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_i} \rangle.$$

Alors  $\mathcal{F}_\alpha$  est un point fixe pour l'action de  $H$  sur  $\mathcal{B}$ , il est d'autre part facile de voir que tout point fixe pour l'action de  $H$  sur  $\mathcal{B}$  est de cette forme.



#### 4.6. Tableaux lignes-standards et points fixes du tore

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard. Soit  $\alpha_{T'} : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$  l'application qui envoie l'entier  $i$  sur la case de  $Y$  portant le numéro  $i$  dans le tableau  $T'$ . L'application  $T' \mapsto \alpha_{T'}$  est une inclusion  $\mathcal{T}'(Y) \hookrightarrow \Sigma_{|Y|}$ . Les drapeaux fixés par le tore  $H$  qui appartiennent à la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  sont exactement les drapeaux  $\mathcal{F}_{\alpha_{T'}}$  pour  $T'$  parcourant l'ensemble  $\mathcal{T}'(Y)$ . On note  $\mathcal{F}_{T'} = \mathcal{F}_{\alpha_{T'}}$ .

Attention! Bien qu'on puisse parler des points fixes de  $H$  contenus dans  $\mathcal{B}_u$ , l'action du tore  $H$  sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$  ne stabilise pas la sous-variété  $\mathcal{B}_u$  en général. En revanche le tore  $H$  contient un sous-tore qui agit sur  $\mathcal{B}_u$  avec les mêmes points fixes.

##### 4.6.1. Tore de rang 1 régulier

Un sous-tore de  $H$  de rang 1 est un groupe à un paramètre  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  caractérisé par des entiers  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{Z}$  tels que  $h_t(e_i) = t^{\epsilon_i} \cdot e_i$  pour tous  $i, t$ . Le sous-tore  $H' \subset H$  est dit *régulier* si son centralisateur dans  $GL(V)$  est réduit à  $H'$ . De manière équivalente  $H'$  est régulier si et seulement si les entiers  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  sont distincts deux-à-deux. Par conséquent les groupes  $H$  et  $H'$  partagent les mêmes points fixes pour leur action sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$ .

On montre :

##### 4.6.2. LEMME

*Le tore  $H$  admet un sous-tore de rang 1 régulier dont l'action naturelle sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$  stabilise la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .*

Ce résultat sera précisé ultérieurement sous la forme du lemme 7.1.4.

*Démonstration.* Pour  $b > 0$  suffisamment grand il existe des entiers deux-à-deux distincts  $(\epsilon_x)_{x \in |Y|}$  tels que : si la case  $x \in |Y|$  est voisine à gauche de la case  $x' \in |Y|$ , alors on a  $\epsilon_x = \epsilon_{x'} - b$ . Pour  $t \in k^\times$ , soit  $h_t \in GL(V)$  l'automorphisme défini sur la base par :

$$h_t(e_x) = t^{-\epsilon_x} e_x \quad \text{pour tout } x \in |Y|.$$

Soit  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  le sous-tore de  $H$  de rang 1 ainsi obtenu. Comme les entiers  $\epsilon_x$  sont choisis deux-à-deux distincts, le tore  $H'$  est régulier. Par construction, on a pour tout  $t$  :

$$h_t \cdot u \cdot h_t^{-1} = t^b \cdot u,$$

ainsi l'action de  $H'$  laisse stable la variété  $\mathcal{B}_u$ .  $\square$

#### 4.7. Une partition de la fibre de Springer $\mathcal{B}_u$ en des sous-ensembles $\mathcal{B}_u^T$ associés aux tableaux standards

D'après N. Spaltenstein [22] et R. Steinberg [27], on construit une partition de la variété  $\mathcal{B}_u$  en sous-ensembles naturellement paramétrés par les tableaux standards de forme  $Y$ .

Si  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  est un drapeau stable par  $u$ , la restriction  $u|_{V_i}$  (pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ ) reste nilpotente et son diagramme de Young  $Y(u|_{V_i})$  peut être considéré.

D'autre part un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  induit la suite croissante de diagrammes de Young  $(Y_0(T), \dots, Y_n(T))$  décrite précédemment. On note  $\mathcal{B}_u^T = \mathcal{B}_u^T(V)$  le sous-ensemble  $\mathcal{B}_u$  formé par les drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  stables par  $u$  et tels qu'on ait  $Y(u|_{V_i}) = Y_i(T)$  pour tout  $i$ .

L'énoncé suivant montre que, de cette partition de  $\mathcal{B}_u$ , il découle sur une paramétrisation des composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$  par l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y$ . Plus tard, dans le chapitre 9, nous montrerons un résultat analogue dans un contexte plus général.

#### 4.7.1. THÉORÈME (cf. [22], §5.4 et §5.5)

Soit  $Y = Y(u)$ .

- (a) Les ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  (pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$ ) sont des parties localement fermées de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ , ils sont irréductibles et non-singuliers.  
 (b) Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On a

$$\overline{\mathcal{B}_u^T} \subset \bigcup_{S \preceq T} \mathcal{B}_u^S$$

où la réunion est prise sur les tableaux  $S \in \mathcal{T}(Y)$  tels que  $S \preceq T$ .

- (c) Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. L'adhérence du sous-ensemble localement fermé  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$  est une composante irréductible de  $\mathcal{B}_u$ .  
 (d) Chaque composante irréductible de  $\mathcal{B}_u$  s'obtient de cette manière.  
 (e) On a  $\dim \mathcal{B}_u^T = \dim \mathcal{B}_u$  pour tout  $T \in \mathcal{T}(Y)$ . La variété  $\mathcal{B}_u$  est donc équidimensionnelle.

#### 4.7.2. Composante irréductible $K^T \subset \mathcal{B}_u$ .

Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard on note  $K^T$  l'adhérence du sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$ . Ainsi  $(K^T)_{T \in \mathcal{T}(Y)}$  sont exactement les composantes irréductibles de la variété  $\mathcal{B}_u$ .

#### 4.7.3. Une description des ensembles $\mathcal{B}_u^T$ au moyen de l'action d'un groupe parabolique

Les noyaux  $\ker u^q$  ( $q \geq 0$ ) forment un drapeau partiel sur  $V$ . Soit  $P \subset GL(V)$  le groupe parabolique formé par les automorphismes qui fixent ce drapeau. Le groupe  $P$  agit sur  $V$ , cette action induit une action sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$ . Décrivons maintenant les orbites sous cette action.

Soit  $s$  l'indice de nilpotence de  $u$ . À un drapeau complet  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  on associe la matrice  $(m_{i,q})$  de taille  $(n, s)$  dont le coefficient  $(i, q)$  est donné par  $m_{i,q} = \dim V_i \cap \ker u^q$ . Les orbites de  $P$  dans  $\mathcal{B}$  sont exactement les fibres de l'application  $\mathcal{B} \rightarrow M_{n,s}(\mathbb{Z})$  ainsi définie (cf 2.3.2.d)).

Soit  $M_T$  la matrice de format  $(n, s)$  dont le coefficient  $(i, q)$  est le nombre des numéros  $j$  des  $q$  premières colonnes de  $T$  vérifiant  $j \leq i$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  est l'intersection de  $\mathcal{B}_u$  avec la  $P$ -orbite attachée à la matrice  $M_T$ .

*Remarque.* Comme les  $P$ -orbites sont localement fermées dans  $\mathcal{B}$ , cela donne une preuve du fait que l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  est une partie localement fermée de  $\mathcal{B}_u$ .

#### 4.8. Points fixes du tore contenus dans le sous-ensemble localement fermé $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Il est facile de voir que les drapeaux fixés par le tore  $H$  qui sont contenus dans le sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$  sont exactement les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$ , pour  $T'$  parcourant  $\mathcal{T}'(T)$ , l'ensemble des tableaux lignes-standards dont la rectification standard est  $T$ .

## Chapitre 5 . ACTION DU SOUS-GROUPE CENTRALISATEUR DE $u$ SUR LA FIBRE DE SPRINGER $\mathcal{B}_u$

On note  $Y = Y(u)$ . Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  associés aux tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Cependant cette définition est subordonnée au choix d'une base de Jordan. Les orbites des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  sous l'action du sous-groupe centralisateur de  $u$  sont en revanche intrinsèques. Dans ce chapitre on étudie certaines propriétés de ces orbites.

### 5.1. Premières propriétés de $Z(u)$ , le sous-groupe centralisateur de $u$

On définit

$$Z(u) = \{g \in GL(V) : gug^{-1} = u\}.$$

Le groupe  $Z(u)$  possède les propriétés suivantes :

#### 5.1.1. LEMME

On a :

- (a) Le groupe  $Z(u)$  est un sous-groupe algébrique de  $GL(V)$ .
- (b) Le groupe  $Z(u)$  est connexe.
- (c) L'action naturelle de  $Z(u)$  sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$  laisse stable la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  et toutes ses composantes irréductibles.

*Démonstration.* La point (a) est clair. La propriété (b) provient du fait que  $Z(u)$  est un ouvert non vide de l'espace vectoriel

$$\mathcal{Z}(u) = \{\varphi \in \text{End}(V) : \varphi u = u\varphi\}.$$

Le point (c) découle de (b).  $\square$

L'action du groupe  $Z(u)$  sur la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  possède également la propriété suivante :

#### 5.1.2. LEMME

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Le sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$  laissé stable par l'action du groupe  $Z(u)$ .

*Démonstration.* Cela découle de §4.7.3 et du fait que tout élément de  $Z(u)$  laisse  $\mathcal{B}_u$  stable et fixe le noyau  $\ker u^q$  (pour tout  $q \geq 1$ ).  $\square$

Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Pour  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ , l'endomorphisme  $u$  induit un endomorphisme quotient

$$u|_{V_j/V_i} : V_j/V_i \rightarrow V_j/V_i.$$

Le diagramme de Young  $Y(u|_{V_j/V_i})$  de ce dernier peut alors être considéré. Observons que le lemme 5.1.2 s'obtient également et a fortiori comme conséquence du lemme suivant.

## 5.1.3. LEMME

La fonction  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \mapsto Y(u|_{V_j/V_i})$  est constante sur chaque  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{B}_u$ .

*Démonstration.* Supposons  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  et  $\mathcal{G} = (W_0, \dots, W_n)$  contenus dans la même  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{B}_u$ . Il existe  $g \in Z(u)$  tel que  $\mathcal{G} = g.\mathcal{F}$ . On pose  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$ . On a alors  $W_i = g.V_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . L'automorphisme  $g : V \rightarrow V$  induit un automorphisme quotient  $\bar{g} : V_j/V_i \rightarrow (g.V_j)/(g.V_i) = W_j/W_i$ . Les endomorphismes quotients  $u|_{(g.V_j)/(g.V_i)}$  et  $u|_{V_j/V_i}$  sont clairement conjugués sous ce dernier. Il suit :  $Y(u|_{W_j/W_i}) = Y(u|_{V_j/V_i})$ .  $\square$

La proposition suivante provient du lemme 5.1.2 et de §4.8.

## 5.1.4. PROPOSITION

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Soit  $T = {}^s T' \in \mathcal{T}(Y)$  la rectification standard de  $T'$ . La  $Z(u)$ -orbite du drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenue dans l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$ .

Dans la section prochaine, nous étudions plus en détail les  $Z(u)$ -orbites des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$ .

5.2. Orbites des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$ 

Rappelons qu'on appelle base adaptée à un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$  une base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $V$  telle que  $V_i = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i \rangle$  pour tout  $i$ .

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. Rappelons que le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  dépend du choix d'une base de Jordan  $(e_x)_{x \in |Y|}$  de forme  $Y$  (cf. §4.5.2). Le tableau  $T'$  induit alors une bijection  $\alpha_{T'} : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$  et les vecteurs  $\varepsilon_i = e_{\alpha_{T'}(i)}$  forment une base adaptée à  $\mathcal{F}_{T'}$  (cf. §4.6).

La proposition suivante montre que la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$  est indépendant du choix de la base  $(e_x)_{x \in |Y|}$ .

## 5.2.1. PROPOSITION

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Le drapeau  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u$  est contenu dans la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$  si et seulement si il existe  $(f_x)_{x \in |Y|}$  une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$  telle que les vecteurs  $\eta_i = f_{\alpha_{T'}(i)}$  forment une base adaptée à  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* Montrons l'implication  $(\Rightarrow)$ . Si  $\mathcal{F}$  s'écrit  $\mathcal{F} = g.\mathcal{F}_{T'}$  avec  $g \in Z(u)$ , alors la base  $(ge_x)_{x \in |Y|}$  est de forme  $Y$  et les vecteurs  $\eta_i = ge_{\alpha_{T'}(i)}$  forment une base adaptée à  $\mathcal{F}$ . Montrons l'implication  $(\Leftarrow)$ . L'automorphisme  $g : V \rightarrow V$ , défini par  $ge_x = f_x$  pour tout  $x$ , transforme le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  en  $\mathcal{F}$  et  $g$  appartient au groupe  $Z(u)$ .  $\square$

5.2.2. *Exemple*

Supposons

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T'' = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

À l'aide de la description précédente, on voit qu'un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_6) \in \mathcal{B}_u$  est contenu dans la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$  si et seulement si :

$$V_4 = \ker u \quad \text{et} \quad V_2 \cap \text{Im } u = 0 \quad \text{et} \quad V_3 \cap u(V_5) = 0.$$

Le drapeau  $\mathcal{F}$  figure dans la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T''}$  si et seulement si :

$$V_4 = \ker u \quad \text{et} \quad V_2 \cap \text{Im } u = 0 \quad \text{et} \quad V_3 \cap u(V_5) \neq 0.$$

5.2.3. *Remarque*

Tout drapeau ne figure pas dans la  $Z(u)$ -orbite d'un drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$ . Supposons par exemple  $Y$  de la forme

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Notons  $e'', e' = u(e''), e = u(e'), f$  des vecteurs formant une base de Jordan de  $u$ . D'après la proposition, il est clair que la  $Z(u)$ -orbite du drapeau

$$\mathcal{F} = (0 \subset \langle e \rangle \subset \langle e, e' + f \rangle \subset \langle e, e', f \rangle \subset V)$$

ne contient aucun point fixe du tore.

Voyons maintenant à quelle condition deux points fixes figurent dans une même  $Z(u)$ -orbite.

## 5.2.4. PROPOSITION

Soient  $T', T'' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  et  $\mathcal{F}_{T''}$  sont égaux modulo  $Z(u)$  si et seulement si les tableaux  $T', T''$  sont égaux à permutation des lignes près.

*Démonstration.* L'implication  $(\Leftarrow)$  résulte facilement de la proposition 5.2.1. L'implication  $(\Rightarrow)$  est conséquence du lemme 5.3.3 ultérieur.  $\square$

Étudions la relation d'égalité à permutation des lignes près dans l'ensemble  $\mathcal{T}'(Y)$ .

5.3. Égalité à permutation des lignes près dans l'ensemble  $\mathcal{T}'(Y)$ 

On écrit  $T' \sim_z T''$  si les tableaux  $T', T'' \in \mathcal{T}'(Y)$  s'obtiennent l'un d'après l'autre par permutation de lignes.

*Exemple.* Soient

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T'' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

On a  $T' \sim_z T''$ .

La relation  $\sim_z$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble  $\mathcal{T}'(Y)$ .

### 5.3.1. Ensemble $\mathcal{T}'_z(Y)$ de représentants des classes d'équivalence

Soit  $\mathcal{T}'_z(Y)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  tels que pour tout  $q \geq 1$  les derniers numéros des lignes de longueur  $q$  de  $T'$  sont dans l'ordre croissant de haut en bas. Ainsi les éléments de  $\mathcal{T}'_z(Y)$  sont des représentants des classes de tableaux pour la relation  $\sim_z$ .

*Exemple.* Dans l'exemple précédent on a  $T' \in \mathcal{T}'_z(Y)$ .

On note d'autre part  $\mathcal{T}'_z(T) \subset \mathcal{T}'_z(Y)$  le sous-ensemble formé par les tableaux  $T' \in \mathcal{T}'_z(Y)$  de rectification standard égale à  $T$ . Autrement dit  $\mathcal{T}'_z(T) = \mathcal{T}'(T) \cap \mathcal{T}'_z(Y)$ .

Voyons maintenant que l'ensemble  $\mathcal{T}'_z(Y)$  est en bijection avec un ensemble de graphes orientés.

### 5.3.2. Graphes de forme $Y$

Notons  $m_1 \geq \dots \geq m_r$  les longueurs des lignes de  $Y$ . On appelle *graphe de forme  $Y$*  un graphe orienté  $\Gamma$  tel que

- (a) Les sommets de  $\Gamma$  sont les entiers  $1, \dots, n$ .
- (b) Si  $j \rightarrow i$  est une arête, alors  $j > i$ .
- (c) Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  au plus une arête arrive en  $i$  (resp. provient de  $i$ ).
- (d) Le graphe  $\gamma$  a  $r$  composantes connexes de nombres de sommets respectifs  $m_1, \dots, m_r$ .

On note  $\Gamma(Y)$  l'ensemble des graphes de forme  $Y$ .

*Exemple.*

$$\gamma = \left( \begin{array}{c} 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \\ 7 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \\ 2 \end{array} \right) \quad \text{est un graphe de forme } Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Graphe  $\gamma_{T'}$  de forme  $Y$  associé à  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . On note  $\gamma_{T'}$  le graphe de sommets  $1, \dots, n$ , présentant une arête  $j \dashrightarrow i$  pour chaque couple  $(i < j)$  d'entrées consécutives d'une même ligne de  $T'$ . Le graphe  $\gamma_{T'}$  est alors un graphe de forme  $Y$  et l'application

$$\mathcal{T}'(Y) \rightarrow \Gamma(Y), T' \mapsto \gamma_{T'}$$

est surjective. La restriction de cette application à l'ensemble  $\mathcal{T}'_z(Y)$  est une bijection.

*Exemple.* Dans les exemples précédents, on a  $\gamma = \varphi(T') = \varphi(T'')$ .

Graphe associé à un drapeau  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u$ .

Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  il existe  $i \in \{0, \dots, j-1\}$  maximal tel que

$$u(V_j) \subset V_i + u(V_{j-1}).$$

On pose  $\nu_{\mathcal{F}}(j) = i$ . On définit ainsi une application  $\nu_{\mathcal{F}} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ . On note  $\gamma_{\mathcal{F}}$  le graphe de sommets  $1, \dots, n$  et présentant une arête  $j \dashrightarrow \nu_{\mathcal{F}}(i)$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\nu_{\mathcal{F}}(j) \neq 0$ .

En général le graphe  $\gamma_{\mathcal{F}}$  n'est pas un graphe de forme  $Y$  comme le montre l'exemple suivant.

*Exemple.* Soit  $\mathcal{F}$  le drapeau de la remarque 5.2.1. On a

$$\gamma_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 \dashrightarrow 1 \\ 4 \dashrightarrow 3 \end{pmatrix}$$

Si  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T'}$ , alors on a clairement l'égalité  $\gamma_{\mathcal{F}_{T'}} = \gamma_{T'}$ . On a plus généralement :

### 5.3.3. LEMME

Pour tout  $\mathcal{F} \in Z(u).\mathcal{F}_{T'}$ , on a  $\gamma_{\mathcal{F}} = \gamma_{T'}$ .

*Démonstration.* Le lemme découle du fait évident que l'application  $\mathcal{F} \mapsto \nu_{\mathcal{F}}$  est constante sur  $Z(u).\mathcal{F}_{T'}$ .  $\square$

## 5.4. Étude des fermetures des $Z(u)$ -orbites des drapeaux $\mathcal{F}_{T'}$

On appelle *point fixe standard* un drapeau de la forme  $\mathcal{F}_T$  avec  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. À travers l'étude de l'adhérence de la  $Z(u)$ -orbite d'un point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$ , nous allons souligner l'importance des points fixes standards dans l'étude des composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$ .

On montre tout d'abord :

### 5.4.1. PROPOSITION

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . On note  $T = {}^S T'$  la rectification standard de  $T'$ . Le point fixe standard  $\mathcal{F}_T$  est contenu dans la fermeture de la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$ .

De cette proposition découle le corollaire suivant.



## 5.4.2. COROLLAIRE

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . On note  $T = {}^S T'$  la rectification standard de  $T'$ . Si le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans une composante irréductible  $K \subset \mathcal{B}_u$ , alors on a  $\mathcal{F}_T \in K$ .

*Démonstration de la proposition.* Considérons l'opération élémentaire consistant à rectifier deux lignes  $p < p'$  du tableau  $T'$  :

Soient  $a_1 < \dots < a_m$  (resp.  $a'_1 < \dots < a'_{m'}$ ) les numéros de la  $p$ -ième (resp.  $p'$ -ième) ligne de  $T'$ .

Pour  $q \in \{1, \dots, m'\}$ , soient  $\tilde{a}_q = \text{Min}(a_q, a'_q)$  et  $\tilde{a}'_q = \text{Max}(a_q, a'_q)$ . Par ailleurs, pour  $q \in \{m' + 1, \dots, m\}$ , posons  $\tilde{a}_q = a_q$ .

Soit  $\tilde{T}'$  le tableau obtenu à partir de  $T'$  en remplaçant  $a_q$  par  $\tilde{a}_q$  pour  $q \in \{1, \dots, m\}$  et  $a'_q$  par  $\tilde{a}'_q$  pour  $q \in \{1, \dots, m'\}$  :

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \vdots & \\ \hline a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \hline & & \vdots & \\ \hline a'_1 & a'_2 & \dots & a'_{m'} \\ \hline & & \vdots & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \tilde{T}' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & \vdots & \\ \hline \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \dots & \tilde{a}_m \\ \hline & & \vdots & \\ \hline \tilde{a}'_1 & \tilde{a}'_2 & \dots & \tilde{a}'_{m'} \\ \hline & & \vdots & \\ \hline \end{array}$$

On a  $\tilde{T}' \in \mathcal{T}'(T)$ . Le tableau  $T'$  se rectifie en  $T$  au terme d'une suite finie de transformations du type  $T' \mapsto \tilde{T}'$ . Par induction il suffit de montrer  $\mathcal{F}_{\tilde{T}'} \in \overline{Z(u)\mathcal{F}_{T'}}$ .

Rappelons qu'on a fixé une base de Jordan indexée sur l'ensemble des cases de  $Y$ . On note  $e[1], \dots, e[m]$  (resp.  $e'[1], \dots, e'[m']$ ) les vecteurs associés de gauche à droite aux cases de la  $p$ -ème ligne (resp.  $p'$ -ème ligne) de  $Y$ . Pour  $t \in k^\times$  soit  $d_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme vérifiant

$$d_t(e'[q]) = e'[q] + t.e[q] \quad \forall q \in \{1, \dots, m'\}$$

et qui fixe les autres vecteurs de la base. Les automorphismes  $d_t$  forment un groupe à un paramètre  $D = (d_t)_{t \in k^\times}$  contenu dans le groupe  $Z(u)$ . On a :

$$\mathcal{F}_{\tilde{T}'} = \lim_{t \rightarrow \infty} d_t \mathcal{F}_{T'}.$$

Il résulte  $\mathcal{F}_{\tilde{T}'} \in \overline{Z(u)\mathcal{F}_{T'}}$ . Cela complète la preuve.  $\square$

Rappelons que  $T^{\min}$  est l'élément minimal de l'ensemble  $\mathcal{T}(Y)$  pour la relation de dominance (cf. 4.2.3). Le résultat suivant montre l'importance, dans certains cas (par exemple lorsque le diagramme  $Y$  a deux colonnes ou est de forme rectangulaire) du point fixe standard  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$ .

## 5.4.3. PROPOSITION

On suppose qu'il existe  $s > 0$  tel que toute ligne de  $Y$  a longueur  $s$  ou  $s - 1$ . Alors le point fixe standard  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  est contenu dans la fermeture de la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$ , pour tout  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

De cette proposition découle le corollaire suivant.

## 5.4.4. COROLLAIRE

On suppose qu'il existe  $s > 0$  tel que toute ligne de  $Y$  a longueur  $s$  ou  $s - 1$ . Alors le drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  est contenu dans toute composante irréductible  $K \subset \mathcal{B}_u$ .

*Démonstration de la proposition.* Observons tout d'abord que l'entier  $s$  de l'énoncé du lemme peut être supposé égal au nombre de cases de la première ligne de  $Y$ .

D'après la proposition 5.4.1 il suffit de montrer  $\mathcal{F}_{T^{\min}} \in \overline{Z(u)\mathcal{F}_T}$  pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Il existe un numéro  $i \in \{1, \dots, n\}$  minimal qui n'occupe pas la même place dans  $T$  et  $T^{\min}$ . On raisonne par récurrence descendante sur  $i$ .

Il est clair que le numéro  $i$  figure dans la première ligne de  $T$ . Notons  $p$  le numéro de la ligne de  $T^{\min}$  contenant  $i$ . Rappelons qu'on a fixé une base de Jordan indexée sur l'ensemble des cases de  $Y$ . On note  $e[1], \dots, e[s]$  les vecteurs de la base associés de gauche à droite aux cases de la première ligne de  $Y$ . On note  $f[1], \dots, f[s - 1]$  les vecteurs de la base associés de gauche à droite aux  $s - 1$  premières cases de la  $p$ -ème ligne de  $Y$ .

Pour  $t \in k$  soit  $w_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme vérifiant

$$w_t(e[q]) = e[q] + t.f[q - 1] \quad \forall q \in \{2, \dots, s\}$$

et qui fixe les autres vecteurs de la base. Les automorphismes  $w_t$  forment un groupe à un paramètre  $W = (w_t)_{t \in k^\times}$  contenu dans le groupe  $Z(u)$ . On pose

$$\mathcal{F}_{\tilde{T}'} = \lim_{t \rightarrow \infty} w_t \mathcal{F}_{T'}.$$

Il suit  $\mathcal{F}_{\tilde{T}'} \in \overline{Z(u)\mathcal{F}_T}$ . D'après la proposition 5.4.1 il résulte  $\mathcal{F}_{\tilde{T}} \in \overline{Z(u)\mathcal{F}_T}$ , où on note  $\tilde{T} = {}^s\tilde{T}'$  la rectification standard de  $\tilde{T}'$ . Les entrées  $1, \dots, i$  occupent les mêmes places dans les tableaux  $\tilde{T}$  et  $T^{\min}$ . On obtient finalement  $\mathcal{F}_{T^{\min}} \in \overline{Z(u)\mathcal{F}_T}$  en appliquant l'hypothèse de récurrence au tableau  $\tilde{T}$ .  $\square$

On déduit des deux propositions précédentes une propriété qui concerne la singularité des composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$ .

## 5.4.5. PROPOSITION

Soit  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  une composante irréductible.

(a) La composante  $K^T$  est lisse si et seulement si tout point fixe standard contenu dans  $K^T$  est un point non-singulier de  $K^T$ .

(b) Supposons de plus qu'il existe  $s > 0$  tel que toute ligne de  $Y$  a longueur  $s$  ou  $s - 1$ . La composante  $K^T$  est lisse si et seulement si  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  est un point non-singulier de  $K^T$ .

*Démonstration.* Dans (a) comme dans (b), l'implication ( $\Rightarrow$ ) est immédiate. Montrons l'autre implication. On suppose pour cela que la composante  $K^T$  présente une singularité en  $\mathcal{F}$ . Rappelons que l'ensemble des points singuliers de  $K^T$  forme un fermé. Soit  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  le tore du lemme 4.6.2. L'ensemble  $(h_t \mathcal{F})_{t \in k^\times}$  est une courbe projective contenue dans  $K^T$  qui admet une limite à l'infini qui est un point fixe de  $H'$  encore contenu dans la composante  $K^T$ . Comme le tore  $H'$  est régulier ce point fixe de  $H'$  est de la forme  $\mathcal{F}_{T'}$  pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est encore un point singulier de  $K^T$ . D'après la proposition 5.4.1, il résulte que

$\mathcal{F}_{s_{T'}}$  est un point singulier de  $K^T$ , ce qui achève la preuve dans le cas (a). Dans le cas (b) on obtient d'autre part, d'après la proposition 5.4.3, que  $\mathcal{F}_{T_{\min}}$  est un point singulier de  $K^T$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

*Deuxième partie***Décompositions cellulaires des fibres de Springer**

Nous construisons une décomposition cellulaire filtrante de la fibre de Springer paramétrée par les tableaux lignes-standards, dont la codimension des cellules est donnée par une fonction sur l'ensemble des tableaux lignes-standards qui s'interprète comme un nombre d'inversions. Cette combinatoire permet un calcul pratique des nombres de Betti des fibres de Springer.

Cette partie contient les chapitres suivants.

- Chapitre. 6. CELLULES DE SCHUBERT DE LA VARIÉTÉ DRAPEAU
- Chapitre. 7. CELLULES DE SCHUBERT INTERSECTÉES AVEC  $\mathcal{B}_u$ .  
THÉORÈME DE SHIMOMURA
- Chapitre. 8. INVERSIONS SUR LES TABLEAUX LIGNES-STANDARDS
- Chapitre. 9. UNE FAMILLE DE PARAMÉTRISATIONS DES COMPOSANTES  
DE  $\mathcal{B}_u$ . UNE FAMILLE DE DÉCOMPOSITIONS CELLULAIRES  
ADAPTÉES
- Chapitre. 10. LIEN ENTRE LES DIFFÉRENTES PARAMÉTRISATIONS
- Chapitre. 11. CALCUL DES NOMBRES DE BETTI DE  $\mathcal{B}_u$   
ET DE CERTAINES COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES

*Notations.* On a fixé un espace vectoriel  $V$  de dimension  $n \geq 0$  sur un corps  $k$  algébriquement clos et un endomorphisme nilpotent  $u : V \rightarrow V$ . On a fixé une base de Jordan de  $u$  indexée sur  $|Y|$ , l'ensemble des cases du diagramme  $Y = Y(u)$ , et le tore  $H \subset GL(V)$  des automorphismes diagonaux dans cette base.

Le but de cette partie est de construire une décomposition cellulaire de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  permettant un calcul pratique des nombres de Betti. La variété  $\mathcal{B}_u$  admet une partition  $\mathcal{B}_u = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}(Y)} \mathcal{B}_u^T$  paramétrée par les tableaux standards. D'autre part les éléments de  $\mathcal{B}_u$  fixés par le tore  $H$  sont les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  ( $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) associés aux tableaux lignes-standards. Le but est d'obtenir une décomposition en cellules telle que

- (1) Chaque cellule contient un unique point fixe du tore.
- (2) Chaque ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  est réunion de cellules.

Dans le chapitre 6, nous rappelons la définition des cellules de Schubert. Puis dans le chapitre 7, nous citons le résultat de N. Shimomura selon lequel une décomposition cellulaire de  $\mathcal{B}_u$  satisfaisant aux propriétés (1) et (2) s'obtient en intersectant  $\mathcal{B}_u$  avec les cellules de Schubert. Nous noterons  $S_u(T')$  la cellule de Shimomura contenant le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$ . Dans la quatrième partie de cette thèse, nous nous appuyerons sur la décomposition cellulaire de Shimomura pour étudier les composantes de  $\mathcal{B}_u$  lorsque le diagramme  $Y(u)$  a deux lignes ou est de type crochet. Cependant la dimension de ces cellules est donnée par une formule compliquée, qui n'est pas très adaptée au calcul des nombres de Betti.

Dans le chapitre 8, nous définissons une fonction  $l : \mathcal{T}'(Y) \rightarrow \mathbb{N}$  qui s'interprète comme une longueur de Bruhat généralisée. Dans le chapitre 9, nous construisons une décomposition en cellules de  $\mathcal{B}_u$  possédant les propriétés (1) et (2) et telle que la codimension de la cellule contenant le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  est égale à  $l(T')$ .

En réalité notre construction est un peu plus générale. Rappelons que la partition de  $\mathcal{B}_u$  en sous-ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  correspond à une manière d'associer à un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$  un tableau standard  $T(\mathcal{F})$ , en considérant la suite des diagrammes de Young des restrictions successives de  $u$  aux espaces du drapeau. Il y a une manière plus générale d'associer à  $\mathcal{F}$  une suite croissante de diagrammes de Young. Fixons une suite croissante d'intervalles entiers

$$\rho = (I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n = [1; n])$$

vérifiant  $\#I_i = i$  pour tout  $i$ . On pose  $I_i = [\rho_i; \rho'_i]$ . Pour tout  $i$  l'endomorphisme quotient  $u|_{V_{\rho'_i}/V_{\rho_i}} \in \text{End}(V_{\rho'_i}/V_{\rho_i})$  peut être considéré. Les diagrammes  $Y(u|_{V_{\rho'_i}/V_{\rho_i}})$  forment une suite croissante qui définit un tableau standard  $T^\rho(\mathcal{F})$ . On pose

$$\mathcal{B}_{u,T}^\rho = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u : T = T^\rho(\mathcal{F})\}.$$

On montre que les ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  sont localement fermés dans  $\mathcal{B}_u$ , irréductibles, non-singuliers et de même dimension de sorte que les fermetures des ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  sont exactement les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$  (cf. théorème 9.2). On obtient ainsi une autre paramétrisation des composantes de  $\mathcal{B}_u$ . La construction des ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  est motivée par l'article de M. van Leeuwen [28]. En utilisant les résultats de cet article, on décrit le lien entre les différentes paramétrisations des composantes de  $\mathcal{B}_u$  obtenues (chapitre 10).

On définit une transformation  $T' \mapsto \rho \star T'$  de  $\mathcal{T}'(Y)$  telle que les points fixes du tore contenus dans  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  sont les drapeaux  $\mathcal{F}_{\rho \star T'}$  ( $T' \in \mathcal{T}'(T)$ ). Enfin on construit une décomposition cellulaire filtrante de  $\mathcal{B}_u$  qui possède les propriétés :

- (1) chaque cellule contient un unique point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  ( $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ),
- (2) pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, l'ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  est réunion de cellules,

et telle que la codimension de l'unique cellule contenant le point fixe  $\mathcal{F}_{\rho \star T'}$  est égale au nombre  $l(T')$ .

Enfin, dans le chapitre 11, on déduit un calcul des nombres de Betti de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .

*Références bibliographiques.* On retrouvera la définition des cellules de Schubert dans les livres de T.A. Springer [26] et A. Borel [1] ainsi que dans la deuxième

partie du livre de W. Fulton [4]. L'article de N. Shimomura [19] sert de référence au chapitre 7. Enfin le chapitre 10 emprunte les idées et utilise certains résultats de M. van Leeuwen [28].

## Chapitre 6 . CELLULES DE SCHUBERT DE LA VARIÉTÉ DRAPEAU

La variété drapeau  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(V)$  admet une décomposition cellulaire filtrante. Les cellules sont appelées *cellules de Schubert*. Les cellules de Schubert  $S(\sigma)$  sont paramétrées par les éléments du groupe symétrique  $\sigma \in \Sigma_n$ .

### 6.1. Quatre constructions des cellules de Schubert

Nous présentons quatre constructions équivalentes des cellules de Schubert. Tout d'abord, fixons  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ . Soit  $H \subset GL(V)$  le tore des automorphismes qui sont diagonaux dans cette base. Pour  $\sigma \in \Sigma_n$ , soit  $\mathcal{F}(\sigma) = (V_0, \dots, V_n)$  le drapeau défini par

$$V_i = \langle e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_i} \rangle.$$

Les points fixes pour l'action naturelle de  $H$  sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$  sont exactement les drapeaux  $\mathcal{F}(\sigma)$ , pour  $\sigma$  parcourant  $\Sigma_n$  (cf. §2.3.3). Le point fixe  $\mathcal{F}(\sigma)$  appartient à la cellule  $S(\sigma)$ .

On note  $\text{id} \in \Sigma_n$  l'élément neutre du groupe symétrique et  $\sigma_0 \in \Sigma_n$  la permutation telle que  $\sigma_0 : i \mapsto n + 1 - i$  pour tout  $i$ . Selon nos conventions la cellule  $S(\text{id})$  sera ouverte dans la variété drapeau  $\mathcal{B}$  tandis que la cellule  $S(\sigma_0)$  sera réduite au drapeau  $\mathcal{F}(\sigma_0)$ .

*Notation.* Soient  $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$  deux-à-deux distincts. On désigne par  $(i_1 : i_2 : \dots : i_p) = \tau$  la permutation cyclique définie par

- $\tau(i) = i$  si  $i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ ,
- $\tau(i_q) = i_{q+1}$  si  $q \in \{1, \dots, p-1\}$ ,
- $\tau(i_p) = i_1$ .

Ainsi  $(i : j)$  est la transposition qui échange  $i$  et  $j$ .

#### 6.1.1. Première construction de la cellule de Schubert $S(\sigma)$

Fixons  $\sigma \in \Sigma_n$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $J_i$  l'ensemble

$$J_i := \{j \in \{\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n\} : j > \sigma_i\}.$$

Ensuite on note  $W_i$  le sous-espace

$$W_i := \langle e_j : j \in J_i \rangle.$$

La cellule de Schubert  $S(\sigma)$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{B}$  formé par les drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  tels que l'on ait pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$V_i \subset V_{i-1} + (ke_{\sigma_i} \oplus W_i),$$

et  $V_i \not\subset V_{i-1} + W_i$ .

Ces conditions impliquent qu'il existe  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une (unique) base de  $V$  adaptée au drapeau  $\mathcal{F}$  (i.e.  $V_i = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i \rangle$  pour tout  $i$ ) telle que

$$\varepsilon_i = e_{\sigma_i} + \sum_{j \in J_i} \zeta_{i,j}(\mathcal{F}) e_j \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

pour des scalaires  $\zeta_{i,j}(\mathcal{F})$ . Les fonctions coordonnées  $\zeta_{i,j} : S(\sigma) \rightarrow k$  ainsi définies sont algébriques sur  $S(\sigma)$ . Soit  $K$  l'ensemble des couples  $(i, j)$  avec  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in J_i$ . Les applications  $\zeta_{i,j}$  (pour  $(i, j) \in K$ ), réunies, réalisent alors un isomorphisme  $S(\sigma) \cong \mathbb{A}^{\#K}$ .

Le drapeau  $\mathcal{F}(\sigma)$  appartient à la cellule  $S(\sigma)$  et en est l'élément dont toutes les coordonnées sont nulles. Observons que la cellule  $S(\sigma)$  est fermée dans l'ouvert affine  $\Omega_\sigma \subset \mathcal{B}$  défini dans §2.3.4. La cellule  $S(\text{id})$  associée à l'élément neutre du groupe  $\Sigma_n$  coïncide précisément avec l'ouvert  $\Omega_{\text{id}}$ .

### 6.1.2. Deuxième construction : à l'aide d'un tore de rang 1

On a noté  $H$  le tore des automorphismes diagonaux dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Fixons  $\varepsilon_1 < \dots < \varepsilon_n$  des entiers distincts. Pour  $t \in k^\times$  soit  $h_t \in GL(V)$  l'automorphisme défini sur la base par

$$h_t(e_i) = t^{-\varepsilon_i} e_i.$$

Ces automorphismes forment un groupe à un paramètre  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$ . Le groupe  $H'$  est un sous-tore de  $H$  de rang 1 régulier (cf. 4.6.1) et  $H$  et  $H'$  ont exactement les mêmes points fixes pour leur action sur  $\mathcal{B}$ .

Soit  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$  un drapeau. Les images de  $\mathcal{F}$  par les éléments  $h_t$  (pour  $t \in k^\times$ ) forment une courbe projective  $(h_t \mathcal{F})_{t \in k^\times} \subset \mathcal{B}$  qui admet un point à l'infini, lequel est nécessairement fixé par  $H'$ . Pour  $\sigma \in \Sigma_n$  on a

$$S(\sigma) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B} : \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma)\}.$$

### 6.1.3. Troisième construction : comme orbites pour l'action d'un sous-groupe de Borel

Soit  $B \subset GL(V)$  le sous-groupe de Borel formé par les éléments  $g \in GL(V)$  tels que

$$g e_i \in \langle e_j : j \geq i \rangle.$$

L'action naturelle de  $B$  sur  $V$  induit une action sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$ . Pour  $\sigma \in \Sigma_n$ , la cellule de Schubert  $S(\sigma)$  est la  $B$ -orbite contenant le point fixe  $\mathcal{F}(\sigma)$ . On a donc  $S(\sigma) = B \cdot \mathcal{F}(\sigma)$ .

*Remarque 1.* Observons que  $B$  est le sous-groupe de  $GL(V)$  formé par les éléments qui fixent le drapeau  $\mathcal{F}(\sigma_0)$ . Posons  $\mathcal{F}(\sigma_0) = (W_0, \dots, W_n)$ . D'après §2.3.2.d) les  $B$ -orbites sont alors les fibres de l'application matricielle  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \mapsto (\dim V_i \cap W_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ . De cette manière la cellule  $S(\sigma)$  est l'ensemble des drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$  satisfaisant

$$\dim V_i \cap W_j = \#\{\sigma_1, \dots, \sigma_i\} \cap \{n - j + 1, \dots, n\} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$



*Remarque 2.* Observons que  $B$  s'écrit  $B = UH$  où  $H$  est le tore maximal et  $U$  est le sous-groupe unipotent de  $B$  :

$$U = \{g \in GL(V) : ge_i - e_i \in \langle e_j : j > i \rangle\}.$$

Comme le drapeau  $\mathcal{F}(\sigma)$  est fixé par  $H$ , on obtient que la cellule  $S(\sigma)$  est la  $U$ -orbite de  $\mathcal{F}(\sigma)$ .

#### 6.1.4. Quatrième construction : par induction

La troisième définition ci-dessus peut s'interpréter par induction à l'aide du fibré

$$\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (V_0, \dots, V_n) \mapsto V_{n-1}$$

où  $\mathcal{H}$  est la variété des hyperplans  $W \subset V$ . C'est la construction suivante que nous adapterons au cadre des fibres de Springer.

Soit  $\widehat{V} = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  et  $\widehat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(\widehat{V})$  la variété drapeau relative à  $\widehat{V}$ . L'application  $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$  est un fibré en drapeaux, de fibre  $\widehat{\mathcal{B}}$ , qui trivialisé au dessus d'une décomposition cellulaire de  $\mathcal{H}$ . Les cellules de Schubert  $S(\sigma) \subset \mathcal{B}$  s'obtiennent comme produits des cellules de Schubert  $\widehat{S}(\widehat{\sigma}) \subset \widehat{\mathcal{B}}$  (pour  $\widehat{\sigma} \in \Sigma_{n-1}$ ) et des cellules de  $\mathcal{H}$ .

Détaillons la construction. Soit  $U \subset B$  le groupe unipotent introduit dans la remarque ci-dessus. Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note

- $W_i = \langle e_j : j \neq i \rangle \in \mathcal{H}$ ,
- $U(i) = \{g \in U : \text{Im}(g - \text{id}_V) \subset k.e_i\}$ ,
- $\tau_i$  la permutation cyclique  $\tau_i = (i : i+1 : \dots : n)$ ,
- $\widetilde{\tau}_i \in GL(V)$  l'automorphisme vérifiant  $\widetilde{\tau}_i(e_j) = e_{\tau_i(j)}$  pour tout  $j$ .

Le groupe  $U$  agit sur  $\mathcal{H}$  et on note  $C_i$  la  $U$ -orbite de  $W_i$ . L'application

$$U(i) \rightarrow C_i, \quad g \mapsto gW_i$$

est un isomorphisme. Les sous-ensembles  $C_i$  (pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ) forment une décomposition cellulaire filtrante de  $\mathcal{H}$ .

Soit  $\widehat{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{F} \mapsto \overline{\mathcal{F}}$  l'inclusion naturelle. Au dessus de chaque cellule  $C_i$ , le fibré  $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$  admet une trivialisé

$$\Xi_i : U(i) \times \widehat{\mathcal{B}} \xrightarrow{\sim} \Phi^{-1}(C_i), \quad (g, \mathcal{F}) \mapsto g.\widetilde{\tau}_i.\overline{\mathcal{F}}.$$

Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ . Notons  $i = \sigma_n$ . On a  $\sigma = \tau_i \widehat{\sigma}$  avec  $\widehat{\sigma}(n) = n$ . L'élément  $\widehat{\sigma}$  s'identifie à un élément de  $\Sigma_{n-1}$ . La cellule  $S(\sigma)$  satisfait à l'égalité

$$S(\sigma) = \Xi_i \left( \widehat{S}(\widehat{\sigma}) \times C_i \right).$$

Avant d'énoncer les propriétés des cellules de Schubert, nous rappelons deux notions supplémentaires : l'ordre de Bruhat et la longueur de Bruhat.

## 6.2. Ordre de Bruhat

L'ordre de Bruhat est un ordre partiel  $\leq$  sur l'ensemble  $\Sigma_n$ . Soient  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_p)$  et  $\underline{i}' = (i'_1, \dots, i'_p)$  deux  $p$ -uplers d'entiers. Soient  $\tilde{i}_1 \leq \dots \leq \tilde{i}_p$  les éléments de  $\underline{i}$  que l'on a remis dans l'ordre croissant. Soient  $\tilde{i}'_1 \leq \dots \leq \tilde{i}'_p$  les éléments de  $\underline{i}'$  pareillement remis dans l'ordre. On écrit  $\underline{i} \leq \underline{i}'$  si  $\tilde{i}_q \leq \tilde{i}'_q$  pour tout  $q \in \{1, \dots, p\}$ . Soient maintenant  $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$ . On écrit  $\sigma \leq \sigma'$  si  $(\sigma_1, \dots, \sigma_i) \leq (\sigma'_1, \dots, \sigma'_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

## 6.3. Longueur de Bruhat

On donne trois définitions équivalentes de la *longueur de Bruhat*  $l_B : \Sigma_n \rightarrow \mathbb{N}$ . Considérons  $\sigma \in \Sigma_n$  et définissons  $l_B(\sigma)$ .

1) *Longueur de Bruhat comme nombre d'inversions.*

Une inversion de  $\sigma \in \Sigma_n$  est un couple  $(i, j)$  tel qu'on ait  $1 \leq i < j \leq n$  et  $\sigma_i > \sigma_j$ . Alors  $l_B(\sigma)$  égale le nombre d'inversions de  $\sigma$ .

2) *Longueur de Bruhat comme longueur de Coxeter.*

Pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , soit  $\tau^{(i)} = (i : i+1)$  la transposition élémentaire. Un élément  $\sigma \in \Sigma_n$  s'écrit comme produit de telles transpositions et  $l_B(\sigma)$  égale le nombre minimal de facteurs nécessaires pour écrire  $\sigma$  ainsi.

3) *Longueur de Bruhat définie à l'aide de cycles.*

Pour  $\kappa \in \{0, \dots, i-1\}$  soit  $\tau_{i,\kappa}$  la permutation cyclique  $\tau_{i,\kappa} = (i - \kappa : \dots : i - 1 : i)$  de longueur  $\kappa$ .

Si  $\kappa = n - \sigma_n$ , la permutation  $\sigma' = \tau_{n,\kappa}^{-1} \sigma$  fixe  $n$  et s'apparente donc à un élément de  $\Sigma_{n-1}$ . Par induction il existe d'uniques entiers  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  vérifiant  $0 \leq \kappa_i \leq i-1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tels qu'on ait  $\sigma = \tau_{n,\kappa_n} \cdots \tau_{1,\kappa_1}$ .

On a alors  $l_B(\sigma) = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ .

Certaines propriétés des cellules de Schubert sont maintenant rappelées dans l'énoncé suivant.

## 6.4. PROPOSITION

*Les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(a) *Les sous-ensembles  $S(\sigma) \subset \mathcal{B}(V)$  (pour  $\sigma \in \Sigma_n$ ) forment une décomposition cellulaire de la variété drapeau  $\mathcal{B}(V)$ . Pour  $\sigma \in \Sigma_n$ , le point fixe  $\mathcal{F}(\sigma)$  appartient à la cellule  $S(\sigma)$ .*

(b) *Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ . La codimension de la cellule  $S(\sigma)$  égale la longueur de Bruhat  $l_B(\sigma)$ .*

(c) *Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ . La fermeture de la cellule  $S(\sigma)$  est la réunion des cellules de Schubert  $S(\sigma')$ , pour  $\sigma \leq \sigma'$ , où  $\leq$  est l'ordre de Bruhat.*

La fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  coïncide avec la variété drapeau  $\mathcal{B}$  dans le cas  $u = 0$ . Dans le cas général, étudions la possibilité d'établir un énoncé relatif à la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  ressemblant à l'énoncé précédent. Les points fixes du tore  $\mathcal{B}_u$  sont paramétrés par les tableaux lignes-standards de forme  $Y = Y(u)$ . Cherchons une décomposition cellulaire de  $\mathcal{B}_u$  dont chaque cellule contienne un point fixe.

## Chapitre 7. CELLULES DE SCHUBERT INTERSECTÉES AVEC $\mathcal{B}_u$ . THÉORÈME DE SHIMOMURA

Du chapitre précédent il ressort que les cellules de Schubert de la variété drapeau  $\mathcal{B}$  sont définies relativement à une base de  $V$  dont les vecteurs sont numérotés de 1 à  $n$ .

Nous avons fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$  une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y = Y(u)$ . Un ordre total sur l'ensemble  $|Y|$  induit une numérotation des vecteurs de cette base et donc une définition des cellules de Schubert. La fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  étant une sous-variété fermée de  $\mathcal{B}$ , les intersections entre  $\mathcal{B}_u$  et les cellules de Schubert obtenues forment une partition filtrante de  $\mathcal{B}_u$ . Le théorème de Shimomura montre que, lorsque l'ordre des cases de  $Y$  est bien choisi, cette partition est une décomposition cellulaire de  $\mathcal{B}_u$ .

### 7.1. Cellules de Schubert adaptées au cadre de la fibre de Springer

#### 7.1.1. Un ordre sur $|Y|$ , l'ensemble des cases du diagramme $Y$

Soient  $x, x' \in |Y|$ . On écrit  $x < x'$  si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (1) La colonne de  $Y$  contenant  $x$  est strictement à la droite de la colonne contenant  $x'$ .
- (2) Les cases  $x, x'$  sont dans la même colonne de  $Y$  et  $x$  est strictement au dessus de  $x'$ .

Dans l'exemple suivant, nous avons numéroté les cases de  $Y$  de 1 à 11 en respectant l'ordre croissant de la relation  $<$ .

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 3 & 1 \\ \hline 9 & 6 & 4 & 2 \\ \hline 10 & 7 & & \\ \hline 11 & & & \\ \hline \end{array}$$

Soient  $x_1 < \dots < x_n$  les éléments  $|Y|$  écrits dans l'ordre. La fonction  $i \mapsto x_i$  est une bijection de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $|Y|$  que l'on note  $\beta$ .

Soient  $S(\sigma) \subset \mathcal{B}$  (pour  $\sigma \in \Sigma_n$ ) les cellules de Schubert relativement à la base  $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$  de  $V$  au sens de §6.1.

#### 7.1.2. Cellules de Schubert $S_\alpha \subset \mathcal{B}$ paramétrées par $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$

Rappelons que  $|Y|$  est l'ensemble des cases de  $Y$  et  $\Sigma_{|Y|}$  désigne l'ensemble des bijections de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $|Y|$ . Pour  $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$  soit  $\mathcal{F}_\alpha = (V_0, \dots, V_n)$  le drapeau défini par

$$V_i = \langle e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_i} \rangle \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Les drapeaux  $\mathcal{F}_\alpha$  ( $\alpha$  parcourant  $\Sigma_{|Y|}$ ) sont exactement les points fixes du tore  $H \subset GL(V)$  des automorphismes diagonaux dans la base (cf. §4.5.3).

L'application  $\sigma \mapsto \beta\sigma$  est une bijection de  $\Sigma_n$  dans  $\Sigma_{|Y|}$ . Pour  $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$  on définit

$$S_\alpha = S(\beta^{-1}\alpha).$$

De cette manière les cellules de Schubert sont paramétrées par les éléments de  $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$ , de telle sorte que le point fixe  $\mathcal{F}_\alpha$  appartient à la cellule  $S_\alpha$ .

Rappelons qu'un tableau lignes-standard  $T'$  de forme  $Y$  induit un élément  $\alpha_{T'} \in \Sigma_{|Y|}$  et l'application  $T' \mapsto \alpha_{T'}$  est une injection de  $\mathcal{T}'(Y)$ , l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y$ , dans l'ensemble  $\Sigma_{|Y|}$ .

On montre :

### 7.1.3. PROPOSITION

Soit  $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le point fixe  $\mathcal{F}_\alpha$  est contenu dans la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .
- (ii) L'intersection  $S_\alpha \cap \mathcal{B}_u$  est non-vide.
- (iii) Il existe  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard tel que  $\alpha = \alpha_{T'}$ .

On utilise le lemme suivant :

### 7.1.4. LEMME

Soit  $H \subset GL(V)$  le tore des automorphismes diagonaux dans la base  $(e_x)_{x \in |Y|}$ . Le tore  $H$  contient  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  un sous-tore de rang 1 qui satisfait aux propriétés suivantes :

- (1) Le tore  $H'$  est régulier.
- (2) L'action naturelle de  $H'$  sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$  laisse stable la variété  $\mathcal{B}_u$ .
- (3) Pour  $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$ , la cellule de Schubert  $S_\alpha$  s'obtient par :

$$S_\alpha = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B} : \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha\}.$$

*Démonstration du lemme.* Dans la démonstration du lemme 4.6.2, les entiers  $(\epsilon_x)_{x \in |Y|}$  peuvent être choisis tels qu'on ait :

$$\epsilon_x < \epsilon_{x'} \text{ pour } x, x' \in |Y| \text{ tel que } x < x'.$$

Alors, d'après §6.1.3, le sous-tore  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  obtenu satisfait aux conditions de l'énoncé.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* L'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) est déjà connue (cf. §4.6). L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) est immédiate. Nous prouvons (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Soit  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  le tore du lemme 7.1.4. Soit  $\alpha \in \Sigma_{|Y|}$ . Par le lemme, on a

$$S_\alpha = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u : \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha\}.$$

Supposons  $S_\alpha \cap \mathcal{B}_u \neq \emptyset$ . Il existe donc  $\mathcal{F} \in S_\alpha \cap \mathcal{B}_u$ . On a ainsi  $h_t \cdot \mathcal{F} \in \mathcal{B}_u$  pour tout  $t \in k^\times$ . Comme  $\mathcal{B}_u$  est fermé dans  $\mathcal{B}$  il suit  $\mathcal{F}_\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \cdot \mathcal{F} \in \mathcal{B}_u$ . La preuve est complète.  $\square$

7.1.5. *Sous-ensembles*  $S_u(T') \subset \mathcal{B}_u$

Pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard, on pose

$$S_u(T') = S_{\alpha_{T'}} \cap \mathcal{B}_u.$$

De cette manière les sous-ensembles  $S_u(T') \subset \mathcal{B}_u$  sont localement fermés et réalisent une partition filtrante de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ . On a de plus pour tout  $T'$  :

$$\mathcal{F}_{T'} \in S_u(T'),$$

où  $\mathcal{F}_{T'}$  est le point fixe associé à  $T'$  au sens de §4.6.

Regardons maintenant quelles cellules de Schubert rencontrent le sous-ensemble localement fermé  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$ , pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard.

7.1.6. PROPOSITION

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On a

$$\mathcal{B}_u^T = \bigsqcup_{T' \in \mathcal{T}'(T)} S_u(T')$$

où  $T'$  parcourt  $\mathcal{T}'(T)$ , l'ensemble des tableaux lignes-standard de rectification standard  $T$ .

*Démonstration.* On a défini un ordre  $\leq$  sur  $|Y|$ , l'ensemble des cases de  $Y$ . Par construction la cellule de Schubert  $S_{\alpha_{T'}}$  est l'orbite du point fixe  $\mathcal{F}(T')$  sous l'action du sous-groupe de Borel

$$B = \{g \in GL(V) : ge_x \in \langle e_{x'} : x' \geq x \rangle\}.$$

Le groupe  $B$  fixe le drapeau partiel formé par les noyaux itérés  $\ker u^q$  (pour  $q \geq 0$ ). D'après §4.7.3 on a

$$(B.\mathcal{B}_u^T) \cap \mathcal{B}_u \subset \mathcal{B}_u^T.$$

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ . Le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  est alors contenu dans le sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T$ . Il suit :

$$S_u(T') = (B.\mathcal{F}_{T'}) \cap \mathcal{B}_u \subset \mathcal{B}_u^T.$$

Comme les sous-ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  réalisent une partition de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ , on obtient finalement

$$\mathcal{B}_u^T = \bigsqcup_{T' \in \mathcal{T}'(T)} S_u(T')$$

pour tout tableau standard  $T$  de forme  $Y$ .  $\square$

### 7.1.7. Ordre sur les tableaux lignes-standards induit par l'ordre de Bruhat

L'ordre de Bruhat sur les éléments du groupe symétrique (cf. §6.2) peut être interprété en termes de tableaux lignes-standards.

Soit  $A$  est un ensemble totalement ordonné et soient  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_p)$  et  $\underline{a}' = (a'_1, \dots, a'_p)$  deux  $p$ -uplets d'éléments de  $A$ . Soient  $\tilde{a}_1 \leq \dots \leq \tilde{a}_p$  les éléments de  $\underline{a}$  remis dans l'ordre croissant. Soient  $\tilde{a}'_1 \leq \dots \leq \tilde{a}'_p$  les éléments de  $\underline{a}'$  réordonnés à leur tour. On pose  $\underline{a} \leq \underline{a}'$  si on a  $\tilde{a}_q \leq \tilde{a}'_q$  pour tout  $q \in \{1, \dots, p\}$ .

Rappelons (cf. §7.1.1) qu'on a défini un ordre sur  $|Y|$ , l'ensemble des cases du diagramme  $Y$ . Soient maintenant  $\alpha, \alpha' : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$  deux bijections. On note  $\alpha \leq \alpha'$  si on a  $(\alpha(1), \dots, \alpha(p)) \leq (\alpha'(1), \dots, \alpha'(p))$  pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ .

Soient enfin  $T', T'' \in \mathcal{T}'(Y)$  deux tableaux lignes-standards, qui définissent deux bijections  $\alpha_{T'}, \alpha_{T''} : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$ . On pose  $T' \leq T''$  si  $\alpha_{T'} \leq \alpha_{T''}$ .

*Exemple.* On a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array}$$

*Avertissement.* L'ordre  $\leq$  restreint à  $\mathcal{T}(Y)$ , l'ensemble des tableaux standards, n'est pas la relation de dominance  $\preceq$  (cf. §4.2.3) mais son inverse : Soient  $T, S \in \mathcal{T}(Y)$  standards, on a :

$$S \prec T \Leftrightarrow T < S.$$

La proposition suivante donne une propriété de l'ordre  $\leq$ .

### 7.1.8. PROPOSITION

Soient  $T', T'' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standards. Supposons l'intersection  $\overline{S_u(T')} \cap S_u(T'')$  non-vide. Alors on a  $T' \leq T''$ .

*Démonstration.* Rappelons qu'on a  $S_u(T') = S_{\alpha_{T'}} \cap \mathcal{B}_u$  et  $S_u(T'') = S_{\alpha_{T''}} \cap \mathcal{B}_u$ .

Soient  $\alpha, \alpha' \in \Sigma_{|Y|}$ . Soit  $\beta : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$  la bijection introduite dans §7.1.1. On a clairement l'équivalence  $\alpha \leq \alpha' \Leftrightarrow \beta^{-1}\alpha \leq \beta^{-1}\alpha'$  où la dernière relation est l'ordre de Bruhat usuel. D'après la construction de la cellule  $S_\alpha$  dans §7.1.2 et la proposition 6.4.(c), on obtient  $\overline{S_\alpha} = \bigcup S_{\alpha'}$ , où la réunion est prise sur l'ensemble des bijections  $\alpha' \in \Sigma_{|Y|}$  telles que  $\alpha \leq \alpha'$ .

Si l'intersection  $\overline{S_u(T')} \cap S_u(T'')$  est non-vide, alors l'intersection  $\overline{S_{\alpha_{T'}}} \cap S_{\alpha_{T''}}$  est elle-même non vide. D'après ce qui précède, on a  $\alpha_{T'} \leq \alpha_{T''}$ , donc  $T' \leq T''$ .  $\square$

## 7.2. Théorème de Shimomura

On étudie plus précisément les ensembles  $S_u(T')$ . On a déjà vu qu'ils forment une partition filtrante de  $\mathcal{B}_u$  en parties localement fermées. D'après le théorème de N. Shimomura, que nous rappelons maintenant, cette partition est en fait une décomposition cellulaire de  $\mathcal{B}_u$ . Tout d'abord nous définissons une fonction à valeurs entières sur les tableaux lignes-standards. Cette fonction donnera la dimension des cellules.

### 7.2.1. Définition d'une fonction $d : \mathcal{T}'(Y) \rightarrow \mathbb{N}$

À un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ , on associe un entier  $d(T')$  de la façon suivante.

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Considérons le sous-tableau  $T'|_i$  obtenu d'après  $T'$  en retirant les numéros  $i + 1, \dots, n$ . Soit  $L_i$  la ligne de  $T'|_i$  contenant  $i$  et soit  $q_i$  sa longueur.

On note

- $d_i^+$  le nombre de lignes de  $T'|_i$  situées strictement au dessus de  $L_i$  et de longueur au moins  $q_i$ ,
- $d_i^-$  le nombre de lignes de  $T'|_i$  strictement en dessous de  $L_i$  et de longueur au moins  $q_i + 1$ .

On pose alors  $d(i) = d_i^+ + d_i^-$ .

Ainsi on a défini des nombres  $d(i)$  (pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ). Posons enfin

$$d(T') = d(1) + \dots + d(n).$$

*Exemple.* Supposons

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

On obtient  $d(0) = 0$ ,  $d(1) = 0$ ,  $d(2) = 1$ ,  $d(3) = 0$ ,  $d(4) = 0$ ,  $d(5) = 1$ ,  $d(6) = 2$ ,  $d(7) = 0$  et finalement  $d(T') = 4$ .

Énonçons maintenant le théorème de Shimomura.

### 7.2.2. THÉORÈME (cf. [19].§4.7)

Supposons  $Y = Y(u)$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard. Le sous-ensemble  $S_u(T') \subset \mathcal{B}_u$  est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}^{d(T')}$ . Les sous-ensembles  $(S_u(T'))_{T' \in \mathcal{T}'(Y)}$  forment une décomposition cellulaire filtrante de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .

*Remarque.* Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, on obtient  $\dim S_u(T) = d(T) = \dim \mathcal{B}_u$ . Ainsi la cellule  $S_u(T)$  est un ouvert dense de  $\mathcal{B}_u^T$ .

### 7.2.3. Remarque

Une autre démonstration du fait que les ensembles  $S_u(T')$  sont des cellules s'obtient ainsi :

Soit  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  le sous-groupe de  $H$  du lemme 7.1.4. En combinant les propositions 7.1.3 et 7.1.6 on a

$$S_u(T') = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{B}_u^T : \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}_{T'} \}.$$

D'après la proposition 4.7.1 l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  est une variété quasi-projective non-singulière. Les points de  $\mathcal{B}_u^T$  fixés par  $H'$  sont en nombre fini, donc isolés. D'après le théorème 1.6.4, l'ensemble  $S_u(T')$  est isomorphe à un espace affine.

### 7.3. Application : calcul des nombres de Betti de $\mathcal{B}_u$ .

On suppose ici  $k = \mathbb{C}$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $b_m$  le nombre de Betti

$$b_m = \dim H^{2m}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q}).$$

D'après le théorème 7.2.2 les ensembles  $(S_u(T'))_{T' \in \mathcal{T}(Y)}$  forment une décomposition filtrante de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ . D'après la proposition 1.4.1, on obtient la formule

$$b_m = \#\{T' \in \mathcal{T}(Y) : d(T') = m\} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

*Exemple.* Soit  $Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ . Les tableaux lignes-standards de forme  $Y$  sont les suivants.

1	2	1	3	3	4	2	3	1	4	2	4
3	4	2	4	1	2	1	4	2	3	1	3

Les nombres  $d(T')$  associés à ces tableaux sont respectivement 2, 2, 1, 1, 1, 0. Il suit :  $b_2 = 2$ ,  $b_1 = 3$  et  $b_0 = 1$ .

Cependant, pour déterminer les nombres de Betti de  $\mathcal{B}_u$  de cette manière, il est nécessaire de calculer  $d(T')$  pour tout  $T' \in \mathcal{T}(Y)$ , ce qui rend le calcul difficile.

Dans le chapitre qui vient, nous allons définir une autre fonction  $l : \mathcal{T}(Y) \rightarrow \mathbb{N}$  sur l'ensemble des tableaux lignes-standards, qui sera similaire à la longueur de Bruhat présentée dans §6.3. Puis, en adaptant la quatrième construction des cellules de Schubert (cf. §6.1.4) au cadre des fibres de Springer, nous obtiendrons une décomposition cellulaire de  $\mathcal{B}_u$ , différente de la décomposition de Shimomura et telle que la codimension des cellules sera donnée par la fonction  $l$ .



## Chapitre 8 . INVERSIONS SUR LES TABLEAUX LIGNES-STANDARDS

On définit une notion d'inversion sur un élément  $T'$  de  $\mathcal{T}'(Y)$ , l'ensemble des tableaux lignes-standard de forme  $Y$ . Tout d'abord on définit  $l : \mathcal{T}'(Y) \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction ressemblant à une longueur de Coxeter. Puis on montre comment  $l$  peut être interprétée comme un nombre d'inversions.

Observons qu'une permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  peut s'écrire sous la forme d'un tableau à une colonne contenant  $n$  cases numérotées de 1 à  $n$ . Pour commencer, nous interprétons la longueur de Bruhat définie dans §6.3 lorsque la permutation  $\sigma$  est écrite de cette façon.

### 8.1. Retour sur la longueur de Bruhat

Notons  $Y_0$  le diagramme de Young à une colonne de  $n$  cases. Soient  $x_1, \dots, x_n$  les cases de  $Y_0$  de haut en bas.

#### 8.1.1. Tableau $T'_\sigma$ associé à $\sigma \in \Sigma_n$

Conformément à §7.1.2, une permutation  $\sigma \in \Sigma_n$  définit un tableau (lignes-standard)  $T'_\sigma \in \mathcal{T}'(Y_0)$

$$T'_\sigma = \begin{array}{|c|} \hline \sigma_1^{-1} \\ \hline \vdots \\ \hline \sigma_n^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Soit  $T_0 = T'_{\text{id}}$  l'unique tableau standard de forme  $Y_0$ , dont les cases portent les numéros 1, ...,  $n$  de haut en bas.

#### 8.1.2. Longueur de Bruhat d'un tableau de forme $Y_0$

Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ . On interprète la longueur de Bruhat  $l_B(\sigma)$  (cf. §6.3) au moyen du tableau  $T'_\sigma$  introduit ci-dessus. Les trois définitions de  $l_B(\sigma)$  données dans §6.3 sont successivement passées au crible. Observons d'abord que, en posant  $\tau T'_\sigma = T'_{\tau\sigma}$ , un élément  $\tau \in \Sigma_n$  peut s'interpréter comme une transformation sur l'ensemble  $\mathcal{T}'(Y_0)$ .

##### 1) Longueur de Bruhat vue comme nombre d'inversions.

Une inversion de  $\sigma \in \Sigma_n$  est un couple  $(i, j)$  tel que  $i$  est situé en dessous de  $j$  dans le tableau  $T'_\sigma$  et  $l_B(\sigma)$  est le nombre de tels couples.

##### 2) Longueur de Bruhat vue comme une longueur de Coxeter.

Pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  la transposition  $\tau^{(i)} = (i : i+1)$  peut s'interpréter comme l'opération sur les éléments de  $\mathcal{T}'(Y_0)$  consistant à intervertir les  $i$ -ème et  $(i+1)$ -ème lignes. Le tableau  $T'_\sigma$  peut être construit d'après  $T_0$  en un certain nombre d'étapes consistant à intervertir deux lignes adjacentes. Alors  $l_B(\sigma)$  est le nombre minimal d'étapes nécessaires.

3) *Longueur de Bruhat définie avec des permutations cycliques.*

En fait cette dernière façon, bien que moins classique, est la plus constructive. Pour  $\kappa \in \{0, \dots, i-1\}$  le cycle inverse  $\tau_{i,\kappa}^{-1} = (i : i-1, \dots : i-\kappa)$  peut être interprété comme l'opération sur  $\mathcal{T}'(Y_0)$  consistant à déplacer de  $\kappa$  rangs vers le bas la  $i$ -ème ligne de  $T'$ , tandis que les  $\kappa$  lignes suivantes sont déplacées d'un rang vers le haut. Tout d'abord on considère  $T'_\sigma$ . En choisissant convenablement  $\kappa_n, \kappa_{n-1}, \dots, \kappa_1$ , on replace successivement les numéros  $n, n-1, \dots, 1$  en appliquant dans l'ordre  $\tau_{n,\kappa_n}^{-1}, \dots, \tau_{1,\kappa_1}^{-1}$ , de sorte qu'à la fin le tableau  $T_0$  a été reconstruit d'après  $T'_\sigma$ . On a alors  $\sigma = \tau_{n,\kappa_n} \cdots \tau_{1,\kappa_1}$ . Ainsi  $l_B(\sigma) = \kappa_1 + \dots + \kappa_n$ .

Maintenant nous définissons une fonction  $l : \mathcal{T}'(Y) \rightarrow \mathbb{N}$ , pour  $Y$  quelconque. La troisième définition de la longueur de Bruhat va inspirer cette construction.

## Une longueur de Bruhat généralisée.

### 8.2. Longueur $l(T')$ d'un tableau lignes-standard $T' \in \mathcal{T}'(Y)$

Fixons  $Y \in \mathcal{Y}_n$  un diagramme de Young et  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard de forme  $Y$ . Rappelons que  $\mathcal{T}'(T)$  est l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y$  et de rectification standard  $T$ , au sens de la section §4.4.

#### 8.2.1. Les ensembles $\mathcal{T}'_i(T)$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $\mathcal{T}'_i(T)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(T)$  tels que  $i+1, \dots, n$  sont à la même place dans  $T'$  et  $T$ .

Rappelons qu'on note  $T'_{|i}$  le sous-tableau de  $T'$  formé par les numéros  $1, \dots, i$ . Ainsi  $\mathcal{T}'(T'_{|i})$  est l'ensemble des tableaux lignes-standards d'entrées  $1, \dots, i$ , de même forme que  $T_{|i}$  et de rectification standard  $T_{|i}$ .

L'application  $T' \mapsto T'_{|i}$  est une bijection entre les ensembles  $\mathcal{T}'_i(T)$  et  $\mathcal{T}'(T'_{|i})$ .

#### 8.2.2. Notations : $q_i, \widehat{p}_i, p_i^T, p_i^{T'}$

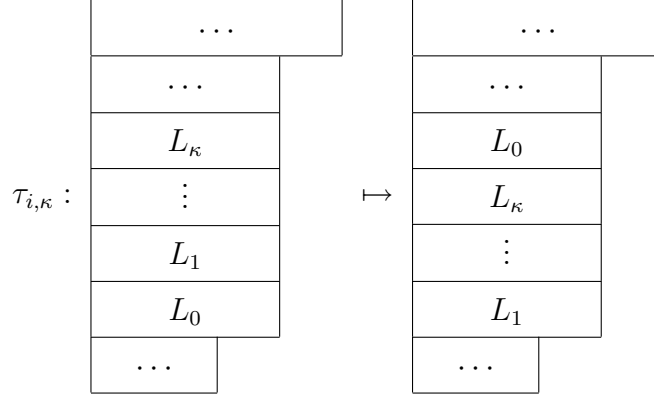
Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $q_i$  le numéro de la colonne de  $T$  qui contient  $i$ , ou de manière équivalente la longueur de la ligne de  $T_{|i}$  à laquelle appartient  $i$ . Soit  $\widehat{p}_i$  le nombre de lignes de  $T_{|i}$  de longueur exactement  $q_i$ . On note encore  $p_i^T$  (resp.  $p_i^{T'}$ ) le numéro de la ligne de  $T$  (resp. de  $T'$ ) à laquelle appartient  $i$ .

#### 8.2.3. Transformation $\tau_{i,\kappa}$ sur l'ensemble $\mathcal{T}'_i(T)$

Fixons  $i \in \{1, \dots, n\}$  et un entier  $\kappa \in \{0, \dots, \widehat{p}_i - 1\}$ . On définit la transformation

$$\tau_{i,\kappa} : \mathcal{T}'(T_{|i}) \rightarrow \mathcal{T}'(T_{|i}).$$

Son action sur un tableau lignes-standard  $T'$  consiste à déplacer de  $\kappa$  rangs vers le haut la dernière ligne de longueur  $q_i$  après avoir déplacé d'un rang vers le bas chacune des  $\kappa$  lignes situées juste au dessus :



(où  $L_\kappa, \dots, L_0$  désignent les  $\kappa + 1$  dernières lignes de longueur  $q_i$ ).

Cette transformation sur l'ensemble  $\mathcal{T}'(T_i)$  induit une transformation sur l'ensemble  $\mathcal{T}'_i(T)$ , encore notée  $\tau_{i,\kappa}$ , au moyen de la bijection  $\mathcal{T}'_i(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}'(T_i)$  décrite précédemment.

Observons que, pour  $Y = Y_0$ , la transformation  $\tau_{i,\kappa}$  coïncide avec la transformation sur l'ensemble  $\mathcal{T}'(Y_0)$  associé au cycle lui aussi noté  $\tau_{i,\kappa}$  que l'on a introduit dans la troisième définition de la longueur de Bruhat (cf. §8.1.2). C'est pourquoi nous nous sommes permis de conserver la même notation. De plus cette transformation est amenée à jouer le même rôle.

On peut faire l'observation suivante :

#### 8.2.4. LEMME

Soient  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i \leq j$  et soit  $\kappa \in \{0, \dots, \widehat{p}_i - 1\}$ . Pour tout tableau  $T' \in \mathcal{T}'_i(T)$ , le tableau transformé  $\tau_{i,\kappa}(T')$  est un élément de l'ensemble  $\mathcal{T}'_j(T)$ .

*Démonstration.* L'inclusion  $\tau_{i,\kappa}(\mathcal{T}'_i(T)) \subset \mathcal{T}'_i(T)$  résulte de la définition de  $\tau_{i,\kappa}$ . Le lemme s'obtient en combinant cette inclusion avec l'inclusion immédiate  $\mathcal{T}'_i(T) \subset \mathcal{T}'_j(T)$ .  $\square$

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  on fixe  $\kappa_i \in \{0, \dots, \widehat{p}_i - 1\}$ . D'après le lemme 8.2.4, le tableau transformé  $\tau_{n,\kappa_n} \circ \dots \circ \tau_{1,\kappa_1}(T)$  est un élément (bien défini) de l'ensemble  $\mathcal{T}'(T)$ . La proposition suivante montre que tout tableau de  $\mathcal{T}'(T)$  s'obtient de cette manière, pour un unique  $n$ -uplet  $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ .

#### 8.2.5. PROPOSITION

Fixons  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ .

(a) Il existe d'uniques entiers  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  vérifiant  $\kappa_i \in \{0, \dots, \widehat{p}_i - 1\}$  pour tout  $i$  et tels que l'on ait

$$T' = \tau_{n,\kappa_n} \circ \dots \circ \tau_{1,\kappa_1}(T).$$

(b) Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On pose  $T'_{[i]} := \tau_{i+1,\kappa_{i+1}}^{-1} \circ \dots \circ \tau_{n,\kappa_n}^{-1}(T')$  avec la convention  $T'_{[n]} := T'$ . On a alors  $T'_{[i]} \in \mathcal{T}'_i(T)$  et  $\kappa_i = p_i^T - p_i^{T'_{[i]}}$ .

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est trivial. Supposons la propriété vraie jusqu'en  $n - 1 \geq 1$ .

(a) D'abord montrons l'existence. Si  $n$  a la même place dans les tableaux  $T$  et  $T'$ , alors on a  $T' \in \mathcal{T}'_{n-1}(T)$  et la propriété d'induction implique que  $T'$  peut s'écrire sous la forme désirée, en s'appuyant sur la bijection  $\mathcal{T}'_{n-1}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}'(T|_n)$ .

Dans l'autre cas le numéro  $n$  est situé à la fin d'une ligne de  $T'$  de longueur  $q_n$  et il existe  $\kappa_n \in \{1, \dots, \widehat{p}_n - 1\}$  tel que  $\tau_{n, \kappa_n}^{-1}(T') \in \mathcal{T}'_{n-1}(T)$ . Par induction il existe des entiers  $\kappa_i \in \{0, \dots, \widehat{p}_i - 1\}$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) tels qu'on ait

$$\tau_{n, \kappa_n}^{-1}(T') = \tau_{n-1, \kappa_{n-1}} \circ \dots \circ \tau_{1, \kappa_1}(T).$$

Ainsi  $T'$  s'écrit sous la forme voulue.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons

$$T' = \tau_{n, \kappa_n} \circ \dots \circ \tau_{1, \kappa_1}(T) = \tau_{n, \kappa'_n} \circ \dots \circ \tau_{1, \kappa'_1}(T).$$

Par le lemme 8.2.4, on a

$$\tau_{n-1, \kappa_{n-1}} \circ \dots \circ \tau_{1, \kappa_1}(T) \in \mathcal{T}'_{n-1}(T) \text{ et } \tau_{n-1, \kappa'_{n-1}} \circ \dots \circ \tau_{1, \kappa'_1}(T) \in \mathcal{T}'_{n-1}(T).$$

En utilisant la définition de  $\tau_{i, \kappa}$ , il suit  $p_n^T - \kappa_n = p_n^{T'} = p_n^T - \kappa'_n$ . D'où :  $\kappa_n = \kappa'_n$ . En appliquant l'hypothèse d'induction au tableau  $\tau_{n, \kappa_n}^{-1}(T') \in \mathcal{T}'_{n-1}(T)$  on obtient  $\kappa_i = \kappa'_i$  pour  $i \leq n - 1$ .

(b) Ci-dessus nous avons obtenu  $\tau_{n, \kappa_n}^{-1}(T') \in \mathcal{T}'_{n-1}(T)$  et l'égalité  $\kappa_n = p_n^T - p_n^{T'}$ . Le point (b) se déduit par induction.  $\square$

### 8.2.6. Définition de la longueur $l(T')$

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ . On écrit

$$T' = \tau_{n, \kappa_n} \circ \dots \circ \tau_{1, \kappa_1}(T)$$

selon les termes de la proposition précédente. Puis on pose :

$$l(T') := \sum_{i=1}^n \kappa_i.$$

Cas  $Y = Y_0$ . D'après cette définition, on obtient

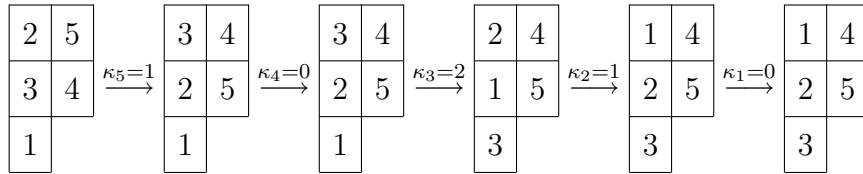
$$l(T'_\sigma) = l_B(\sigma) \text{ pour tout } \sigma \in \Sigma_n.$$

### 8.2.7. Remarque

Le point (b) de la proposition suggère une manière de calculer  $l(T')$ , qui consiste à reconstruire  $T$  d'après  $T'$ . Cette méthode est analogue à la méthode mentionnée dans §8.1.2.3). Après la  $i$ -ème étape, les numéros  $n, n - 1, \dots, n - i + 1$  ont été remis à la bonne place. Pour être replacée à son tour, l'entrée  $n - i$ , doit être déplacée de  $\kappa$  rangs vers le bas. On choisit alors  $\kappa_{n-i} = \kappa$  et on applique la transformation  $\tau_{n-i, \kappa_{n-i}}^{-1}$ .

*Exemple.* Soit  $T' := \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$ . En remplaçant successivement 5, 4, 3, 2 et 1, de la

manière décrite ci-dessus, on reconstruit  $T$  étape par étape :



On obtient alors :  $l(T') = 4$ .

Interprétons maintenant la longueur  $l(T')$  comme un nombre d'inversions.

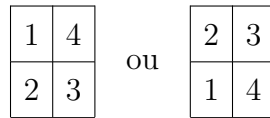
### 8.3. Longueur $l$ et nombre d'inversions d'un tableau lignes-standard

#### 8.3.1. Inversion dans un tableau lignes-standard

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. On appelle *inversion de  $T'$*  un couple  $(i, j)$  où  $i$  et  $j$  sont des numéros d'une même colonne de  $T'$ , vérifiant  $i < j$ , et tels que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

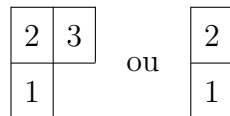
- (1) Les numéros  $i$  et  $j$  ont des numéros  $i'$  et  $j'$  voisins à droite respectifs dans  $T'$  et on a  $i' > j'$ .

Par exemple  $(1, 2)$  est une inversion dans le tableau



- (2) Le numéro  $i$  n'a pas de case à sa droite dans  $T'$  et  $i$  est situé strictement en dessous de  $j$  dans le tableau  $T'$ .

Par exemple  $(1, 2)$  est encore une inversion dans le tableau



On note  $\text{Inv}(T')$  l'ensemble des inversions de  $T'$ .

*Exemple.* Considérons  $T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$  comme dans l'exemple précédent. Les inver-

sions de  $T'$  sont les couples :  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 3)$  et  $(4, 5)$ . Il suit  $\#\text{Inv}(T') = 4$ . Dans cet exemple on a l'égalité  $\#\text{Inv}(T') = l(T')$ . Cette égalité est vraie dans le cas général.

On prouve en effet :

## 8.3.2. PROPOSITION

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. On a l'égalité

$$l(T') = \#\text{Inv}(T').$$

*Démonstration.* On raisonne par induction sur  $n$ .

Le cas  $n = 1$  est trivial. Supposons la propriété vraie pour  $n - 1 \geq 1$ . Soit  $T := {}^S T'$  la rectification standard de  $T'$ . Soit  $T'' := \tau_{n, \kappa_n}^{-1}(T')$ , où  $\kappa_n$  est l'entier de la proposition 8.2.5. On a alors  $T'' \in \mathcal{T}'_{n-1}(T)$  et

$$l(T') = \kappa_n + l(T'').$$

Considérons la décomposition suivante.

$$\#\text{Inv}(T') = \#\{(i, j) \in \text{Inv}(T') : j < n\} + \#\{(i, j) \in \text{Inv}(T') : j = n\}.$$

On a :  $\#\{(i, j) \in \text{Inv}(T') : j = n\} = \kappa_n$ . Par induction, il suffit d'établir l'égalité :

$$\{(i, j) \in \text{Inv}(T') : j < n\} = \text{Inv}(T'').$$

Soit un couple  $(i, j)$  tel que  $i < j < n$ . Les numéros  $i$  et  $j$  sont dans la même colonne de  $T'$  si et seulement si ils sont dans la même colonne de  $T''$ . Considérons les deux cas décrits dans la définition de la notion d'inversion dans un tableau.

- (1) Si  $i$  et  $j$  ont des numéros  $i'$  et  $j'$  voisins à droite respectifs dans  $T'$ , alors  $i$  et  $i'$  d'une part et  $j$  et  $j'$  d'autre part restent voisins dans  $T''$ . D'où :

$$(i, j) \in \text{Inv}(T') \Leftrightarrow (i, j) \in \text{Inv}(T'').$$

- (2) Si  $i$  n'a pas de voisin à sa droite dans  $T'$ , alors il en va de même dans  $T''$ . Comme les numéros  $i$  et  $j$  ont tout au plus été déplacés d'un rang vers le haut pour passer de  $T'$  à  $T''$ , ils ont la même position relative dans  $T'$  et  $T''$ , d'où :

$$(i, j) \in \text{Inv}(T') \Leftrightarrow (i, j) \in \text{Inv}(T'').$$

L'ensemble  $\text{Inv}(T'')$  ne contient pas de couple de la forme  $(i, n)$ . Il suit :

$$\{(i, j) \in \text{Inv}(T') : j < n\} = \text{Inv}(T'').$$

La preuve est complète.  $\square$

#### 8.4. Ressemblance entre la longueur $l$ et une longueur de Coxeter

Pour conclure cette section, nous comparons la longueur  $l$  avec la longueur de Bruhat lorsque celle-ci est vue comme une longueur de Coxeter (cf. §8.1.2.2)).

#### 8.4.1. Transpositions $\tau^{(p,q)}$

Soit  $r$  le nombre de lignes du diagramme  $Y$  et soient  $m_1 \geq \dots \geq m_r$  les longueurs de ces lignes.

Pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard, pour  $p \in \{1, \dots, r\}$  et  $q \geq 1$ , on note  $a_{p,q}(T')$  la  $q$ -ème entrée de la  $p$ -ème ligne de  $T'$ , on pose  $a_{p,q}(T') = +\infty$  si celle-ci n'existe pas (si  $q > m_p$ ).

Soient  $p \in \{1, \dots, r-1\}$  et  $q \geq 1$  vérifiant  $q \leq m_{p+1}$ . On note  $\mathcal{T}'^{(p,q)}(T)$  l'ensemble des tableaux  $T' \in \mathcal{T}'(T)$  tels que,

$$\text{Max}(a_{p,q}(T'), a_{p+1,q}(T')) < \text{Min}(a_{p,q+1}(T'), a_{p+1,q+1}(T')).$$

Soit  $T' \in \mathcal{T}'^{(p,q)}(T)$ . En intervertissant les  $q$  premières entrées des  $p$ -ème et  $(p+1)$ -ème lignes de  $T'$ , on obtient un autre tableau lignes-standard noté  $\tau^{(p,q)}(T')$ . On a  $\tau^{(p,q)}(T') \in \mathcal{T}'^{(p,q)}(T)$ . On construit ainsi une application

$$\tau^{(p,q)} : \mathcal{T}'^{(p,q)}(T) \rightarrow \mathcal{T}'^{(p,q)}(T).$$

On prouve :

#### 8.4.2. PROPOSITION

Soient  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et  $T' \in \mathcal{T}'(T)$  lignes-standard. Il existe une suite de couples d'entiers  $(p_1, q_1), \dots, (p_\lambda, q_\lambda)$  vérifiant  $p_i \in \{1, \dots, r-1\}$  et  $q_i \leq m_{p_i+1}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, \lambda\}$ , telle qu'on ait

$$T' = \tau^{(p_\lambda, q_\lambda)} \dots \tau^{(p_1, q_1)} T.$$

Le nombre  $l(T')$  est la longueur minimale d'une telle suite.

*Démonstration.* Observons que la transformation  $\tau_{i,\kappa}$  est le produit de  $\kappa$  transformations de la forme  $\tau^{(p,q)}$ . L'existence résulte alors de la proposition 8.2.5.

Supposons  $\lambda$  minimal. De ce qui précède, on déduit aussi  $l(T') \geq \lambda$ . D'autre part, pour tout  $T'' \in \mathcal{T}'^{(p,q)}(T)$ , on a clairement l'inégalité

$$\#\text{Inv}(\tau^{(p,q)} T'') \geq \#\text{Inv}(T'') - 1.$$

En écrivant  $T = (\tau^{(p_1, q_1)})^{-1} \dots (\tau^{(p_\lambda, q_\lambda)})^{-1} T'$ , on obtient  $0 \geq \#\text{Inv}(T') - \lambda$ . D'après la proposition 8.3.2, il suit  $\lambda \leq l(T')$ . La preuve est complète.  $\square$

Chapitre 9 . UNE FAMILLE DE PARAMÉTRISATIONS  
DES COMPOSANTES DE LA FIBRE DE SPRINGER.  
UNE FAMILLE DE DÉCOMPOSITIONS CELLULAIRES ADAPTÉES

On suppose de nouveau  $Y = Y(u)$  où  $u : V \rightarrow V$  est l'endomorphisme nilpotent déjà fixé. Soit  $l : \mathcal{T}'(Y) \rightarrow \mathbb{N}$  le nombre d'inversions défini dans le chapitre précédent.

Comme nous l'avons vu (cf. 4.7) la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  admet une partition en sous-ensembles localement fermés

$$\mathcal{B}_u = \bigcup_{T \in \mathcal{T}(Y)} \mathcal{B}_u^T.$$

Ce chapitre a principalement pour but la construction d'une décomposition cellulaire filtrante de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ , paramétrée par les tableaux lignes-standards de forme  $Y$ , dont les cellules  $C_u(T')$  (pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) ont les propriétés suivantes :

- (1) La cellule  $C_u(T')$  a codimension  $l(T')$ .
- (2) La cellule  $C_u(T')$  contient le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$ .
- (3) Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Les cellules  $C_u(T')$  (pour  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ ) forment une partition du sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$ .

Les deux dernières propriétés sont communes aux cellules de Shimomura  $S_u(T')$  (cf. chapitre 7).

En réalité nous allons présenter une construction un peu plus générale.

La proposition 4.7.1 résume certaines propriétés des ensembles  $\mathcal{B}_u^T$ . Nous donnons tout d'abord une manière plus générale de partitionner la variété  $\mathcal{B}_u$  en sous-ensembles localement fermés paramétrés par les tableaux standards de forme  $Y$  et nous établissons un résultat similaire à la proposition 4.7.1. Puis nous construisons une décomposition en cellules adaptée à cette nouvelle partition.

DÉFINITION DES ENSEMBLES  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

**9.1. Définition des ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho \subset \mathcal{B}_u$**

La partition de  $\mathcal{B}_u$  en sous-ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  repose sur une manière naturelle d'associer un tableau standard à un drapeau de  $\mathcal{B}_u$  : Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ , en considérant les restrictions de  $u$  aux termes successifs du drapeau on obtient une suite croissante de diagrammes  $Y(u|_{V_0}) \subset Y(u|_{V_1}) \subset \dots \subset Y(u|_{V_n})$  qui définit un tableau standard (cf. 4.2.2). L'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  (pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$ ) regroupe les drapeaux  $u$ -stables qui sont attachés au tableau  $T$  de cette façon-là.

Une manière plus générale consiste à considérer une suite croissante de sous-quotients du drapeau  $\mathcal{F}$  puis la suite des diagrammes des endomorphismes induits par  $u$  sur ces quotients. Formalisons cette définition.



### 9.1.1. L'ensemble $R_n$

Soit  $R_n$  l'ensemble des suites  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n}$  telles que

- la suite  $(\rho_i)_{1 \leq i \leq n}$  est décroissante,
- la suite  $(\rho'_i)_{1 \leq i \leq n}$  est croissante,
- on a  $\rho'_i - \rho_i = i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Autrement dit on a pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  :

$$(\rho_{i+1}, \rho'_{i+1}) = (\rho_i - 1, \rho'_i) \quad \text{ou} \quad (\rho_{i+1}, \rho'_{i+1}) = (\rho_i, \rho'_i + 1).$$

Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Comme les sous-espaces  $V_i$  et  $V_j$  sont stabilisés par  $u$ , une application quotient  $u|_{V_j/V_i} : V_j/V_i \rightarrow V_j/V_i$  est induite. Cette application est encore nilpotente et on lui associe un diagramme de Young  $Y(u|_{V_j/V_i})$ , au sens de §4.5.

### 9.1.2. Les sous-ensembles $\mathcal{B}_{u,T}^\rho \subset \mathcal{B}_u$

Soit  $\rho \in R_n$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Rappelons (cf. §4.2) que le tableau  $T$  définit une suite de diagrammes de Young  $Y_0(T) \subset Y_1(T) \subset \dots \subset Y_n(T) = Y$ .

On définit  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho = \mathcal{B}_{u,T}^\rho(V)$  comme l'ensemble des drapeaux  $u$ -stables  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$  tels que  $Y(u|_{V_{\rho'_i}/V_{\rho_i}}) = Y_i(T)$  pour tout  $i$ .

*Exemple.*

(a) Si  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la suite définie par  $\rho_i = 0$  et  $\rho'_i = i$  pour tout  $i$ , alors on a  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho = \mathcal{B}_u^T$ .

(b) Soit  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n}$  la suite définie par  $\rho_i = n - i$  et  $\rho'_i = n$  pour tout  $i$ . On pose  $\mathcal{B}_{u,T} = \mathcal{B}_{u,T}^\rho$ . On a ainsi

$$\mathcal{B}_{u,T} = \{ \mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u : Y(u|_{V_n/V_i}) = Y_{n-i}(T), \forall i \in \{0, \dots, n\} \}.$$

Les sous-espaces images  $\text{Im } u^q$  ( $q \geq 0$ ) forment un drapeau partiel sur l'espace  $V$ . Soit  $Q \subset GL(V)$  le sous-groupe parabolique formé par les automorphismes qui fixent ce drapeau partiel. L'action naturelle du groupe  $Q$  sur  $V$  induit une action sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$ . On peut voir que  $\mathcal{B}_{u,T}$  s'obtient comme l'intersection de  $\mathcal{B}_u$  avec une  $Q$ -orbite.

*Remarque.* Il est peu probable qu'en général l'ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  s'obtienne comme l'intersection de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  avec une orbite parabolique de la variété drapeau  $\mathcal{B}$ .

### 9.1.3. Relation de dualité

À  $T \in \mathcal{T}(Y)$  fixé les ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  et  $\mathcal{B}_{u,T}$  sont duaux. Soit plus généralement  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n} \in R_n$ . Si on pose  $\rho^* = (n - \rho'_i, n - \rho_i)_{1 \leq i \leq n}$ , alors les sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  et  $\mathcal{B}_{u,T}^{\rho^*}$  sont liés par une relation de dualité et sont isomorphes. Nous détaillerons ces affirmations dans §9.7.

Voyons maintenant que les sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  ainsi définis possèdent des propriétés semblables aux ensembles  $\mathcal{B}_u^T$ .

## 9.2. THÉORÈME

Supposons  $Y = Y(u)$ . On fixe une suite  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n} \in R_n$  qui définit une partition de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  en sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ , pour  $T$  parcourant  $\mathcal{T}(Y)$ , l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y$ . Les propriétés suivantes sont satisfaites :

(a) Les sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  (pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$ ) sont localement fermés dans  $\mathcal{B}_u$ , irréductibles et non-singuliers.

(b) On a l'égalité  $\dim \mathcal{B}_{u,T}^\rho = \dim \mathcal{B}_u$  pour tout  $T \in \mathcal{T}(Y)$ .

(c) Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On a

$$\overline{\mathcal{B}_{u,T}^\rho} \subset \bigcup_{S \preceq T} \mathcal{B}_{u,S}^\rho$$

où la réunion est prise sur les tableaux standards  $S \in \mathcal{T}(Y)$  vérifiant la relation de dominance  $S \preceq T$ .

(d) Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. L'adhérence du sous-ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho \subset \mathcal{B}_u$  est une composante irréductible de  $\mathcal{B}_u$ .

(e) Toute composante irréductible de  $\mathcal{B}_u$  s'obtient de cette manière.

La preuve de ce théorème est répartie entre les sections 9.6 et 9.8.

### 9.2.1. Composantes irréductibles $K_T^\rho \subset \mathcal{B}_u$

Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, on note  $K_T^\rho$  l'adhérence du sous-ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho \subset \mathcal{B}_u$ . De cette manière les sous-variétés  $(K_T^\rho)_{T \in \mathcal{T}(Y)}$  sont les composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .

Fixons  $T \in \mathcal{T}(Y)$ . Le tableau standard  $T$  définit une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  au sens de §4.7.2. Soit  $\rho \in R_n$ . D'après ce qui précède il existe un tableau  $T^\rho \in \mathcal{T}(Y)$  tel que  $K^T = K_{T^\rho}^\rho$ . La description de l'application  $T \mapsto T^\rho$  fait l'objet du chapitre 10.

Les ensembles  $\mathcal{B}_{u,T^\rho}^\rho$ , pour  $\rho$  parcourant  $R_n$ , forment une famille d'ouverts denses et non-singuliers de la composante  $K^T$ . En général ces ouverts ne recouvrent pas  $K^T$ , ni même la partie lisse de  $K^T$ . Supposons par exemple :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$  mais échappe à tous les ensembles  $\mathcal{B}_{u,T^\rho}^\rho$ . La première affirmation se démontre à l'aide du chapitre 14. La seconde affirmation s'obtient en utilisant les résultats du chapitre 10 et le paragraphe suivant où l'on décrit les points fixes du tore contenus dans chaque sous-ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ .

### 9.3. Points fixes du tore contenus dans les ensembles $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$

On a fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$  une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$  (cf. §4.5.2), soit  $H \subset GL(V)$  le tore maximal formé par les automorphismes diagonaux dans cette base.

Rappelons que les points fixes de  $H$  contenus dans  $\mathcal{B}_u$  sont les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  (pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard) introduits dans §4.6.

Fixons  $\rho \in R_n$ . Décrivons les points fixes du tore qui appartiennent au sous-ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ . Rappelons qu'on a observé dans §4.8 que les points fixes de  $H$  contenus dans  $\mathcal{B}_u^T$  sont paramétrés par les éléments de  $\mathcal{T}'(T)$ , l'ensemble des tableaux lignes-standards de rectification standard  $T$ . On décrit maintenant les points fixes contenus dans les ensembles plus généraux  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ .

### 9.3.1. Tableaux lignes-standards transformés $\rho \star T'$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a :

$$(\rho_i, \rho'_i) = (\rho_{i-1} - 1, \rho'_{i-1}) \text{ ou bien } (\rho_i, \rho'_i) = (\rho_{i-1}, \rho'_{i-1} + 1).$$

Dans le premier cas on pose  $\widehat{\rho}_i = \rho_i + 1$  et on pose dans le second cas  $\widehat{\rho}_i = \rho'_i$ . Ainsi on construit une suite  $(\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_n)$  vérifiant pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$]\rho_i, \rho'_i] = \{\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_i\}.$$

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. Dans le tableau  $T'$  on remplace chaque entrée  $i \in \{1, \dots, n\}$  par l'entier  $\widehat{\rho}_i$ . Après cette opération, il est possible que les lignes du tableau ne soient plus croissantes, dans ce cas on remet simplement les entrées de chaque ligne dans l'ordre croissant. Le tableau lignes-standard ainsi obtenu est alors noté  $\rho \star T'$ .

*Exemple.* Soit  $\rho = ((2, 3), (2, 4), (1, 4), (1, 5), (0, 5))$ . La suite  $\widehat{\rho} = (3, 4, 2, 5, 1)$  est alors construite. On transforme par exemple :

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline \end{array} = \rho \star T'.$$

On prouve au cours de §9.6 :

### 9.3.2. PROPOSITION

*Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Les points fixes du tore contenus dans l'ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  sont exactement les drapeaux  $\mathcal{F}_{\rho \star T'}$ , pour  $T'$  parcourant l'ensemble  $\mathcal{T}'(T)$  des tableaux lignes-standards de rectification standard  $T$ .*

## Décomposition cellulaire de la fibre de Springer adaptée à la partition en sous-ensembles $(\mathcal{B}_{u,T}^\rho)_{T \in \mathcal{T}(Y)}$ .

Voyons maintenant que chaque ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  admet une décomposition cellulaire filtrante paramétrée par les éléments de l'ensemble  $\mathcal{T}'(T)$ , dont la codimension des cellules est donnée par le nombre d'inversions  $l$  du chapitre 8. À  $\rho \in R_n$  fixé, la réunion des décompositions cellulaires des ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  forme une décomposition cellulaire filtrante de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ . On a en effet :

#### 9.4. THÉORÈME

Supposons  $Y = Y(u)$ . Fixons une suite  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n} \in R_n$  qui définit une partition de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  en sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ , pour  $T$  parcourant  $\mathcal{T}(Y)$ , l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y$ . La fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  admet une décomposition cellulaire filtrante en cellules  $C_u^\rho(T')$ , pour  $T'$  parcourant  $\mathcal{T}'(Y)$ , l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y$ , telle que :

- (a) Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. La cellule  $C_u^\rho(T') \subset \mathcal{B}_u$  a codimension  $l(T')$ .
- (b) Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Le point fixe  $\mathcal{F}_{\rho \star T'}$  est contenu dans la cellule  $C_u^\rho(T')$ .
- (c) Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On a

$$\mathcal{B}_{u,T}^\rho = \bigsqcup_{T' \in \mathcal{T}'(T)} C_u^\rho(T')$$

où la réunion est prise sur l'ensemble des tableaux lignes-standards de rectification standard  $T$ .

De ce théorème il résulte une égalité en cohomologie, à  $T$  fixé, entre les ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  et  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ . Ces ensembles sont-ils liés par une équivalence plus forte ? Nous n'avons pas approfondi cette question.

Le preuve de ce théorème intervient dans §9.8. On conclut cette partie d'exposition des résultats par une dernière observation.

#### 9.5. Une famille de composantes irréductibles non singulières de $\mathcal{B}_u$

Soit  $T^{\min} = T_Y^{\min}$  l'élément minimal de  $\mathcal{T}(Y)$  pour la relation de dominance (cf. §4.2.3). D'après le point (c) du théorème 9.2, il suit que la composante irréductible  $K_{T^{\min}}^\rho$  coïncide avec l'ensemble localement fermé  $\mathcal{B}_{u,T^{\min}}^\rho$ , pour tout  $\rho \in R_n$ . Par conséquent la composante  $K_{T^{\min}}^\rho$  est non-singulière pour tout  $\rho \in R_n$ . D'après le théorème 9.4 elle admet une décomposition en cellules paramétrée par les tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(T^{\min})$ , dont la codimension des cellules est donnée par le nombre d'inversions  $l$ . D'après la proposition 1.4.1 les nombres de Betti de la composante  $K_{T^{\min}}^\rho$  sont connus, et ne dépendent pas de  $\rho$ .

## DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS ÉNONCÉS

Nous montrons tout d'abord une partie du théorème 9.2 (le point (b) et le fait que les ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  sont localement fermés) et la proposition 9.3.2, en utilisant certaines propriétés des endomorphismes quotients  $u|_{V_j/V_i}$ .

Puis les autres assertions du théorème 9.2 et le théorème 9.4 seront montrés conjointement.

### 9.6. Propriétés des endomorphismes quotients $u|_{V_j/V_i}$

Soit un drapeau  $u$ -stable  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Comme nous l'avons vu, pour deux entiers  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ , on peut considérer l'endomorphisme quotient

$$u|_{V_j/V_i} : V_j/V_i \rightarrow V_j/V_i$$

et le diagramme de Young  $Y(u|_{V_j/V_i})$  qui lui est associé. Nous étudions l'application qui, au drapeau  $\mathcal{F}$ , associe le diagramme  $Y(u|_{V_j/V_i})$ .

Tout d'abord nous prouvons une propriété de semi-continuité de cette application. De cette propriété nous pourrions déduire que les sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho \subset \mathcal{B}_u$  sont localement fermés ainsi qu'une démonstration du point (c) du théorème 9.2.

Puis nous décrivons le diagramme  $Y(u|_{V_j/V_i})$  dans le cas où le drapeau  $\mathcal{F}$  est le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  associé à un tableau lignes-standard. Nous en déduisons une démonstration de la proposition 9.3.2.

Nous prouvons tout d'abord le résultat suivant.

#### 9.6.1. PROPOSITION

Soient deux entiers  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . Pour tout  $q \geq 0$  et  $c \geq 0$ , le sous-ensemble

$$F_{j/i,q,c} = \left\{ \mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u : \text{rang } u|_{V_j/V_i}^q \leq c \right\}$$

est fermé dans  $\mathcal{B}_u$ .

On utilise une autre écriture de l'ensemble  $F_{j/i,q,c}$  :

#### 9.6.2. Affirmation

(Mêmes notations.) On a l'égalité :

$$F_{j/i,q,c} = \left\{ \mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u : \dim (V_i + u^q(V_j)) \leq c + i \right\}.$$

*Démonstration de l'affirmation.* Il suffit de montrer l'affirmation pour  $q = 1$ . On retrouve le cas général en faisant jouer à  $u^q$  le rôle de  $u$ .

Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . L'espace  $\text{Im } u|_{V_j/V_i}$  est l'image du morphisme composé

$$V_j \xrightarrow{s} V_j/V_i \xrightarrow{u|_{V_j/V_i}} V_j/V_i.$$

Le noyau de ce dernier est l'espace  $V_j \cap u^{-1}(V_i)$ . Par le théorème du rang, il suit

$$\text{rang } u|_{V_j/V_i} = j - \dim V_j \cap u^{-1}(V_i).$$

L'application linéaire

$$V_j \cap u^{-1}(V_i) \rightarrow u(V_j) \cap V_i, \quad v \mapsto u(v)$$

est surjective et son noyau est  $V_j \cap \ker u$ . Il résulte :

$$\begin{aligned} \dim V_j \cap u^{-1}(V_i) &= \dim V_j \cap \ker u + \dim u(V_j) \cap V_i \\ &= \dim \ker u|_{V_j} + \dim u(V_j) + i - \dim (V_i + u(V_j)) \\ &= j + i - \dim (V_i + u(V_j)) \end{aligned}$$

en appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme  $u|_{V_j} : V_j \rightarrow V_j$ . D'où :

$$\text{rang } u|_{V_j/V_i} = \dim (V_i + u(V_j)) - i.$$

L'affirmation découle facilement de cette égalité.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* Un drapeau complet  $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{B}$  étant fixé, l'application naturelle  $GL(V) \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $g \mapsto g \cdot \mathcal{F}_0$  est un fibré vectoriel. La variété drapeau admet un recouvrement par des ouverts trivialisants. Il suffit de montrer que l'intersection  $F_{j/i,q,c} \cap \Omega$  est fermée dans  $\Omega$ , pour tout ouvert trivialisant  $\Omega \subset \mathcal{B}$ .

Soit  $\Omega \subset \mathcal{B}$  un tel ouvert. Il existe une immersion ouverte  $\Omega \rightarrow V^n$ , faisant correspondre à un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \Omega$  une base  $(e_1(\mathcal{F}), \dots, e_n(\mathcal{F}))$  adaptée à ce drapeau (i.e.  $V_i = \langle e_1(\mathcal{F}), \dots, e_i(\mathcal{F}) \rangle$  pour tout  $i$ ). D'après §9.6.2, l'intersection  $F_{j/i,q,c} \cap \Omega$  est l'ensemble des drapeaux  $\mathcal{F} \in \Omega$  tels que

$$\text{rang } \{e_1(\mathcal{F}), \dots, e_i(\mathcal{F}), u^q(e_j(\mathcal{F})), \dots, u^q(e_j(\mathcal{F}))\} \leq c + i.$$

Si l'on reporte dans une matrice les coordonnées des vecteurs de cette famille dans une base de  $V$ , cette propriété de majoration du rang se traduit par l'annulation des mineurs de taille  $c + i + 1$ . L'intersection  $F_{j/i,q,c} \cap \Omega$  est donc fermée dans  $\Omega$ . La preuve est complète.  $\square$

On déduit de la proposition 9.6.1 une partie de la démonstration du point (a) du théorème 9.2.

### 9.6.3. Démonstration du fait que les ensembles $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ sont localement fermés

Pour un entier  $q \geq 1$ , le rang de l'endomorphisme  $u^q|_{V_j/V_i}$  est le nombre de cases dans les  $q$  premières colonnes du diagramme  $Y(u|_{V_j/V_i})$ . L'ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  s'obtient donc comme une intersection finie de certains ensembles  $F_{j/i,q,c}$  et de certains complémentaires de ces ensembles. Il résulte de la proposition précédente que  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  est localement fermé dans  $\mathcal{B}_u$  pour tout  $\rho \in R_n$  et  $T \in \mathcal{T}(Y)$ .  $\square$

En outre, on obtient cette seconde version de la proposition 9.6.1 :

## 9.6.4. PROPOSITION

Soient deux entiers  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . Posons  $j' := j - i$ . Soit  $Y_a \in \mathcal{Y}_{j'}$  un diagramme de Young à  $j'$  cases. L'ensemble

$$F_{j/i, Y_a} := \{ \mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u : Y(u_{|V_j/V_i}) \preceq Y_a \}$$

est une partie fermée de  $\mathcal{B}_u$ .

On déduit :

## 9.6.5. Démonstration du point (c) du théorème 9.2.

La démonstration découle facilement de la proposition 9.6.4.  $\square$

Nous déterminons  $Y(u_{|V_j/V_i})$  dans le cas où le drapeau  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u$  est fixé par le tore, autrement dit  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T'}$ , pour un certain tableau  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Construisons d'abord, d'après  $T'$ , des diagrammes de Young  $Y_{j/i}(T')$ .

9.6.6. Les diagrammes de Young  $Y_{j/i}(T')$ 

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard et soient deux entiers  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . Soit  $T'_{|j/i}$  le sous-tableau obtenu d'après  $T'$  en retirant les entrées  $1, \dots, i, j + 1, \dots, n$ . Notons  $m_1^{(j/i)} \geq \dots \geq m_r^{(j/i)}$  les longueurs des lignes (mises dans l'ordre décroissant) de ce sous-tableau  $T'_{|j/i}$ . On définit  $Y_{j/i}(T')$  comme le diagramme de Young dont les lignes ont longueurs  $m_1^{(j/i)}, \dots, m_r^{(j/i)}$ .

*Exemple.* Supposons

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 5 & 8 & \\ \hline \end{array}$$

On obtient alors

$$Y_{8/4}(T') = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Notons  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$ . Les cases de  $Y$  de numéros  $i+1, \dots, j$  dans  $T'$  induisent une base de Jordan de l'endomorphisme quotient  $u_{|V_j/V_i}$ . On en déduit l'énoncé suivant.

## 9.6.7. LEMME

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. Soit  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$  le point fixe du tore associé au tableau  $T'$ . On a l'égalité  $Y(u_{|V_j/V_i}) = Y_{j/i}(T')$ .

Nous prouvons maintenant la proposition 9.3.2.

### 9.6.8. Démonstration de la proposition 9.3.2.

Observons que le nombre d'entrées  $j$  de la  $p$ -ème ligne de  $T'$  telles que  $1 \leq j \leq i$  égale le nombre d'entrées  $j$  de la  $p$ -ème ligne du tableau transformé  $\rho \star T'$  telles que  $\rho_i + 1 \leq j \leq \rho'_i$ . Par définition du diagramme  $Y_{\rho'_i/\rho_i}(\rho \star T')$ , il suit l'égalité

$$Y_{\rho'_i/\rho_i}(\rho \star T') = Y_i(T') \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Supposons  $T' \in \mathcal{T}(T)$ . On a alors  $Y_i(T') = Y_i(T)$  pour tout  $i$ , d'où il suit  $\mathcal{F}_{\rho \star T'} \in \mathcal{B}_{u,T}^\rho$ . D'autre part l'application  $T' \mapsto \rho \star T'$  est clairement bijective et les ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$ , pour  $T$  parcourant  $\mathcal{T}(Y)$ , réalisent une partition de  $\mathcal{B}_u$ . Il suit que les points fixes du tore contenus dans  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  sont exactement les drapeaux  $\mathcal{F}_{\rho \star T'}$  pour  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ .  $\square$

Revenons maintenant en détail sur la discussion de §9.1.3.

## 9.7. Une dualité parmi les partitions de $\mathcal{B}_u$ considérées

À toute suite  $\rho \in R_n$  on associe une suite duale  $\rho^* \in R_n$  telle que les sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  et  $\mathcal{B}_{u,T}^{\rho^*}$  soient isomorphes pour tout  $T$ .

Soit  $V^*$  l'espace vectoriel dual de  $V$ . L'endomorphisme nilpotent  $u : V \rightarrow V$  induit un endomorphisme dual

$$u^* : V^* \rightarrow V^*, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ u$$

nilpotent et qui a même réduite de Jordan que  $u$ , d'où  $Y(u^*) = Y(u) = Y$ . À un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  correspond le sous-espace vectoriel orthogonal

$$W^\dagger = \{\lambda \in V^* : \lambda(w) = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

### 9.7.1. Suite $\rho^*$ duale de $\rho \in R_n$

Soit une suite  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On pose

$$\rho^* = (n - \rho'_i, n - \rho_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

*Exemple.* Comme dans l'exemple 9.1.2.(a), soit  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)$  la suite définie par  $\rho_i = 0$  et  $\rho'_i = i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pour tout  $T \in \mathcal{T}(Y)$  on a alors  $\mathcal{B}_u^T = \mathcal{B}_{u,T}^\rho$  (cf. exemple 9.1.2.(a)) et  $\mathcal{B}_{u,T} = \mathcal{B}_{u,T}^{\rho^*}$  (cf. exemple 9.1.2.(b)).

On montre maintenant la proposition suivante.

### 9.7.2. PROPOSITION

(a) *L'application*

$$\begin{aligned} \varphi_{u,T}^\rho : \quad \mathcal{B}_{u,T}^\rho &\rightarrow \mathcal{B}_{u^*,T}^{\rho^*} \\ (V_0, \dots, V_n) &\mapsto (V_n^\dagger, \dots, V_0^\dagger) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de variétés algébriques.*

(b) *Pour tout  $T' \in \mathcal{T}'(T)$  lignes-standard de rectification standard  $T$ , on a l'égalité*

$$\varphi_{u,T}^\rho(\mathcal{F}_{\rho \star T'}) = \mathcal{F}_{\rho^* \star T'}.$$



*Démonstration.* La démonstration est classique et élémentaire.  $\square$

*Exemple.* En particulier on obtient  $\mathcal{B}_u^T \cong \mathcal{B}_{u,T}$  pour tout  $T \in \mathcal{T}(Y)$ , selon les notations de l'exemple 9.1.2.

Présentons enfin l'argumentation qui nous conduira jusqu'à la démonstration des théorèmes 9.2 et 9.4.

### 9.8. Propriétés inductives des ensembles $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$

On fixe une suite  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n} \in R_n$ . On fixe  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Pour compléter la preuve des théorèmes 9.2 et 9.4, il faut et suffit : d'une part montrer que l'ensemble  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  est lisse, irréductible et de même dimension que  $\mathcal{B}_u$ , d'autre part construire une décomposition cellulaire filtrante de  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$  paramétrée par  $\mathcal{T}'(T)$ , l'ensemble des tableaux lignes-standards de rectification standard  $T$  (cf. 4.4) et possédant les propriétés du théorème. D'après la proposition 9.7.2, on peut supposer sans perte de généralité :

$$(\rho_{n-1}, \rho'_{n-1}) = (0, n-1).$$

Le sous-tableau  $T|_{n-1}$ , obtenu d'après  $T$  en retirant l'entrée  $n$ , a la forme d'un diagramme de Young. Notons  $\widehat{Y}$  ce diagramme de Young.

#### 9.8.1. Morphisme $\Phi : \mathcal{B}_{u,T}^\rho \rightarrow \mathcal{H}_u^T$

Soit  $\mathcal{H}_u$  la variété des hyperplans  $W \subset V$  stables par  $u$ . De manière équivalente  $\mathcal{H}_u$  est l'ensemble des hyperplans contenant  $\text{Im } u$ . Soit  $\mathcal{H}_u^T \subset \mathcal{H}_u$  l'ensemble des hyperplans  $u$ -stables  $W \subset V$  tels que  $Y(u|_W) = \widehat{Y}$ . Il est clair que  $\mathcal{H}_u^T$  est une sous-variété localement fermée de  $\mathcal{H}_u$ . Le morphisme naturel

$$\Phi : \mathcal{B}_{u,T}^\rho \rightarrow \mathcal{H}_u^T, (V_0, \dots, V_n) \mapsto V_{n-1}$$

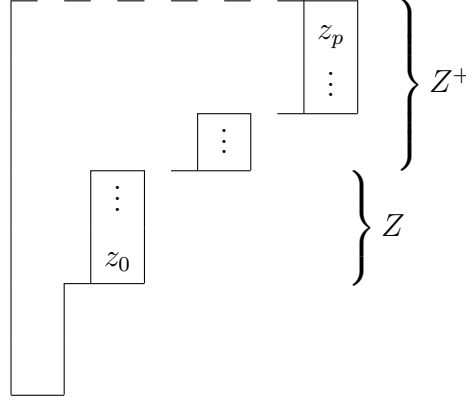
est bien défini et il est surjectif : pour s'en convaincre il est suffisant d'observer que  $Z(u)$ , le sous-groupe centralisateur de  $u$ , agit transitivement sur  $\mathcal{H}_u^T$  et que le morphisme  $\Phi$  est  $Z(u)$ -équivariant.

Notre argument repose sur la trivialité locale de ce morphisme.

#### 9.8.2. Notations

Rappelons qu'on a fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$ , une base de Jordan de forme  $Y$  (cf. 4.5.2). On note  $z_0$  la case de  $Y$  qui porte le numéro  $n$  dans le tableau  $T$ . La case  $z_0$  est donc un coin de  $Y$ . Puis, partant de  $z_0$  et parcourant le diagramme de bas en haut, on note  $z_1, z_2, \dots, z_p$  la dernière case de chaque ligne rencontrée. Ainsi  $z_p$  est la

dernière case de la première ligne de  $Y$ .



On note  $Z \subset \{z_0, \dots, z_p\}$  le sous-ensemble formé par les cases qui sont dans la même colonne que  $z_0$ . On pose  $\hat{p} = \#Z$ . D'où :  $Z = \{z_0, \dots, z_{\hat{p}-1}\}$ . On note  $Z^+ = \{z_{\hat{p}}, \dots, z_p\}$  les autres cases. On considère les sous-espaces

- $F = \langle e_x : x \in |Y| - (Z \sqcup Z^+) \rangle$
- $E = \langle e_z : z \in Z \rangle$
- $E^+ = \langle e_z : z \in Z^+ \rangle$ .

Il est clair qu'un hyperplan  $W \subset V$  est contenu dans  $\mathcal{H}_u^T$  si et seulement si  $W \supset F$  et  $W \not\supset E$ . De cette manière on obtient que la variété  $\mathcal{H}_u^T$  est un ouvert de variété des hyperplans contenant  $F$ . Il résulte facilement que la variété  $\mathcal{H}_u^T$  est irréductible et de dimension  $p$ .

On définit certains hyperplans de  $\mathcal{H}_u^T$  : pour  $\kappa \in \{0, \dots, \hat{p} - 1\}$  on note

$$W_\kappa = \langle e_x : x \in |Y| - \{z_\kappa\} \rangle.$$

Pour  $\kappa \in \{0, \dots, p\}$  on note  $e[\kappa] = e_{z_\kappa}$  le vecteur de la base associé à la case  $z_\kappa$ .

### 9.8.3. Certains sous-groupes de $Z(u)$

On rappelle que  $Z(u)$  désigne le sous-groupe formé par les automorphismes  $g \in GL(V)$  qui commutent avec  $u$ . On définit certains sous-groupes de  $Z(u)$ . Pour cela observons que le groupe  $GL(E \oplus E^+)$  s'injecte naturellement dans  $Z(u)$ . En effet un élément  $g \in GL(E \oplus E^+)$  s'étend de manière unique en un élément  $\bar{g} \in Z(u)$  qui fixe les vecteurs associés aux cases de  $Y$  qui sont situées sous la ligne contenant  $z_0$ . Ainsi les quatre sous-groupes de  $GL(E \oplus E^+)$  suivants peuvent être assimilés à des sous-groupes de  $Z(u)$  :

- On note

$$U = \{g \in GL(E \oplus E^+) : g.e[\kappa] - e[\kappa] \in \langle e[\kappa'] : \kappa' < \kappa \rangle \forall \kappa \in \{0, \dots, p\}\}$$

le sous-groupe unipotent de  $GL(E \oplus E^+)$ .

- On note  $U(Z)$  l'ensemble des éléments  $g \in U$  tels que  $\text{Im}(g - \text{id}_{E \oplus E^+}) \subset E$ .  
Soit  $\kappa \in \{0, \dots, \hat{p} - 1\}$ .
- On note  $U(\kappa)$  l'ensemble des éléments  $g \in U$  tels que  $\text{Im}(g - \text{id}_{E \oplus E^+}) \subset k.e[\kappa]$ .
- On note  $G(\kappa)$  l'ensemble des éléments  $g \in GL(E \oplus E^+)$  tels que  $g.e[\kappa] = e[\kappa]$  et  $\text{Im}(g - \text{id}_{E \oplus E^+}) \subset k.e[\kappa]$ .

On a ainsi des isomorphismes de variétés  $G(\kappa) \cong \mathbb{A}^p$  et  $U(\kappa) \cong \mathbb{A}^{p-\kappa}$ .

Enfin pour  $\kappa \in \{0, \dots, \widehat{p} - 1\}$ , l'élément  $\tau_\kappa \in GL(E \oplus E^+)$  défini par :

$$\begin{aligned} \tau_\kappa e[0] &= e[\kappa] \\ \tau_\kappa e[\kappa'] &= e[\kappa' - 1] \quad \text{si } \kappa' \in \{1, \dots, \kappa\} \\ \tau_\kappa e[\kappa'] &= e[\kappa'] \quad \text{si } \kappa' \in \{\kappa + 1, \dots, p\} \end{aligned}$$

s'identifie lui aussi à un élément de  $Z(u)$ .

L'élément  $\tau_\kappa \in Z(u)$  ainsi défini est lié au cycle  $\tau_{n,\kappa} : \mathcal{T}'(T) \rightarrow \mathcal{T}'(T)$  introduit dans 8.2.3 comme le montre le lemme suivant. Rappelons que  $\mathcal{T}'_{n-1}(T)$  désigne l'ensemble des tableau  $T' \in \mathcal{T}'(T)$  tels que  $n$  est à la même place dans  $T$  et  $T'$ .

#### 9.8.4. LEMME

Soit  $T' \in \mathcal{T}'_{n-1}(T)$ . On a :  $\tau_\kappa \cdot \mathcal{F}_{T'} = \mathcal{F}_{\tau_{n,\kappa} T'}$  et  $\tau_\kappa \cdot \mathcal{F}_{\rho \star T'} = \mathcal{F}_{\rho \star \tau_{n,\kappa} T'}$ .

*Démonstration.* La première égalité est claire. Observons qu'elle est vérifiée de manière plus générale pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  tel que  $n$  est à la même place dans  $T$  et  $T'$ . La seconde égalité découle de la première et de l'égalité  $\rho \star \tau_{n,\kappa} T' = \tau_{n,\kappa} \rho \star T'$ , qui elle-même découle de la définition du tableau  $\rho \star T'$ .  $\square$

#### 9.8.5. Décomposition cellulaire et recouvrement ouvert de la variété $\mathcal{H}_u^T$

Les groupes  $U(Z)$  et  $G(\kappa)$  agissent de façon naturelle sur la variété  $\mathcal{H}_u^T$ .

##### ★ Décomposition cellulaire de $\mathcal{H}_u^T$ .

La variété  $\mathcal{H}_u^T$  est réunion des  $U(Z)$ -orbites des éléments  $W_\kappa$ , pour  $\kappa \in \{0, \dots, \widehat{p} - 1\}$ . Soit  $C_\kappa = U(Z).W_\kappa$ . L'application

$$U(\kappa) \rightarrow C_\kappa, \quad g \mapsto g.W_\kappa$$

est un isomorphisme. Il suit :  $C_\kappa \cong \mathbb{A}^{p-\kappa}$ . On obtient ainsi une décomposition cellulaire filtrante de  $\mathcal{H}_u^T$ . La cellule  $C_0$  est ouverte.

##### ★ Recouvrement ouvert.

L'application

$$G(\kappa) \rightarrow \mathcal{H}_u^T, \quad g \mapsto g.W_\kappa$$

est une immersion ouverte. On note  $\mathcal{O}_\kappa$  son image. On a ainsi l'isomorphisme  $\mathcal{O}_\kappa \cong \mathbb{A}^p$ .

#### 9.8.6. Trivialité locale du morphisme $\Phi$

On note  $\widehat{V} = W_0$ ,  $\widehat{u} = u|_{W_0}$ ,  $\widehat{Y} = Y(\widehat{u})$ ,  $\widehat{T} = T|_{n-1}$  et  $\widehat{\rho} = (\rho_i, \rho'_i)_{i \leq n-1}$ . On considère alors le sous-ensemble  $\mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^{\widehat{\rho}}$  de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_{\widehat{u}} = \mathcal{B}_{\widehat{u}}(\widehat{V})$ . On montre que  $\Phi$  est un fibré de fibre  $\mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^{\widehat{\rho}}$  qui trivialise au dessus des ouverts  $\mathcal{O}_\kappa$  et des cellules  $C_\kappa$ . Soit  $\mathcal{B}_{\widehat{u}} \hookrightarrow \mathcal{B}_u$ ,  $\mathcal{F} \mapsto \overline{\mathcal{F}}$  l'inclusion naturelle.

(A) *Trivialité locale.*

Pour  $\kappa \in \{0, \dots, \widehat{p} - 1\}$  on a en effet un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Xi_\kappa : G(\kappa) \times \mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^\rho &\xrightarrow{\sim} \Phi^{-1}(\mathcal{O}_\kappa) \\ (g, \mathcal{F}) &\mapsto g \cdot \tau_\kappa \cdot \overline{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

tel que  $\Xi_\kappa = \Phi \circ \pi_\kappa$ , où  $\pi_\kappa : G(\kappa) \times \mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^\rho \rightarrow \mathcal{O}_\kappa$  est le morphisme  $(g, \mathcal{F}) \mapsto g \cdot W_\kappa$ .

(B) *Trivialité au dessus des cellules.*

Pour  $\kappa \in \{0, \dots, \widehat{p} - 1\}$  on déduit de (A) un isomorphisme

$$\begin{aligned} \chi_\kappa : U(\kappa) \times \mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^\rho &\xrightarrow{\sim} \Phi^{-1}(C_\kappa) \\ (g, \mathcal{F}) &\mapsto g \cdot \tau_\kappa \cdot \overline{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

qui vérifie  $\chi_\kappa = \Phi \circ \pi_\kappa$ , où  $\pi_\kappa : U(\kappa) \times \mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^\rho \rightarrow C_\kappa$  est le morphisme  $(g, \mathcal{F}) \mapsto g \cdot W_\kappa$ .

On montre maintenant les deux théorèmes.

#### 9.8.7. *Démonstration du théorème 9.2*

On raisonne par récurrence. À l'aide de la trivialité locale, on obtient que  $\mathcal{B}_{u, T}^\rho$  admet un recouvrement par des ouverts lisses, irréductibles, de même dimension que  $\mathcal{B}_u$  et d'intersection non-vide. Cet argument complète la démonstration du théorème.  $\square$

#### 9.8.8. *Démonstration du théorème 9.4*

On raisonne par récurrence. Par hypothèse de récurrence, la variété  $\mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^\rho$  admet une décomposition en cellules qui vérifie propriétés du théorème. Les cellules de  $\mathcal{B}_{\widehat{u}, \widehat{T}}^\rho$  sont notées  $\widehat{C}(T'')$ , elles sont paramétrées par les éléments de l'ensemble  $\mathcal{T}'(\widehat{T})$ . Rappelons que la fonction  $\mathcal{T}'_{n-1}(T) \rightarrow \mathcal{T}'(\widehat{T})$ ,  $T'' \mapsto T''_{|n-1}$  est bijective.

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(T)$ . On a  $T' = \tau_{n, \kappa} T''$  avec  $T'' \in \mathcal{T}'_{n-1}(T)$  (cf. §8.2.5). On pose :

$$C_u^\rho(T') = \chi_\kappa(\widehat{C}(U(\kappa) \times T''_{|n-1})).$$

Les cellules obtenues forment une décomposition cellulaire filtrante de  $\mathcal{B}_{u, T}^\rho$ . Par récurrence, on a l'égalité

$$\dim C_u^\rho(T') = \dim \mathcal{B}_{\widehat{u}} - l(T'') + p - \kappa.$$

D'après la définition de la longueur  $l$  et le théorème 4.5.1, il suit :

$$\text{codim } C_u^\rho(T') = \dim \mathcal{B}_u.$$

Enfin le fait que le drapeau  $\mathcal{F}_{\rho \star T'}$  est contenu dans la cellule  $C_u^\rho(T')$  découle facilement du lemme 9.8.4.

La démonstration est complète.  $\square$

## Chapitre 10 . LIEN ENTRE LES DIFFÉRENTES PARAMÉTRISATIONS

Dans le chapitre précédent, nous avons construit une présentation différentes paramétrisations des composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ . Notons  $Y = Y(u)$ . Une composante de  $\mathcal{B}_u$  s'obtient d'une part comme la fermeture  $K^T$  de  $\mathcal{B}_u^T$  pour un certain  $T \in \mathcal{T}(Y)$  (cf. §4.7.2) et d'autre part, pour  $\rho \in R_n$ , comme la fermeture  $K_S^\rho$  de  $\mathcal{B}_{u,S}^\rho$  pour un certain  $S \in \mathcal{T}(Y)$  (cf. §9.2.1). À l'aide des résultats de M. van Leeuwen (cf. [28]) nous décrivons les couples  $(T, S)$  de tableaux standards tels que  $K^T = K_S^\rho$ .

### 10.1. Un retour sur la combinatoire des tableaux de Young : tableaux gauches et jeu de Taquin

On rappelle en premier lieu les notions de diagramme et tableau gauches. Le livre de W. Fulton [4] pourra être consulté pour plus de détails.

#### 10.1.1. Diagrammes gauches

Un *diagramme de Young gauche* s'obtient à partir d'un diagramme de Young  $Y'$  en retirant les cases d'un sous-diagramme  $Y \subset Y'$ . Notons  $\Xi_m$  l'ensemble des diagrammes gauches contenant  $m$  cases.

*Exemple.* Supposons

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad Y' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \xi = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

On a ainsi  $Y \subset Y'$  et  $\xi$  s'obtient d'après  $Y'$  en retirant les cases du sous-diagramme  $Y$ . D'où :  $\xi \in \Xi_4$ .

La donnée d'un diagramme gauche  $\xi$  n'est pas équivalente à la donnée d'un couple de diagrammes de Young  $(Y, Y')$  vérifiant  $Y \subset Y'$ . En effet l'écriture  $\xi = Y' - Y$  n'est pas unique, comme le montrent l'exemple suivant.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = \dots$$

En revanche il y a un choix minimal de  $Y$  et  $Y'$  que nous décrivons maintenant. On appelle *coin* d'un diagramme de Young une case sans voisine de droite ou du dessous. Il existe un unique couple de diagrammes de Young  $(Y, Y')$  tels que  $\xi = Y' - Y$  et qui vérifient :

- le diagramme  $Y'$  a même hauteur et même largeur que  $\xi$ ,
- les diagrammes  $Y$  et  $Y'$  n'ont pas de coin en commun.

Une case de  $Y$  est alors appelée *case intérieure de  $\xi$* . Un coin de  $Y$  est appelé *coin intérieur de  $\xi$*  tandis qu'un coin de  $Y'$  est appelé *coin extérieur de  $\xi$* .

### 10.1.2. Tableaux gauches

Soit  $\xi$  un diagramme gauche. Un *tableau gauche de forme  $\xi$*  est une numérotation des cases de  $\xi$  par des entiers telle que :

- chaque ligne est croissante de gauche à droite,
- chaque colonne est strictement croissante de haut en bas.

*Exemple.* Le tableau

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline & 5 \\ \hline 4 & 7 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}$$

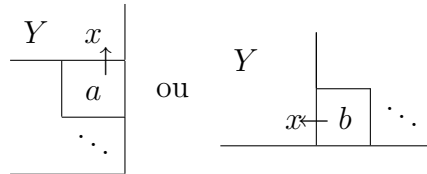
est donc un tableau gauche de forme  $\xi$ , où  $\xi$  est le diagramme gauche de l'exemple précédent.

### 10.1.3. Jeu de Taquin

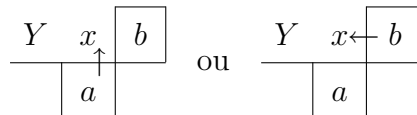
Soit  $\xi$  un diagramme gauche et soit  $\Gamma$  un tableau gauche de forme  $\xi$ . À partir de  $\Gamma$  on construit un tableau de Young  ${}^Y\Gamma$  par jeu de Taquin :

Tout d'abord on choisit  $x$  un coin intérieur de  $\xi$ . La case  $x$  est voisine au moins d'une entrée de  $\Gamma$ , située à sa droite ou sous elle.

- Si la case  $x$  a seulement une entrée voisine dans  $\Gamma$ , cette dernière est déplacée dans la case  $x$ .



- Si la case  $x$  est voisine de deux entrées de  $\Gamma$ , une entrée  $a$  sous elle et une entrée  $b$  à sa droite, alors on déplace  $a$  ou  $b$  vers la case  $x$ , suivant que  $a, b$  vérifient  $a \leq b$  ou  $b < a$ .



Dans tous les cas une entrée de  $\Gamma$  a été déplacée vers la case  $x$ . Si l'entrée en question était située dans un coin extérieur de  $\xi$ , alors on a formé un autre tableau gauche. Sinon, un trou a apparu dans le nouveau tableau. Ce trou a à sa droite et/ou sous lui une ou deux entrées de  $\Gamma$ . On comble ce trou en y déplaçant l'une ou l'autre entrée suivant la règle énoncée ci-dessus. Et ainsi de suite. À la fin on déplace une entrée d'un coin extérieur de  $\xi$  et on obtient un nouveau tableau gauche (sans trou). Ce nouveau tableau a strictement moins de cases intérieures que  $\Gamma$ . En menant cette opération autant de fois que nécessaire, on finit par obtenir un tableau gauche sans aucune case intérieure, donc un tableau de Young. Ce

tableau final est noté  ${}^Y\Gamma$ . Il ne dépend pas du choix du coin intérieur que l'on comble en premier à chaque étape de la construction.

*Exemple.* Considérons le tableau gauche suivant :

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline & 5 \\ \hline 4 & 7 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}$$

Par jeu de Taquin, on obtient par exemple cette suite de tableaux gauches :

$$\Gamma \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 7 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 \\ \hline \end{array} = {}^Y\Gamma.$$

Le tableau  $\Gamma$  a deux coins intérieurs. On a choisi de combler l'un tout d'abord. La suite aurait été différente si on avait opté pour l'autre mais le tableau final serait resté le même.

La propriété suivante est élémentaire.

#### 10.1.4. LEMME

Soit  $\Gamma$  un tableau gauche et soit  $\Gamma'$  un sous-tableau de  $\Gamma$ . La diagramme de Young dont le tableau de Young  ${}^Y\Gamma'$  a la forme est un sous-diagramme du diagramme de Young pareillement associé à  ${}^Y\Gamma$ .

## 10.2. Théorème de van Leeuwen

Dans §9.6.7, nous avons décrit le diagramme  $Y(u_{|V_j/V_i})$  associé à l'endomorphisme quotient  $u_{|V_j/V_i} : V_j/V_i \rightarrow V_j/V_i$  dans le cas où  $V_i \subset V_j$  sont deux termes du drapeau  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$  pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  (cf. §4.6). Dans [28], M. van Leeuwen décrit le diagramme  $Y(u_{|V_j/V_i})$  lorsque le drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  est un élément générique d'une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ , pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard.

### 10.2.1. Diagrammes de Young $Y_{j/i}^T$ associés à un tableau standard $T$

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard. Soient  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . Notons  $T_{|j/i}$  le sous-tableau de  $T$  constitué des cases de numéros  $i + 1, \dots, j$ . Ce sous-tableau est un tableau gauche et on construit à partir de  $T_{|j/i}$  un tableau de Young  ${}^Y T_{|j/i}$  par jeu de Taquin. Le tableau  ${}^Y T_{|j/i}$  a la forme d'un diagramme de Young à  $j - i$  cases. Ce diagramme de Young est noté  $Y_{j/i}^T$ .

*Exemple.* Supposons :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 7 \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

On obtient alors  $T_{|7/3} = \Gamma$ , où  $\Gamma$  est le tableau gauche de l'exemple précédent. D'où  ${}^Y T_{7/3} = {}^Y \Gamma$ . D'après l'exemple précédent, on obtient :

$$Y_{7/3}^T = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Le théorème de van Leeuwen s'énonce ainsi.

### 10.2.2. THÉORÈME (cf. [28].§3.3)

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard. Soient deux entiers  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i < j$ . Les drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in K^T$  tels que  $Y(u_{|V_j/V_i}) = Y_{j/i}^T$  forment une partie dense de la composante irréductible  $K^T$ .

## 10.3. Correspondance entre les différentes paramétrisations des composantes irréductibles de $\mathcal{B}_u$

Fixons une suite  $\rho = (\rho_i, \rho'_i)_{1 \leq i \leq n} \in R_n$ . Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, décrivons le tableau  $T^\rho$  tel que les composantes  $K^T$  (cf. §4.7.2) et  $K_{T^\rho}^\rho$  (cf. §9.2.1) coïncident.

### 10.3.1. Définition de la transformation $\mathcal{T}(Y) \rightarrow \mathcal{T}(Y)$ , $T \mapsto T^\rho$

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On pose  $Y_0 = \emptyset$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  soit  $Y_i = Y_{\rho'_i/\rho_i}^T$  (cf. §10.2.1). La suite de diagrammes de Young  $(Y_0, \dots, Y_n)$  est croissante (cf. §10.1.4), elle définit un tableau standard (cf. §4.2.2). Ce tableau est noté  $T^\rho$ .

Du théorème 10.2.2 il découle alors :

### 10.3.2. PROPOSITION

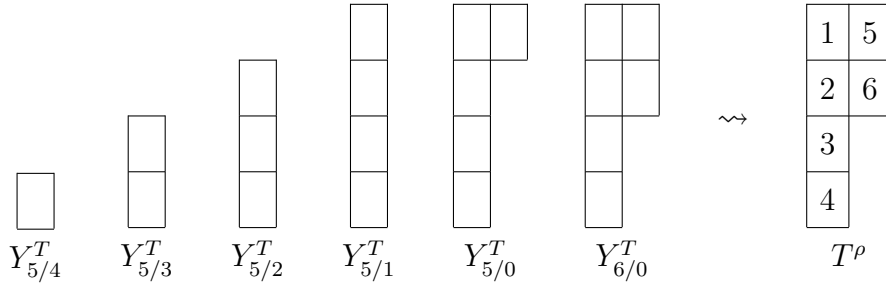
Soit  $\rho = (\rho_i, \rho'_i) \in R_n$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. La composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  définie comme la fermeture du sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  coïncide avec la composante  $K_{T^\rho}^\rho \subset \mathcal{B}_u$  définie comme l'adhérence de  $\mathcal{B}_{u, T^\rho}^\rho$ .

*Exemple.* Soit  $\rho = ((4, 5), (3, 5), (2, 5), (1, 5), (0, 5), (0, 6))$ . Supposons

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$



On obtient :



*Remarque.* Dans cet exemple, on a trouvé  $T^\rho = T^{\min}$ , où  $T^{\min}$  désigne le tableau standard de forme  $Y$  minimal pour la relation de dominance entre tableaux standards (cf. §4.2.3). D'après la proposition précédente, on obtient  $K^T = K_{T^{\min}}^\rho$ . D'après §9.5 la composante  $K^T$  est nonsingulière.

### 10.3.3. Calcul pratique du tableau $T^\rho$

Soit  $\rho \in R_n$  et soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Considérons  $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_n)$  la suite d'indices de §9.3.1. On présente une manière pratique de construire le tableau  $T^\rho$ , à partir de  $T$  en retirant successivement les numéros  $\hat{\rho}_n, \dots, \hat{\rho}_1$ .

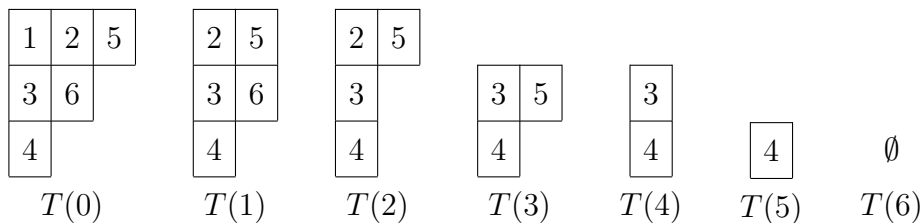
- D'abord on pose  $T(0) = T$ .
- Après la  $(i - 1)$ -ème étape on a construit un tableau de Young  $T(i - 1)$  d'entrées  $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n-i+1}$ . À la  $i$ -ème étape on retire le numéro  $\hat{\rho}_{n-i+1}$  du tableau  $T(i - 1)$ . Observons que  $\hat{\rho}_{n-i+1}$  est soit maximal, soit minimal parmi  $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{n-i+1}$ . Donc le tableau ainsi-obtenu est soit un tableau de Young, soit un tableau gauche. Dans le premier cas le tableau est noté  $T(i)$ . Dans le second cas on note  $T(i)$  sa rectification par jeu de Taquin.

Les formes des tableaux  $T(0), \dots, T(n)$  forment une suite décroissante de diagrammes de Young, qui définit un tableau standard. Ce dernier est précisément le tableau  $T^\rho$  cherché.

*Exemple.* Soit  $\rho = ((3, 4), (2, 4), (2, 5), (1, 5), (1, 6), (0, 6))$ . On obtient donc  $\hat{\rho} = (4, 3, 5, 2, 6, 1)$ . Supposons

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

On retire successivement les entrées 1, 6, 2, 5, 3, 4 et on obtient



D'où on trouve :

$$T^\rho = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

#### 10.3.4. La transformation inverse $T \mapsto {}^\rho T$

Soit  $\rho \in R_n$  et soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Considérons de nouveau la suite d'indices  $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_n)$  associée à  $\rho$  au sens de §9.3.1. On construit une suite de tableaux  $T(1), \dots, T(n)$  en insérant successivement les entrées  $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_n$  dans le tableau vide. Rappelons que  $Y_i(T)$  désigne le diagramme de Young qui est la forme du sous-tableau  $T|_i$ .

- D'abord on pose  $T(0) = \emptyset$ .
- Après la  $(i - 1)$ -ème étape on a construit un tableau de Young  $T(i - 1)$  d'entrées  $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_i$  et de forme  $Y_{i-1}(T)$ . Le diagramme de Young  $Y_i(T)$  s'obtient d'après  $Y_{i-1}(T)$  en ajoutant une case  $x$ . À l'étape  $i$  le but est d'insérer l'entrée  $\hat{\rho}_i$  dans le tableau  $T(i - 1)$  de telle sorte que  $Y_i(T)$  soit la forme du nouveau tableau. Deux cas sont à considérer, selon que  $\hat{\rho}_i$  est maximal ou minimal parmi  $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_i$ . Dans le premier cas on insère l'entrée  $\hat{\rho}_i$  dans la case  $x$  et on note  $T(i)$  le tableau obtenu. Dans le second cas, la case  $x$  est voisine d'une ou deux entrées de  $T(i - 1)$ . Si  $x$  n'a qu'une entrée voisine dans  $T(i - 1)$ , alors on déplace celle-ci vers  $x$ . Si la case  $x$  a une entrée  $a$  voisine à sa gauche et une entrée  $b$  voisine du dessus, alors on déplace  $a$  ou  $b$  vers la case  $x$ , suivant qu'on a  $a > b$  ou  $a < b$ . Ainsi on obtient un tableau avec un trou que l'on comble de la même manière en considérant ses entrées voisines de gauche et du dessus. Ainsi de suite, jusqu'à ce que le trou soit situé dans le coin en haut à gauche du tableau. Alors on met l'entrée  $\hat{\rho}_i$  dans cette case devenue libre et on note  $T(i)$  le tableau ainsi-obtenu.

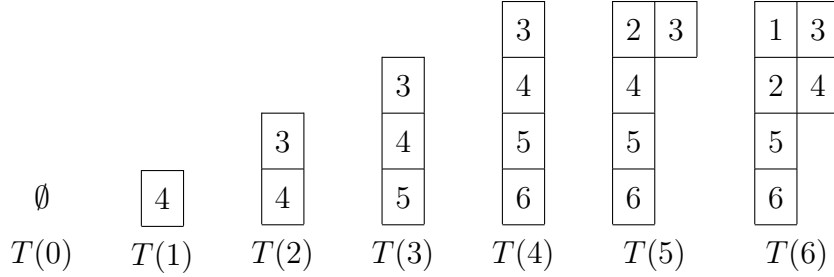
Enfin on pose  ${}^\rho T = T(n)$ .

On obtient ainsi une application  $\mathcal{T}(Y) \rightarrow \mathcal{T}(Y)$ ,  $T \mapsto {}^\rho T$ .

*Exemple.* Soit  $\rho = ((3, 4), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 6), (0, 6))$ . On obtient ainsi  $\hat{\rho} = (4, 3, 5, 6, 2, 1)$ . Supposons

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T = T^{\min} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$$

On construit successivement :



D'où finalement  ${}^\rho T = T(6)$ .

On prouve maintenant :

### 10.3.5. PROPOSITION

Soit une suite  $\rho \in R_n$ . Les applications  $T \mapsto T^\rho$  et  $T \mapsto {}^\rho T$  sont inverses l'une de l'autre. Les composantes irréductibles  $K^{\rho T}$  et  $K_T^\rho$  de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  coïncident.

*Démonstration.* La seconde assertion est conséquence de la première, en vertu de la proposition 10.3.2. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$ . Soient  $T(0), T(1), \dots, T(n)$  les tableaux successifs obtenus suivant la construction de §10.3.3. D'où :  $T(0) = T$  et  $T(n) = T^\rho$ . Soient  $T^\rho(0), T^\rho(1), \dots, T^\rho(n)$  les tableaux successifs obtenus par la construction de §10.3.4, à partir tableau  $T^\rho$ . D'où :  $T^\rho(0) = T^\rho$  et  $T^\rho(n) = {}^\rho(T^\rho)$ . Par définition de  $T^\rho$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , les tableaux  $T(n-i)$  et  $T^\rho(i)$  ont même forme  $Y_i(T^\rho)$  et mêmes entrées  $\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_i$ .

On montre  $T(n-i) = T^\rho(i)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . On raisonne par induction sur  $i$ . L'égalité est immédiate pour  $i = 0$ . Supposons l'égalité vraie pour  $i-1 \geq 0$ .

Dans le cas où  $\widehat{\rho}_i$  est maximal parmi  $\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_i$ , les tableaux  $T(n-i+1)$  et  $T^\rho(i-1)$  coïncident et sont obtenus respectivement à partir des tableaux  $T(n-i)$  et  $T^\rho(i)$ , en retirant l'entrée  $\widehat{\rho}_i$ . Comme les tableaux  $T(n-i)$  et  $T^\rho(i)$  ont même forme et mêmes entrées, il suit  $T(n-i) = T^\rho(i)$ .

Dans le cas où  $\widehat{\rho}_i$  est maximal parmi  $\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_i$ , le tableau  $T(n-i+1)$  est obtenu d'après  $T(n-i)$  en retirant d'abord l'entrée  $\widehat{\rho}_i$  puis par du jeu de Taquin. Par construction le tableau  $T^\rho(i-1)$  s'obtient pareillement d'après  $T^\rho(i)$  : d'abord en retirant l'entrée  $\widehat{\rho}_i$  puis par du jeu de Taquin. Comme les tableaux  $T(n-i)$  et  $T^\rho(i)$  ont même forme et mêmes entrées, il suit  $T(n-i) = T^\rho(i)$  par injectivité du jeu de Taquin dans ce cadre.

On a prouvé  $T(n-i) = T^\rho(i)$  pour tout  $i$ . Pour  $i = n$  on obtient  $T = {}^\rho(T^\rho)$ . On montre de même  $T = ({}^\rho T)^\rho$ .  $\square$

*Remarque.* Dans l'exemple précédent on a calculé  $S = {}^\rho(T^{\min})$ . D'après la proposition on a  $K^S = K^{\rho(T^{\min})} = K_{T^{\min}}^\rho$ . D'après §9.5, la composante  $K^S$  est non-singulière.

#### 10.4. Quelques remarques à propos du cas où $Y(u)$ a deux colonnes

On termine cette section par quelques observations. On s'intéresse au cas "deux-colonnes" : le diagramme de Young  $Y = Y(u)$  a (au plus) deux colonnes de hauteurs respectives  $r$  et  $\check{r}$ .

Rappelons que, si  $\Gamma$  est un tableau gauche, alors on note  ${}^Y\Gamma$  sa rectification par jeu de Taquin. Étudions la rectification par jeu de Taquin d'un tableau gauche à deux colonnes.

##### 10.4.1. LEMME

Soit  $\Gamma$  un tableau gauche à deux colonnes. Soient  $a_1 < \dots < a_\pi$  les entrées de sa première colonne et soient  $b_1 < \dots < b_{\pi'}$  les entrées de sa seconde colonne. Soit  $\hat{\pi} \in \{0, \dots, \pi\}$  maximal tel qu'il existe des indices  $j_1 < \dots < j_{\hat{\pi}}$  tels qu'on ait  $a_p \leq b_{j_p}$  pour tout  $p \in \{1, \dots, \hat{\pi}\}$ . On choisit les indices  $j_1 < \dots < j_{\hat{\pi}}$  minimaux parmi ceux qui possèdent cette propriété. Le tableau de Young  ${}^Y\Gamma$  obtenu d'après  $\Gamma$  par jeu de Taquin est le tableau à deux colonnes, d'entrées  $a_1, \dots, a_\pi, b_1, \dots, b_{\pi'}$  et dont  $b_{j_1}, \dots, b_{j_{\hat{\pi}}}$  sont les entrées de la seconde colonne.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le nombre de cases du tableau  $\Gamma$ . Si  $\pi = 0$  ou  $\pi' = 0$ , la propriété est clairement vraie. Dans le cas général on suppose  $\pi \geq 1$  et  $\pi' \geq 1$ . On distingue deux cas :

(1) Supposons  $b_1 < a_1$ .

Le sous-tableau  $\Gamma' = \Gamma - \{b_1\}$  est un tableau gauche dont tous les numéros sont strictement supérieurs à  $b_1$  :

$$\Gamma = \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline \Gamma' \\ \hline a_\pi \\ \hline \end{array}$$

Par récurrence on obtient  $C_2({}^Y\Gamma') = \{b_{j_1}, \dots, b_{j_{\hat{\pi}}}\}$ . Ainsi  ${}^Y\Gamma$  est la rectification par jeu de Taquin du tableau gauche suivant :

$$\Gamma'' = \left. \begin{array}{|c|} \hline b_1 \\ \hline * \quad b_{j_1} \\ \hline \vdots \quad \vdots \\ \hline * \quad b_{j_{\hat{\pi}}} \\ \hline * \\ \hline \end{array} \right\} {}^Y\Gamma'$$

Comme  $b_1$  est strictement inférieur à toutes les entrées de  $\Gamma'$ , il suit :

$${}^Y\Gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline b_1 & b_{j_1} \\ \hline * & b_{j_2} \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline * & b_{j_{\tilde{\pi}}} \\ \hline * & \\ \hline \end{array}$$

Ainsi  $C_2({}^Y\Gamma) = \{b_{j_1}, \dots, b_{j_{\tilde{\pi}}}\}$ .

(2) Supposons  $a_1 \leq b_1$ .

En particulier on a  $j_1 = 1$ . Considérons le sous-tableau  $\Gamma' = \Gamma - \{a_1, b_1\}$  :

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline & b_1 \\ \hline a_1 & b_2 \\ \hline & \Gamma' \\ \hline a_{\pi} & \\ \hline \end{array}$$

On obtient facilement :

$${}^Y\Gamma = \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_1 \\ \hline & {}^Y\Gamma' \\ \hline \end{array}$$

Par récurrence on a  $C_2({}^Y\Gamma') = \{b_{j_2}, \dots, b_{j_{\tilde{\pi}}}\}$ . Il résulte :  $C_2({}^Y\Gamma) = \{b_{j_1}, \dots, b_{j_{\tilde{\pi}}}\}$ .

La démonstration est complète.  $\square$

10.4.2. *Un tableau lignes-standard particulier  $T'_T \in \mathcal{T}'(T)$ .*

À  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard on associe un tableau lignes-standard  $T'_T \in \mathcal{T}'(T)$  de la manière suivante. Soient  $a_1 < \dots < a_r$  les entrées de la première colonne de  $T$  et soient  $b_1 < \dots < b_{\tilde{r}}$  les entrées de sa seconde colonne. On choisit  $\tilde{r}$  indices  $i_1, \dots, i_{\tilde{r}}$  de la manière suivante : Tout d'abord on choisit  $i_1 \in \{1, \dots, r\}$  maximal tel que  $a_{i_1} < b_1$ . Puis  $i_1, \dots, i_{p-1}$  ayant été choisis, soit  $i_p \in \{1, \dots, r\} - \{i_1, \dots, i_{p-1}\}$  maximal tel que  $a_{i_p} < b_p$ .

Soient  $a'_1 < \dots < a'_{r-\tilde{r}}$  les éléments de l'ensemble  $\{a_1, \dots, a_r\} - \{a_{i_1}, \dots, a_{i_{\tilde{r}}}\}$  dans l'ordre croissant. On définit  $T'_T$  comme le tableau lignes-standard :

$$T'_T = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{i_1} & b_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline a_{i_{\tilde{r}}} & b_{\tilde{r}} \\ \hline a'_1 & \\ \hline \vdots & \\ \hline a'_{r-\tilde{r}} & \\ \hline \end{array}$$

*Exemple.* On obtient par exemple :

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & 7 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow T'_T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Rappelons que les sous-ensembles  $\mathcal{B}_{u, T^\rho}^\rho \subset \mathcal{B}_u$  sont denses dans la composante  $K^T$  pour tout  $\rho \in R_n$  (cf. proposition 10.3.2). Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'_T}$  associé au tableau lignes-standard  $T'_T$  (cf. §4.6) possède la propriété remarquable d'être contenu dans chacun :

#### 10.4.3. PROPOSITION

*Supposons que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On a  $\mathcal{F}_{T'_T} \in \mathcal{B}_{u, T^\rho}^\rho$  pour toute suite  $\rho \in R_n$ .*

Rappelons que les diagrammes de Young  $Y_{j/i}(T'_T)$  et  $Y_{j/i}^T$  ont été introduits respectivement dans §9.6.6 et §10.2.1. D'après le lemme 9.6.7 et les définitions de  $T^\rho$  et  $\mathcal{B}_{u, T^\rho}^\rho$ , la proposition découle de l'affirmation suivante :

#### 10.4.4. Affirmation

On a l'égalité  $Y_{j/i}(T'_T) = Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ .

*Démonstration de l'affirmation.* Soient  $a_1 < \dots < a_r$  (resp.  $b_1 < \dots < b_{\tilde{r}}$ ) les entrées de la première (resp. seconde) colonne de  $T$ . Soient  $a_{\delta+1}, \dots, a_\pi, b_{\delta'+1}, \dots, b_{\pi'}$  les entrées de  $T$  contenues dans l'intervalle entier  $\{i+1, \dots, j\}$ . Notons  $\hat{\pi}$  la hauteur de la seconde colonne du diagramme  $Y_{j/i}^T$  et  $\hat{\pi}'$  la hauteur de la seconde colonne du diagramme  $Y_{j/i}(T'_T)$ .

Par définition de  $Y_{j/i}(T'_T)$ , il existe des entrées  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{\hat{\pi}'}$  parmi  $a_{\delta+1}, \dots, a_\pi$  et  $\tilde{b}_1 < \dots < \tilde{b}_{\hat{\pi}'}$  parmi  $b_{\delta+1}, \dots, b_\pi$  telles que  $\tilde{a}_p < \tilde{b}_p$  pour tout  $p \in \{1, \dots, \hat{\pi}'\}$ . On déduit  $a_{\delta+p} < \tilde{b}_p$  pour tout  $p$ . D'après le lemme 10.4.1, on obtient  $\hat{\pi} \geq \hat{\pi}'$ .

Le lemme 10.4.1 montre d'autre part qu'il existe des indices  $\delta' + 1 \leq j_1 < \dots < j_{\widehat{\pi}} \leq \pi'$  tels que  $a_p < b_{j_p}$  pour tout  $p \in \{1, \dots, \widehat{\pi}\}$ . Soit  $(i_1, \dots, i_{\widehat{\pi}})$  la suite d'indices définie dans §10.4.2. Par définition de cette suite, l'indice  $i_{j_p}$  est tel que  $a_{i_{j_p}} < b_{j_p}$  et  $i_{j_p}$  est maximal parmi  $\{1, \dots, r\} - \{i_1, \dots, i_{j_p-1}\}$  pour cette propriété. Si  $a_p \leq a_{i_{j_p}}$ , alors on pose  $\widetilde{a}_p = a_{i_{j_p}}$  et  $\widetilde{b}_p = b_{j_p}$ . Si au contraire  $a_p > a_{i_{j_p}}$ , alors on a  $p > i_{j_p}$  et il existe  $\kappa \in \{1, \dots, j_p - 1\}$  tel que  $p = \iota_\kappa$ . On pose alors  $\widetilde{a}_p = a_p$  et  $\widetilde{b}_p = b_\kappa$ . Dans les deux cas on a formé un couple  $(\widetilde{a}_p, \widetilde{b}_p)$  d'entrées contenues dans la même ligne de  $T'_T$  et telles que

$$i < a_p \leq \widetilde{a}_p < \widetilde{b}_p \leq b_{j_p} \leq j.$$

De plus dans cette dernière relation, la deuxième ou l'avant-dernière inégalité est une égalité. Il suit que les couples  $(\widetilde{a}_p, \widetilde{b}_p)$ , pour  $p$  parcourant  $\{\delta + 1, \dots, \widehat{\pi}\}$ , sont deux-à-deux distincts. Chaque couple  $(\widetilde{a}_p, \widetilde{b}_p)$  induit une ligne de longueur 2 dans le diagramme  $Y_{j/i}(T'_T)$ . Il suit :  $\widehat{\pi} \leq \widehat{\pi}'$ .

On obtient finalement  $\widehat{\pi} = \widehat{\pi}'$ , donc  $Y_{j/i}(T'_T) = Y_{j/i}^T$ . La démonstration est complète.  $\square$

*Remarques.*

- (a) En utilisant cette propriété et le point (c) du théorème 9.2, on obtient une autre preuve de la proposition 10.3.2, spécifique au cas où  $Y(u)$  a deux colonnes.  
 (b) Si  $Y$  a plus de deux colonnes, pour une suite  $\rho \in R_n$  donnée, les ensembles  $\mathcal{B}_u^T$  et  $\mathcal{B}_{u, T^\rho}^\rho$  n'ont pas toujours un point fixe en commun. Supposons par exemple

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Soit  $\rho = ((3, 4), (2, 4), (1, 4), (0, 4))$ . On a  $T^\rho = T$  et  $\mathcal{B}_{u, T^\rho}^\rho = \mathcal{B}_{u, T}$  (cf. exemple 9.1.2). L'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  contient un unique point fixe et l'ensemble  $\mathcal{B}_{u, T^\rho}^\rho$  ne le contient pas.

Chapitre 11 . APPLICATION AU CALCUL DES NOMBRES DE BETTI  
DE LA FIBRE DE SPRINGER  
ET DE CERTAINES DE SES COMPOSANTES

On suppose dans cette section  $k = \mathbb{C}$ . On note  $N = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$ . Le nombre  $N$  est connu d'après la proposition 4.5.1. Pour  $m \in \{0, \dots, N\}$  on définit le nombre de Betti :

$$b_m = \dim H^{2m}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q}).$$

Dans cette section on déduit des résultats précédents un moyen de calculer les nombres  $b_m$ .

**11.1. Calcul des dimensions des espaces de cohomologie à support compact des variétés  $\mathcal{B}_{u,T}^\rho$**

Fixons  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Rappelons que  $\mathcal{T}'(T)$  désigne l'ensemble des tableaux lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  de rectification standard  ${}^S T' = T$  au sens de §4.4. Rappelons que la fonction  $l : \mathcal{T}'(Y) \rightarrow \mathbb{N}$  a été définie dans le chapitre 8.

Pour  $m \in \{1, \dots, N\}$ , on définit

$$b_m^T = \dim H_c^{2m}(\mathcal{B}_{u,T}^\rho)$$

D'après le théorème 9.4 et la proposition 1.4.1, on obtient :

**11.1.1. PROPOSITION**

*Pour  $m \in \{0, \dots, N\}$ , on a l'égalité*

$$b_m^T = \#\{T' \in \mathcal{T}'(T) : l(T') = N - m\}.$$

Traduisons la formule définissant  $b_m^T$  d'une façon plus pratique.

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Rappelons que  $T_{|i}$  désigne le tableau obtenu d'après  $T$  en retirant les entrées  $i+1, \dots, n$ . On note  $p_i$  le numéro de la colonne de  $T$  qui contient  $i$  et  $\widehat{p}_i$  le nombre de lignes de  $T_{|i}$  de longueur  $p_i$ .

La proposition 8.2.5 et le théorème 9.4 impliquent le résultat suivant :

**11.1.2. PROPOSITION**

*Soit  $\rho \in R_n$ . Soit  $m \in \{0, \dots, N\}$ . On a l'égalité*

$$b_{N-m}^T = \#\{(\kappa_1, \dots, \kappa_n) : \kappa_i \in \{0, \dots, \widehat{p}_i - 1\}, \kappa_1 + \dots + \kappa_n = m\}.$$

Posons

$$\chi^T(q) := \sum_{m=0}^N b_{N-m}^T q^m.$$

Pour  $x \in \mathbb{N}$  on note  $[x]_q := 1 + q + \dots + q^{x-1}$ . D'après la proposition 11.1.2, on obtient :



## 11.1.3. PROPOSITION

On a l'égalité :

$$\chi^T(q) = \prod_{i=1}^n [\widehat{p}_i]_q.$$

*Exemple.* Soient

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$

On a  $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_3 = 1$  et  $\widehat{p}_2 = \widehat{p}_4 = \widehat{p}_5 = 2$ . D'où :

$$\chi^T(q) = [2]_q^3 = q^3 + 3q^2 + 3q + 1.$$

Il suit :

$$b_4^T = b_1^T = 1 \quad b_2^T = b_3^T = 3 \quad b_0^T = 0.$$

11.1.4. Application au calcul des nombres de Betti de certaines composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$ 

Soit  $T^{\min}$  le tableau standard de forme  $Y$  qui est minimal pour la relation de dominance (cf. §4.2.3).

Soit  $\rho \in R_n$ . Comme on l'a vu dans §9.5, le sous-ensemble  $\mathcal{B}_{u, T^{\min}}^\rho \subset \mathcal{B}_u$  est fermé et coïncide avec la composante irréductible  $K_{T^{\min}}^\rho$ . Ainsi on obtient pour tout  $m \in \{0, \dots, N\}$  :

$$\dim H^{2m}(K_{T^{\min}}^\rho, \mathbb{Q}) = \dim H_c^{2m}(\mathcal{B}_{u, T^{\min}}^\rho, \mathbb{Q}) = b_m^{T^{\min}}.$$

*Exemples.* (a) Supposons

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T^{\min} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$$

On obtient :

$$\chi^T(q) = [2]_q^2 \cdot [3]_q \cdot [4]_q = q^7 + 4q^6 + 8q^5 + 11q^4 + 11q^3 + 8q^2 + 4q + 1.$$

Il suit :

$$b_0^{T^{\min}} = b_7^{T^{\min}} = 1 \quad b_1^{T^{\min}} = b_6^{T^{\min}} = 4 \quad b_2^{T^{\min}} = b_5^{T^{\min}} = 8 \quad b_3^{T^{\min}} = b_4^{T^{\min}} = 11.$$

(b) Soit  $T$  l'un des deux tableaux

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$

D'après les exemples 10.3.1 et 10.3.4, il existe  $\rho \in R_n$  tel que  $T = T^\rho$ . Ainsi la composante irréductible  $K^T$  coïncide avec l'ensemble  $\mathcal{B}_{u, T^{\min}}^\rho$ . La composante  $K^T$  est donc non-singulière et on a pour  $m \in \{0, \dots, 7\}$  :

$$\dim H^{2m}(K^T, \mathbb{Q}) = b_m^{T^{\min}}.$$

## 11.2. Calcul des nombres de Betti de la fibre de Springer

La proposition suivante découle du théorème 9.4, en utilisant la proposition 1.4.1.

### 11.2.1. PROPOSITION

Pour  $m \in \{0, \dots, N\}$ , on a

$$b_{N-m} = \#\{T' \in \mathcal{T}'(Y) : l(T') = m\}.$$

On a pour tout  $m \in \{0, \dots, N\}$  l'égalité suivante :

$$b_{N-m} = \sum_{T \in \mathcal{T}(Y)} b_{N-m}^T.$$

Cette égalité permet d'appliquer les techniques de calcul des nombres  $b_m^T$  présentées ci-dessus au calcul des nombres de Betti  $b_m$ , comme l'illustre l'exemple suivant.

*Exemple.* Soit  $Y$  le diagramme de Young

$$Y := \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Le diagramme  $Y$  a  $N = 4$  cases. Les tableaux standards de forme  $Y$  sont les cinq tableaux suivants :

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad T_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad T_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}$$

On trouve :

$$\begin{array}{rcl}
\chi^{T_1}(q) & = & q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 3q + 1 \\
\chi^{T_2}(q) & = & q^4 + 3q^3 + 3q^2 + q \\
\chi^{T_3}(q) & = & q^4 + 2q^3 + q^2 \\
\chi^{T_4}(q) & = & q^4 + 2q^3 + q^2 \\
\chi^{T_5}(q) & = & q^4 + q^3 \\
\hline
\text{donc } b_4 = 5 & b_3 = 11 & b_2 = 9 \quad b_1 = 4 \quad b_0 = 1
\end{array}$$

### 11.3. Calcul inductif des nombres de Betti de la fibre de Springer

Soit  $d \in \{0, \dots, N\}$ . On note pour éviter les confusions :

$$b_m(Y) := \dim H^{2m}(\mathcal{B}_u, \mathbb{Q})$$

pour  $Y = Y(u)$ . Rappelons qu'on note  $N = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$ . On pose alors

$$\tilde{b}_m(Y) := b_{N-m}(Y)$$

pour tout  $m \in \{0, \dots, N\}$ . Par convention  $\tilde{b}_m(Y) = 0$  pour  $m \notin \{0, \dots, N\}$ .

On calcule les nombres  $\tilde{b}_m(Y)$  par induction sur  $Y$ .

Un *coin* de  $Y$  est une case de  $Y$  sans case voisine à sa droite ou en dessous d'elle. Soit  $|\widehat{Y}| \subset |Y|$  l'ensemble des coins de  $Y$ . Pour tout coin  $\widehat{c} \in |\widehat{Y}|$  on note  $Y \setminus \widehat{c}$  le diagramme de Young obtenu d'après  $Y$  en retirant la case  $\widehat{c}$ .

Fixons  $\widehat{c} \in |\widehat{Y}|$  un coin. Soit  $q$  le numéro de la colonne de  $Y$  contenant  $\widehat{c}$  et soit  $\widehat{p}(\widehat{c})$  le nombre de lignes de  $Y$  de longueur exactement  $q$ .

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. La case portant le numéro  $n$  dans  $T$  est un coin de  $Y$ . Pour  $\widehat{c} \in |\widehat{Y}|$  on note  $\mathcal{T}_{\widehat{c}}(Y)$  l'ensemble des tableaux standards  $T \in \mathcal{T}(Y)$  tels que le numéro  $n$  figure dans la case  $\widehat{c}$ . On a une bijection naturelle entre l'ensemble  $\mathcal{T}_{\widehat{c}}(Y)$  ainsi défini et  $\mathcal{T}(Y \setminus \widehat{c})$ , l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y \setminus \widehat{c}$ .

D'après la proposition 11.1.2 on déduit le calcul inductif suivant du nombre  $\tilde{b}_m(Y)$ .

#### 11.3.1. PROPOSITION

Soit  $m \in \{0, \dots, N\}$ . On a la formule

$$\tilde{b}_m(Y) = \sum_{\widehat{c} \in |\widehat{Y}|} \sum_{\kappa=0}^{\widehat{p}(\widehat{c})-1} \tilde{b}_{m-\kappa}(Y \setminus \widehat{c}).$$

En vertu de la proposition 11.3.1 et comme les exemples suivants l'illustrent, pour calculer les nombres de Betti de  $\mathcal{B}_u$ , il n'est plus nécessaire d'énumérer tous les tableaux lignes-standards de forme  $Y = Y(u)$ , ni même les tableaux standards de forme  $Y$  (i.e. les suites croissantes de sous-diagrammes de  $Y$ ), il est suffisant d'énumérer simplement les sous-diagrammes de  $Y$ .

*Exemple 1.* Supposons

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \widehat{c} \\ \hline \widehat{d} & \\ \hline \end{array}$$

On a ainsi  $|\widehat{Y}| = \{\widehat{c}, \widehat{d}\}$ . En retirant les cases  $\widehat{c}$  et  $\widehat{d}$  on forme les sous-diagrammes

$$Y \setminus \widehat{c} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad Y \setminus \widehat{d} = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

En outre on a  $\widehat{p}(\widehat{c}) = 2$  et  $\widehat{p}(\widehat{d}) = 1$ . On obtient pour tout  $m$  :

$$\tilde{b}_m(Y) = \tilde{b}_m(Y \setminus \widehat{c}) + \tilde{b}_{m-1}(Y \setminus \widehat{c}) + \tilde{b}_m(Y \setminus \widehat{d}).$$

*Exemple 2.* On désire calculer les nombres  $\tilde{b}_d(Y)$  pour

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Dans ce but, on remplit le tableau 1 en utilisant la proposition 11.3.1.

$Y = Y(u)$	$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_u$	$\tilde{b}_0(Y)$	$\tilde{b}_1(Y)$	$\tilde{b}_2(Y)$	$\tilde{b}_3(Y)$	$\tilde{b}_4(Y)$
	0	1	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0
	0	1	0	0	0	0
	3	1	2	2	1	0
	1	2	1	0	0	0
	0	1	0	0	0	0
	3	3	5	3	1	0
	2	2	3	1	0	0
	1	3	1	0	0	0
	4	5	11	9	4	1
	2	5	4	1	0	0
	3	6	9	4	1	0
	4	16	24	14	5	1

tableau 1



*Troisième partie*

**Points fixes du tore**

**dans les composantes des fibres de Springer**

**dans les cas crochet, deux-lignes et deux-colonnes**

On caractérise de deux manières les points fixes du tore contenus dans les composantes des fibres de Springer dans les cas crochet, deux-lignes et deux-colonnes.

Cette partie contient cinq chapitres.

Chapitre. 12. OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES. UN PREMIER CRITÈRE

Chapitre. 13. POINTS FIXES DES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$   
DANS LE CAS CROCHET

Chapitre. 14. POINTS FIXES DES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$   
DANS LE CAS DEUX-LIGNES

Chapitre. 15. POINTS FIXES DES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$   
DANS LE CAS DEUX-COLONNES

Chapitre. 16. RETOUR SUR LE CAS CROCHET : UN CRITÈRE  
ALGORITHMIQUE

Dans cette partie, on s'intéresse au problème suivant :

*“Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard définissant une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard définissant un drapeau  $\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$  fixé par le tore. À quelle condition le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  est-il contenu dans la composante  $K^T$  ?”*

Dans le chapitre 12, nous observons qu'il s'agit d'une première approche de l'étude des adhérences des cellules de Shimomura  $S_u(T')$ . À cette occasion nous soulignons la prépondérance du drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  au sein de la cellule  $S_u(T')$  (lemmes 12.1.1 et 12.1.2). Nous concluons le chapitre 12 en établissant un premier critère, l'implication suivante :

$$\mathcal{F}_{T'} \in K^T \Rightarrow Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j$$

où les diagrammes de Young  $Y_{j/i}(T')$  et  $Y_{j/i}^T$  ont été introduits dans §9.6.6 et §10.2.1.

Dans le chapitre 13, nous montrons que cette condition est nécessaire et suffisante dans le cas où le diagramme  $Y = Y(u)$  est de type crochet.

Dans les chapitres 14 et 15, le diagramme  $Y$  est supposé respectivement de type deux-lignes puis deux-colonnes. Étant donné un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$ , nous définissons une notion appelée  $T$ -constructibilité : un tableau lignes-standard  $T'$  est dit  $T$ -constructible s'il s'obtient comme terme final d'une suite de  $n$  tableaux construite en insérant successivement les numéros  $1, 2, \dots, n$  dans un tableau initialement vide, suivant certaines règles imposées par  $T$ . Puis nous montrons que les tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  tels que  $\mathcal{F}_{T'} \in K^T$  sont exactement les tableaux  $T$ -constructibles, ainsi qu'exactly ceux qui vérifient les relations de dominance écrites ci-dessus.

Dans le chapitre 16, nous définissons une notion de  $T$ -constructibilité dans le cas crochet également et montrons que cette notion caractérise les points fixes contenus dans la composante  $K^T$ .

#### UN THÉORÈME RÉCAPITULATIF

Au terme de cette partie, nous aurons donc montré le théorème suivant :

**THÉORÈME.** *On pose  $Y = Y(u)$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard et soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard. Supposons le diagramme de Young  $Y$  de type crochet, deux-lignes ou deux-colonnes. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ .*
- (b) *Le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.*
- (c) *On a la relation de dominance  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ .*



## Chapitre 12 . OBSERVATIONS PRÉLIMINAIRES. UN PREMIER CRITÈRE

### 12.1. Observations préliminaires relatives à l'importance des points fixes

La proposition 6.4 résume certaines propriétés de la décomposition en cellules de Schubert de la variété drapeau  $\mathcal{B}$ . Ce résultat a motivé notre recherche d'une décomposition cellulaire de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ , possédant des propriétés semblables. Dans la partie précédente, nous avons présenté des décompositions cellulaires de  $\mathcal{B}_u$  obtenues de deux façons :

- La décomposition en cellules de Shimomura  $(S_u(T'))_{T' \in \mathcal{T}'(Y)}$  (cf. 7.1.5 obtenues en intersectant la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  avec les cellules de Schubert de  $\mathcal{B}$ ).
- Les décompositions cellulaires  $(C_u^\rho(T'))_{T' \in \mathcal{T}'(Y)}$  ( $\rho \in R_n$ ) (cf. théorème 9.4) en codimension égale au nombre d'inversions  $l$  (cf. 8).

Toutes ces décompositions cellulaires sont paramétrées par l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y = Y(u)$ .

Cependant les fermetures des cellules de Shimomura ou des cellules  $C_u^\rho(T')$  sont bien plus complexes que les fermetures des cellules de Schubert. La fermeture d'une cellule de Schubert est réunion de cellules de Schubert (cf. 6.4.(c)) tandis que les décompositions cellulaires de  $\mathcal{B}_u$  ne possèdent pas cette propriété.

Limitons-nous à considérer les cellules de Shimomura  $S_u(T') \subset \mathcal{B}_u$ . Notons encore  $H \subset GL(V)$  le tore des automorphismes diagonaux dans la base de Jordan  $(e_x)_{x \in |Y|}$  (cf 4.5.2) et soit  $H' = (h_t)_{t \in k^\times} \subset H$  le sous-tore de rang 1 régulier du lemme 7.1.4. Rappelons qu'à un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  correspond un drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  fixé par le tore (cf. §4.6). La cellule  $S_u(T')$  s'obtient alors par :

$$S_u(T') = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{B}_u : \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}_{T'} \}$$

(cf. lemme 7.1.4).

Soient  $T'$  et  $T''$  deux tableaux lignes-standards de forme  $Y$ . L'étude de l'intersection entre la cellule  $S_u(T')$  et la fermeture de  $S_u(T'')$  pose un problème complexe. Le problème de déterminer si l'intersection  $S_u(T') \cap \overline{S_u(T'')}$  est seulement non-vide est lui-même difficile. Une première observation que l'on peut faire est la suivante.

#### 12.1.1. LEMME

*Soient  $T', T'' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standards. L'intersection  $S_u(T') \cap \overline{S_u(T'')}$  est non-vide si et seulement si le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans  $\overline{S_u(T'')}$ .*

*Démonstration.* Supposons l'intersection  $S_u(T') \cap \overline{S_u(T'')}$  non-vide. Il existe donc  $\mathcal{F} \in S_u(T') \cap \overline{S_u(T'')}$ . L'action du tore  $H'$  sur la variété drapeau laisse stable la

cellule  $S_u(T'')$ , donc son adhérence aussi est stable par  $H'$ . On a donc pour tout  $t \in k^\times : h_t \cdot \mathcal{F} \in \overline{S_u(T'')}$ . Il suit :

$$\mathcal{F}_{T'} = \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \cdot \mathcal{F} \in \overline{S_u(T'')}.$$

L'implication inverse est immédiate.  $\square$

Faisons jouer le rôle de  $T''$  à un tableau standard  $T$ . L'adhérence de la cellule  $S_u(T)$  est la composante  $K^T$  (cf. remarque 7.2.1). On obtient :

### 12.1.2. LEMME

*Soient  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. La cellule  $S_u(T')$  rencontre la composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  si et seulement si le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans  $K^T$ .*

Rappelons qu'on note  $H' = (h_t)_{t \in k^\times}$  le tore du lemme 7.1.4. Dans le cas où  $\mathcal{F}_{T'} \in K^T$ , on obtient la description suivante de l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$ .

### 12.1.3. LEMME

*Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard tel que  $\mathcal{F}_{T'} \in K^T$ . On a :*

$$S_u(T') \cap K^T = \{\mathcal{F} \in K^T : \mathcal{F}_{T'} = \lim_{t \rightarrow \infty} h_t \cdot \mathcal{F}\}.$$

*En particulier l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  est connexe.*

Dans la quatrième partie de cette thèse, en nous appuyant sur les deux précédents lemmes et les deux prochains chapitres, nous déterminerons les intersections entre les cellules  $S_u(T')$  et les composantes de  $\mathcal{B}_u$  dans les cas crochet et deux-lignes.

**Un premier critère.** Soient  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. Nous allons établir une condition nécessaire pour que le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  soit contenu dans la composante.

Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  un drapeau complet stable par  $u$ . Pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $i < j$ , on peut considérer l'endomorphisme quotient  $u_{|V_j/V_i} : V_j/V_i \rightarrow V_j/V_i$  et son diagramme de Young  $Y(u_{|V_j/V_i})$ . Dans la partie précédente nous avons décrit le diagramme  $Y(u_{|V_j/V_i})$  lorsque  $\mathcal{F}$  est le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  ou bien lorsque  $\mathcal{F}$  est un point générique de la composante  $K^T$ . Si  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{T'}$ , alors on a  $Y(u_{|V_j/V_i}) = Y_{j/i}(T')$  (cf. lemme 9.6.7), où  $Y_{j/i}(T')$  est le diagramme défini dans la section 9.6.6. D'autre part, sur un ouvert de  $K^T$  on a  $Y(u_{|V_j/V_i}) = Y_{j/i}^T$  (cf. 10.2.2), où  $Y_{j/i}^T$  est le diagramme défini dans la section 10.2.1.

En utilisant la proposition 9.6.4, on obtient le critère suivant :

### 12.2. PROPOSITION

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. Supposons que le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  soit contenu dans la composante  $K^T$ . Alors on a

$$Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T \quad \text{pour tous } i, j \in \{0, \dots, n\} \text{ vérifiant } i < j,$$

où  $\preceq$  est la relation de dominance.

En général, la condition précédente n'est pas suffisante. Prenons par exemple

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Soient

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

On a bien  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . Cependant le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  n'appartient pas à la composante  $K^T$ .

En effet, posons :

$$F := \{\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u : V_3 \supset \ker u \cap \text{Im } u\}.$$

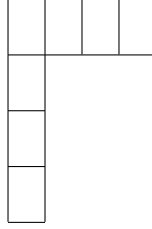
Le sous-ensemble  $F \subset \mathcal{B}_u$  est fermé. On a  $\mathcal{B}_u^T \subset F$ , donc  $K^T \subset F$ . D'autre part le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  n'est pas contenu dans  $F$ . Il suit :  $\mathcal{F}_{T'} \notin K^T$ .

Néanmoins la condition de la proposition 12.2 est suffisante dans certains cas. Dans les chapitres qui viennent, on prouve que cette condition est à la fois nécessaire et suffisante dans les cas où le diagramme  $Y = Y(u)$  est de type crochet, deux-lignes ou deux-colonnes. De plus on donnera un critère plus pratique dans chaque cas pour décider de l'appartenance d'un point fixe à une composante.

On traite les trois cas successivement, dans l'ordre cité.

## Chapitre 13. POINTS FIXES DES COMPOSANTES DE $\mathcal{B}_u$ DANS LE CAS CROCHET

Un diagramme de Young  $Y$  est dit de type *crochet* si il n'a qu'une ligne (au plus) de longueur supérieure à 2. Un endomorphisme nilpotent est de type crochet si il n'a qu'un bloc de Jordan (au plus) de taille supérieure ou égale à 2.



Si  $u$  est de type crochet, alors les points fixes des composantes de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  sont décrits par le théorème suivant :

### 13.1. THÉORÈME

Supposons  $Y = Y(u)$  de type crochet. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, définissant une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard, définissant le drapeau  $\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$ . Soient  $1, a_2, \dots, a_s$  les entrées de la première ligne de  $T$ . Soient  $a'_1, \dots, a'_s$  les entrées de la première ligne de  $T'$ . Pour  $0 \leq i < j \leq n$  soit  $Y_{j/i}(T')$  le diagramme de Young associé au sous-tableau  $T'_{|j/i}$  et soit  $Y_{j/i}^T$  la forme du tableau de Young obtenu d'après le sous-tableau gauche  $T_{|j/i}$  par jeu de Taquin.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ .
- (b) On a la relation  $a'_{q-1} < a_q \leq a'_q$  pour tout  $q \in \{2, \dots, s\}$ .
- (c) On a la relation de dominance  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ .

*Démonstration.* L'implication (a) $\Rightarrow$ (c) provient de la proposition 12.2. Nous prouverons l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) au cours du chapitre 17.

Il reste à montrer l'implication (c) $\Rightarrow$ (b). Supposons que la propriété (c) est vérifiée. Soit  $q \in \{2, \dots, s\}$ . Soit  $q' \in \{1, \dots, s+1\}$  minimal tel que  $a'_{q'} \geq a_q$ , ou bien on pose  $q' = s+1$  si  $a'_s < a_q$ . On doit montrer  $q' = q$ .

Tout d'abord considérons la relation de dominance

$$Y_{a_q-1/0}(T') \preceq Y_{a_q-1/0}^T.$$

Le sous-tableau  $T_{|a_q-1/0}$  est obtenu à partir de  $T$  en retirant les numéros  $j \geq a_q$ . On a donc

$$T_{|a_q-1/0} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & a_2 & \cdots & a_{q-1} \\ \hline b_2 & & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline b_p & & & \\ \hline \end{array}$$

pour certains  $b_2, \dots, b_p$ . Le diagramme de Young  $Y_{a_{q-1}/0}^T$  est la forme du tableau  $T_{|a_{q-1}/0}$  donc sa première ligne contient  $q - 1$  cases. D'autre part  $a'_1, \dots, a'_{q'-1}$  sont les entrées de la première ligne du tableau  $T'_{|a_{q-1}/0}$ . La longueur de la première ligne du diagramme de Young  $Y_{a_{q-1}/0}(T')$  est la longueur maximale des lignes de  $T_{|a_{q-1}/0}$ , donc est supérieure ou égale à  $q' - 1$ . D'après la relation de dominance  $Y_{a_{q-1}/0}(T') \preceq Y_{a_{q-1}/0}^T$  on déduit  $q' - 1 \leq q - 1$ , d'où  $q' \leq q$ .

Ensuite considérons la relation

$$Y_{n/a_{q-1}}(T') \preceq Y_{n/a_{q-1}}^T.$$

En retirant les entrées  $1, \dots, a_q - 1$  du tableau  $T$ , on obtient le sous-tableau gauche

$$T_{|n/a_{q-1}} = \begin{array}{|c|} \hline b_{p'} \\ \hline \vdots \\ \hline b_r \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_q & \cdots & a_s \\ \hline \end{array}$$

pour certains  $b_{p'}, \dots, b_r$  avec  $a_q < b_{p'}$ . À partir du tableau gauche  $T_{|n/a_{q-1}}$  on forme le tableau de Young  ${}^Y T_{|n/a_{q-1}}$  par jeu de Taquin. On a

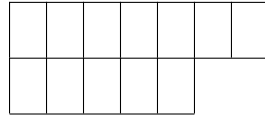
$${}^Y T_{|n/a_{q-1}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_q & \cdots & a_s \\ \hline b_{p'} & & \\ \hline \vdots & & \\ \hline b_r & & \\ \hline \end{array}$$

Le diagramme  $Y_{n/a_{q-1}}^T$  est la forme du tableau  ${}^Y T_{|n/a_{q-1}}$  donc la première ligne de  $Y_{n/a_{q-1}}^T$  contient exactement  $s - q + 1$  cases. D'autre part les entrées  $a'_{q'}, \dots, a'_s$  forment la première ligne du sous-tableau  $T'_{|n/a_q}$  obtenu d'après  $T'$  en retirant les entrées  $1, \dots, a_q - 1$ . Ainsi la première ligne de  $T'_{|n/a_q}$  contient  $s - q' + 1$  cases. On a déjà établi l'inégalité  $q' \leq q$  donc il suit  $s - q' + 1 \geq s - q + 1 \geq 1$ . Ainsi  $s - q' + 1$  est la longueur maximale des lignes de  $T'_{|n/a_q}$ . Par conséquent la première du diagramme  $Y_{n/a_q}(T')$  a longueur  $s - q' + 1$ . De la relation  $Y_{n/a_q}(T') \preceq Y_{n/a_q}^T$  il résulte  $q' \geq q$ .

On obtient finalement  $q' = q$ . La preuve est complète.  $\square$

## Chapitre 14. POINTS FIXES DES COMPOSANTES DE $\mathcal{B}_u$ DANS LE CAS DEUX-LIGNES

L'endomorphisme nilpotent  $u$  est de type *deux-lignes* si il n'a que deux blocs de Jordan (au plus). De manière équivalente son diagramme de Young  $Y(u)$  n'a que deux lignes.



Dans cette section on suppose que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux lignes (au plus). Soit  $s$  la longueur de la première ligne et soit  $\check{s}$  la longueur de la seconde ligne de  $Y$ . Ainsi  $n = s + \check{s}$ .

### Énoncé du théorème.

On fixe un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  et un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

*Notations.* Soit  $\theta$  un tableau quelconque à deux lignes, i.e. un ensemble de cases portant des numéros, réparties sur deux lignes, suivant des colonnes numérotées de gauche à droite à partir de la première colonne non-vide. Pour  $p \in \{1, 2\}$  on note  $L_p(\theta)$  l'ensemble des numéros qui figurent dans la  $p$ -ème ligne de  $\theta$ . Pour  $q \geq 1$  on note  $n_q(\theta)$  le nombre de cases numérotées de la  $q$ -ème colonne de  $\theta$ .

*Exemple.* Soit

$$\theta = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & 5 & 7 \\ \hline 8 & 9 & & 4 & 6 \\ \hline \end{array}$$

On a  $L_1(\theta) = \{1, 5, 7\}$  et  $L_2(\theta) = \{4, 6, 8, 9\}$ . On a  $n_1(\theta) = n_4(\theta) = 2$  et  $n_2(\theta) = n_3(\theta) = n_5(\theta) = 3$ .

### 14.1. Une notion de $T$ -constructibilité

On définit un algorithme qui vise à reconstruire le tableau  $T'$  comme terme final d'une suite de tableaux  $\theta_1, \theta_2, \dots$  obtenus en insérant successivement les entrées  $1, 2, \dots$  dans le tableau vide  $\theta_0$ , suivant certaines règles dépendant de  $T$ . Un échec peut survenir. On dira que  $T'$  est  $T$ -constructible si l'algorithme réussit.

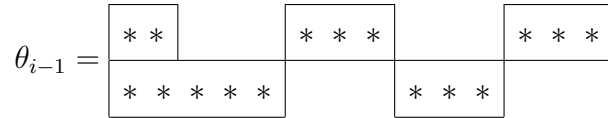
On appelle *bande* une suite de cases contiguës numérotées dans l'ordre croissant de gauche à droite. Par exemple  $\boxed{2 \mid 4 \mid 5}$  est une bande. Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  le tableau  $\theta_i$  construit après l'étape  $i$  satisfait aux deux propriétés suivantes :

- (2L-A) Chaque ligne de  $\theta_i$  est une suite de bandes séparées par des espaces blancs (des cases vides). Les entrées contenues dans chaque ligne sont dans l'ordre croissant de gauche à droite. On a  $L_p(\theta_i) = L_p(T'_i)$  pour tout  $p \in \{1, 2\}$ .

(2L-B) Les colonnes de  $\theta_i$  étant comptées de gauche à droite, on a l'égalité  $n_q(\theta_i) = n_q(T_i)$  pour tout  $q \geq 1$ .

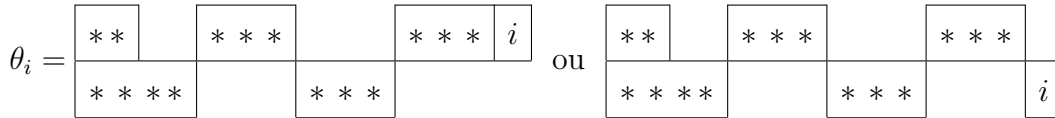
En particulier  $1, \dots, i$  sont les entrées du tableau  $\theta_i$  et chaque entrée n'apparaît qu'une fois.

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  supposons qu'on a construit un tableau  $\theta_{i-1}$  satisfaisant à ces deux propriétés. D'après (2L-B), le nombre de cases pleines des colonnes de  $\theta_{i-1}$  décroît de gauche à droite. En particulier les colonnes pleines (deux entrées) sont concentrées sur la gauche de  $\theta_{i-1}$ . Le tableau  $\theta_{i-1}$  a donc l'aspect suivant :



où la figure  $\boxed{* * *}$  symbolise une bande. Les bandes qui partent de la première colonne sont dites "en-place". Il y en a en général une par ligne mais il est possible qu'une des deux soit vide. Les autres bandes sont dites "à-replacer". À l'étape  $i$ , on forme le tableau  $\theta_i$  à partir de  $\theta_{i-1}$  en insérant le numéro  $i$  selon la règle suivante.

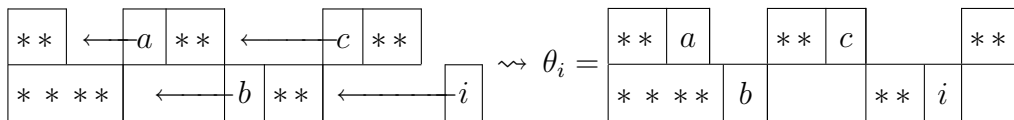
- (1) Premier cas :  $i$  est dans la première ligne de  $T$ . Le numéro  $i$  est inséré dans une nouvelle colonne sur la droite de  $\theta_{i-1}$  dans la première ou la seconde case de cette colonne suivant que  $i$  appartient à la première ou à la seconde ligne de  $T'$  :



- (2) Second cas :  $i$  est dans la seconde ligne de  $T$ . Supposons  $i \in L_p(T')$  pour  $p \in \{1, 2\}$ . Ainsi  $i$  doit être inséré dans la  $p$ -ème ligne de  $\theta_{i-1}$ . On décrète le cas d'échec suivant :

(Cas d'échec) Supposons  $i \in L_1(T) \cap L_p(T')$ . Si la  $p$ -ème case de la dernière colonne de  $\theta_{i-1}$  n'est pas libre, alors l'algorithme échoue.

Supposons que l'échec ne survient pas en  $i$ . Le numéro  $i$  est inséré au bout de la dernière bande de la  $p$ -ème ligne de  $\theta_{i-1}$ . Ensuite, de droite à gauche, le premier numéro de chaque bande "à-replacer" est décalé vers la gauche au bout de la bande précédente (dans la première case de la ligne s'il n'y a pas de bande précédente) :



Si aucun échec ne survient lorsque  $i$  parcourt l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , alors on obtient un tableau final  $\theta_n$  numéroté de 1 à  $n$ . D'après (2L-A) et (2L-B) le tableau  $\theta_n$  coïncide avec le tableau lignes-standard  $T'$ . On dit alors que  $T'$  est  $T$ -constructible.

*Exemple.* Soit

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ \hline 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \hline \end{array}$$

(a) Supposons tout d'abord

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 & 10 & \\ \hline \end{array}$$

On construit successivement les tableaux

$$\theta_1 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \theta_2 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \theta_3 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \theta_4 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \theta_5 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

Puis :

$$\theta_6 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \theta_7 = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array}$$

Comme  $8 \in L_2(T)$  et  $8 \in L_1(T')$  et comme la première case de la dernière colonne du tableau  $\theta_7$  n'est pas libre, l'algorithme échoue.

(b) Supposons maintenant

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 7 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & \\ \hline \end{array}$$

On construit de même  $\theta_7 = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline \end{array}$  puis on obtient :

$$\theta_8 = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \theta_9 = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \theta_{10} = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

et enfin :  $\theta_{11} = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 5 & 7 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & \\ \hline \end{array}$

Dans cet exemple le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.

Si  $u$  est de type deux-lignes, la notion de  $T$ -constructibilité introduite à l'instant permet de décrire les points fixes de la composante irréductible  $K^T$ , comme le montre l'énoncé suivant.



## 14.2. THÉORÈME

Supposons que le diagramme  $Y = Y(u)$  a (au plus) deux lignes. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard, définissant une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard, définissant le drapeau  $\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$ . Pour  $0 \leq i < j \leq n$  soit  $Y_{j/i}(T')$  le diagramme de Young associé au sous-tableau  $T'_{|j/i}$  et soit  $Y_{j/i}^T$  la forme du tableau de Young obtenu à partir du sous-tableau gauche  $T_{|j/i}$  par jeu de Taquin.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ .
- (b) Le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.
- (c) On a la relation de dominance  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ .

*Démonstration.* L'implication (a) $\Rightarrow$ (c) provient de la proposition 12.2. L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) sera prouvée au cours de la section 18. Il reste à montrer (c) $\Rightarrow$ (b).

On raisonne par induction sur  $n \geq 1$ . Supposons l'implication établie pour  $n - 1 \geq 1$ .

Supposons la condition (c) satisfaite. Soient  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$  les tableaux construits successivement en exécutant l'algorithme.

Supposons d'abord que l'entrée  $n$  occupe la même place dans les tableaux  $T$  et  $T'$ . Ainsi les sous-tableaux  $T'_{|n-1}$  et  $T_{|n-1}$  ont même forme et on peut appliquer la construction algorithmique au couple  $(T'_{|n-1}, T_{|n-1})$ . Comme la condition (c) est satisfaite pour le couple  $(T', T)$ , elle est satisfaite également pour le couple  $(T'_{|n-1}, T_{|n-1})$ . Par hypothèse de récurrence le tableau  $T'_{|n-1}$  est  $T_{|n-1}$ -constructible. Ainsi aucun échec ne survient au cours des  $n - 1$  premières étapes de l'exécution de l'algorithme pour le couple  $(T', T)$  et on a  $\theta_{n-1} = T'_{|n-1}$ . Finalement  $n$  peut être inséré dans le tableau  $\theta_{n-1}$  sans qu'il y ait d'échec et le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le diagramme  $Y$  est rectangulaire (deux lignes de même longueur). En permutant les deux lignes de  $T'$ , on construit un autre tableau lignes-standard de forme  $Y$  que l'on note  $\tilde{T}'$ . D'après la définition de l'algorithme le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible si et seulement si  $\tilde{T}'$  l'est. Par conséquent on peut supposer que  $n$  apparaît dans la seconde lignes de  $T'$ . Mais alors  $n$  occupe la même place dans les tableaux  $T$  et  $T'$  et on est ramené à une situation déjà traitée.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où il existe  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  tel que la forme  $Y(T_{|i})$  du sous-tableau  $T_{|i}$  soit un diagramme de Young rectangulaire. Alors  $Y(T_{|i})$  est minimal parmi les diagrammes de Young à deux lignes et  $i$  cases pour la relation de dominance. Par hypothèse on a  $Y_{i/0}(T') \preceq Y_{i/0}^T = Y_{i/0}(T)$ , d'où :  $Y_{i/0}(T') = Y(T_{|i})$ . Ainsi les tableaux  $T'_{|i}$  et  $T_{|i}$  forment un couple de tableaux lignes-standard et standard de même forme et mêmes entrées  $1, \dots, i$ . Comme la condition (c) est satisfaite par le couple  $(T', T)$ , elle est satisfaite aussi par  $(T'_{|i}, T_{|i})$ . Par induction le tableau  $T'_{|i}$  est  $T_{|i}$ -constructible. Cela implique qu'aucun échec ne survient au cours des  $i$  premières étapes de l'exécution de l'algorithme pour le

couple  $(T', T)$  et on a  $\theta_i = T'_{|i}$ . Comme les tableaux  $T'_{|i}$  et  $T_{|i}$  sont rectangulaires et de même forme, il suit que les sous-tableaux  $T'_{|n/i}$  et  $T_{|n/i}$  ont même forme et leur forme commune est un diagramme de Young. Ils ont de plus les mêmes entrées  $i + 1, \dots, n$ . Modulo l'action de l'application strictement croissante  $\phi : j \mapsto j - i$  les tableaux  $T'_{|n/i}$  et  $T_{|n/i}$  peuvent être considérés respectivement comme lignes-standard et standard. On peut donc exécuter l'algorithme pour le couple  $(T'_{|n/i}, T_{|n/i})$ . Le tableau  $\theta_{i+j}$  est la concaténation de  $T'_{|i}$  et du  $j$ -ème tableau de la suite construite durant l'exécution de l'algorithme pour  $(T'_{|n/i}, T_{|n/i})$ . La condition (c) est satisfaite par  $(T'_{|n/i}, T_{|n/i})$ . Par induction  $T'_{|n/i}$  est  $T_{|n/i}$ -constructible. Il suit que  $T'$  est  $T$ -constructible.

Supposons enfin qu'il n'existe pas  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $T_{|i}$  soit de forme rectangulaire et supposons que le numéro  $n$  n'occupe pas la même place dans les tableaux  $T$  et  $T'$ . D'après la condition (c) on a  $Y_{|n-1/0}(T') \preceq Y_{|n-1/0}^T$ . Le premier diagramme est la forme du tableau  $T'_{|n-1}$  tandis que le second est la forme de  $T_{|n-1}$ . Par conséquent  $n$  est au bout de la première ligne de  $T'$  et au bout de la seconde ligne de  $T$ . On note :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & \cdots & a_s \\ \hline b_1 & \cdots & b_{\check{s}} \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a'_1 & \cdots & a'_s \\ \hline b'_1 & \cdots & b'_{\check{s}} \\ \hline \end{array}$$

On obtient ainsi  $b_{\check{s}} = n$  et  $a'_s = n$ . Rappelons que  ${}^Y T_{|n/1}$  désigne le tableau standard obtenu d'après le sous-tableau gauche  $T_{|n/1}$  par jeu de Taquin. Comme  $T_{|i}$  n'est rectangulaire pour aucun  $i$ , on a  $b'_q > a'_q$  pour tout  $q \in \{1, \dots, \check{s}\}$ . Il suit :

$${}^Y T_{|n/1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a_2 & \cdots & a_{\check{s}+1} & \cdots & a_s \\ \hline b_1 & \cdots & b_{\check{s}} & & \\ \hline \end{array}$$

Le diagramme  $Y_{|n/1}^T$  est la forme du tableau  ${}^Y T_{|n/1}$ . Par hypothèse on a la relation  $Y_{|n/1}(T') \preceq Y_{|n/1}^T$ . Il suit :  $a'_1 = 1$ . Soit  $\widehat{T}'$  le tableau suivant :

$$\widehat{T}' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a'_2 & \cdots & a'_{\check{s}+1} & \cdots & a'_s \\ \hline b'_1 & \cdots & b'_{\check{s}} & & \\ \hline \end{array}$$

Les tableaux  $\widehat{T}'$  et  ${}^Y T_{|n/1}$  ont même forme, mêmes entrées  $2, \dots, n$ . Modulo l'action de l'application strictement croissante  $\phi : j \mapsto j - 1$  ils peuvent être considérés respectivement comme lignes-standard et standard. On peut donc exécuter l'algorithme relativement au couple  $(\widehat{T}', {}^Y T_{|n/1})$ . La condition (c) est satisfaite par ce dernier. Par induction le tableau  $\widehat{T}'$  est  ${}^Y T_{|n/1}$ -constructible. Par définition de l'algorithme, il résulte facilement que l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$  lui-même ne rencontre pas l'échec, de sorte que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible. L'implication (c) $\Rightarrow$ (b) est établie.  $\square$

## Chapitre 15 . POINTS FIXES DES COMPOSANTES DE $\mathcal{B}_u$ DANS LE CAS DEUX-COLONNES

L'endomorphisme nilpotent  $u$  est de type *deux-colonnes* si ses blocs de Jordan ont longueur au plus 2. De manière équivalente son diagramme de Young  $Y(u)$  n'a que deux colonnes (au plus).



Dans ce chapitre on suppose que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes (au plus) de hauteurs respectives  $r$  et  $\check{r}$ . On a ainsi  $r + \check{r} = n$ .

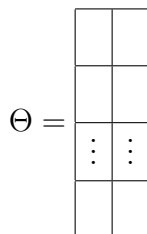
### Énoncé du théorème.

On fixe un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  et un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

#### 15.1. Une notion de $T$ -constructibilité

##### 15.1.1. Notations

Soit  $\Theta$  le diagramme rectangulaire constitué de deux colonnes de hauteur  $r$  :



Les lignes de  $\Theta$  sont numérotées de 1 à  $r$  de haut en bas. Le tableau  $T'$  peut être vu comme une numérotation partielle de  $\Theta$

Soit  $\theta$  un tableau obtenu en numérotant certaines cases de  $\Theta$  (par exemple  $\theta = T$  ou  $\theta = T'$  mais le tableau  $\theta$  peut tout aussi bien ne pas avoir la forme d'un diagramme de Young). Pour  $p \geq 1$  on note  $L_p(\theta)$  l'ensemble des entrées de la  $p$ -ème ligne de  $\theta$ . Pour  $q \in \{1, 2\}$  on note  $C_q(\theta)$  l'ensemble des entrées de la  $q$ -ème colonne de  $\theta$  et on note  $n_q(\theta)$  son cardinal.

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  soit  $p_i \in \{1, \dots, r\}$  le numéro de la ligne du tableau  $T'$  qui contient l'entrée  $i$ .

Similairement au cas deux-lignes, on définit un algorithme qui vise à reconstruire  $T'$  comme terme final d'une suite de tableaux  $\theta_1, \theta_2, \dots$  obtenus en insérant successivement les numéros  $1, 2, \dots$  dans le diagramme  $\Theta$ , suivant certaines règles

imposées par  $T$ . L'algorithme peut échouer. Si l'algorithme réussit, on dira que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.

Soit  $\overline{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ . On impose par convention  $\infty = \infty + 1 = \infty - 1$  et  $a < \infty$  pour tout  $a \in \mathbb{N}$ . Pour  $i = 1, 2, \dots$  et chaque numéro de ligne  $p \in \{1, \dots, r\}$  on définit en plus un indice  $f_i(p) \in \overline{\mathbb{N}}$ . Initialement on pose  $f_0(p) = \infty$  pour tout  $p \geq 1$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  le tableau  $\theta_i$  construit après la  $i$ -ème étape satisfait aux propriétés suivantes :

- (2C-A) Les lignes de  $\theta_i$  sont croissantes de gauche à droite et pour tout  $p \in \{1, \dots, r\}$  on a  $L_p(\theta_i) = L_p(T'_i)$ .
- (2C-B) Pour  $q \in \{1, 2\}$  on a l'égalité  $n_q(\theta_i) = n_q(T'_i)$ .
- (2C-C) Soient  $I_i$  l'ensemble des numéros  $p \in \{1, \dots, r\}$  des lignes de  $\theta_i$  dont la première case est non-vide et soit  $J_i$  l'ensemble des numéros des autres lignes non vides. Pour  $p \in \{1, \dots, r\}$  on a l'équivalence  $f_i(p) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow p \in I_i$ . De plus on a l'égalité  $\text{Max}_{p \in I_i} f_i(p) = \#J_i$ .

On a besoin d'un ordre sur les numéros de la première colonne de  $T'$ .

### 15.1.2. Un ordre $\prec_{T'}$ sur l'ensemble des numéros de la première colonne de $T'$

Soient  $i, j \in C_1(T')$  deux numéros apparaissant dans la première colonne de  $T'$ .

- Si l'un des numéros  $i, j$  n'a pas de case voisine à sa droite dans  $T'$ , alors on note  $i \prec_{T'} j$  lorsque  $p_i < p_j$ .
- Si  $i, j$  ont des numéros voisins à droite dans  $T'$ , notés respectivement  $i'$  et  $j'$ , alors on note  $i \prec_{T'} j$  lorsque  $i' < j'$ .

*Exemple.* Supposons

$$T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 7 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 8 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}$$

On obtient :  $2 \prec_{T'} 3 \prec_{T'} 1 \prec_{T'} 8 \prec_{T'} 6$ .

Procédons maintenant à la définition de l'algorithme de reconstruction de  $T'$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  supposons qu'on a construit un tableau  $\theta_{i-1}$  satisfaisant aux propriétés (2C-A), (2C-B) et (2C-C). De cette manière le tableau  $\theta_{i-1}$  a l'aspect

suisant :

$$\theta_{i-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline & * \\ \hline * & * \\ \hline & \\ \hline * & \\ \hline * & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \infty \\ f_{i-1}(2) \\ \infty \\ f_{i-1}(4) \\ f_{i-1}(5) \end{array}$$

Le symbole  $\boxed{*}$  figure une case pleine. On a inscrit les valeurs  $f_{i-1}(p)$  sur la droite. On a ici  $I_{i-1} = \{2, 4, 5\}$  et  $J_{i-1} = \{1\}$ .

On construit le tableau  $\theta_i$  d'après  $\theta_{i-1}$  en insérant le numéro  $i$  selon la règle suivante.

- (0) Le numéro  $i$  doit être inséré dans la  $p_i$ -ème ligne de  $\theta_{i-1}$ . On décrète le cas d'échec suivant :

*(Premier cas d'échec) Si la seconde case de la  $p_i$ -ème ligne de  $\theta_{i-1}$  n'est pas libre, alors l'algorithme échoue.*

Supposons qu'un échec de ce type ne survient pas en  $i$ . Alors on insère  $i$  dans la seconde case de la  $p_i$ -ème ligne de  $\theta_{i-1}$ . Soit  $\theta'_i$  le tableau ainsi obtenu.

- (1) Premier cas :  $i$  appartient à la seconde colonne de  $T$ . On pose alors  $\theta_i = \theta'_i$  et il ne reste plus qu'à attribuer une valeur à l'indice  $f_i(p)$  pour  $p \in \{1, \dots, r\}$ . Si  $f_{i-1}(p) < f_{i-1}(p_i)$ , alors on pose  $f_i(p) = f_{i-1}(p) + 1$ . Si au contraire  $f_{i-1}(p) \geq f_{i-1}(p_i)$ , alors on pose  $f_i(p) = f_{i-1}(p)$ .

Supposons  $\theta_{i-1}$  comme dans la figure précédente, on a par exemple :

$$\theta_i = \begin{array}{|c|c|} \hline & * \\ \hline * & * \\ \hline & i \\ \hline * & \\ \hline * & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \infty \\ f_i(2)=f_{i-1}(2)+1 \\ \infty \\ f_i(4)=f_{i-1}(4)+1 \\ f_i(5)=f_{i-1}(5)+1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \theta_i = \begin{array}{|c|c|} \hline & * \\ \hline * & * \\ \hline & \\ \hline * & i \\ \hline * & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \infty \\ f_i(2) \\ \infty \\ f_i(4)=f_{i-1}(4) \\ f_i(5) \end{array}$$

Dans le premier cas les indices finis ont été incrémentés. Dans le second cas, pour  $p \in \{2, 5\}$ , on obtient  $f_i(p) = f_{i-1}(p)$  ou bien  $f_i(p) = f_{i-1}(p) + 1$  selon qu'on a  $f_{i-1}(p) \geq f_{i-1}(4)$  ou  $f_{i-1}(p) < f_{i-1}(4)$ .

Les propriétés (2C-A), (2C-B), (2C-C) sont clairement satisfaites par le tableau  $\theta_i$  et l'indice  $f_i$ .

- (2) Second cas :  $i$  appartient à la première colonne de  $T$ . On construit le tableau  $\theta_i$  d'après  $\theta'_i$  en déplaçant un numéro de la seconde colonne vers la première. On décrète le cas d'échec suivant :

(Second cas d'échec) Supposons  $i \in C_1(T)$ . Si l'indice  $f_{i-1}(p_i)$  est nul, alors l'algorithme échoue.

Supposons qu'aucun échec ne se produise en  $i$ . D'après la propriété (2C-C), l'ensemble  $F'_i$  des entrées de la seconde colonne de  $\theta'_i$  qui ont une case vide à leur gauche est non-vide. D'après (2C-A) on a l'inclusion  $F'_i \subset C_1(T')$ . On choisit  $j \in F'_i$  minimal pour l'ordre  $\prec_{T'}$ . On note  $\theta_i$  le tableau obtenu d'après  $\theta'_i$  en décalant l'entrée  $j$  d'une case vers la gauche.

Définissons maintenant la fonction  $f_i$ . On pose tout d'abord  $f_i(p_j) = 0$ . Soit  $p \in \{1, \dots, r\} - \{p_j\}$ . Si  $f_{i-1}(p) < f_i(p_i)$ , alors on pose  $f_i(p) = f_{i-1}(p)$ . Si au contraire  $f_{i-1}(p) \geq f_i(p_i)$ , alors on pose  $f_i(p) = f_{i-1}(p) - 1$ .

Supposons  $\theta_{i-1}$  comme dans la figure précédente. On obtient par exemple :

$$\theta'_i = \begin{array}{|c|c|} \hline & j \\ \hline * & * \\ \hline & i \\ \hline * & \\ \hline * & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \infty \\ f_{i-1}(2) \\ \infty \\ f_{i-1}(4) \\ f_{i-1}(5) \end{array} \quad \text{ou} \quad \theta'_i = \begin{array}{|c|c|} \hline & j \\ \hline * & * \\ \hline & \\ \hline * & i \\ \hline * & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \infty \\ f_{i-1}(2) \\ \infty \\ f_{i-1}(4) \\ f_{i-1}(5) \end{array}$$

et une entrée doit encore être décalée vers la gauche. Dans le premier cas aucun échec ne peut survenir : on a  $F'_i = \{i, j\}$  et une des entrées  $i$  ou  $j$  doit être décalé vers la gauche. Si chacune a une entrée à sa droite dans  $T'$ , alors on déplace celle dont l'entrée voisine est minimale. Sinon on déplace  $j$ , car le numéro de la ligne contenant  $j$  est plus petit. Comme  $f_{i-1}(p_i) = \infty$ , les indices ne changent pas.

Dans le second cas un échec se produit si  $f_i(4) = 0$ . Si  $f_i(4) \neq 0$ , alors l'entrée  $j$  est déplacée vers la gauche et on pose  $f_i(1) = 0$ . Les indices qui étaient supérieurs à  $f_{i-1}(p_i)$  sont décréments.

Les propriétés (2C-A), (2C-B) et (2C-C) sont clairement satisfaites par le nouveau tableau  $\theta_i$ .

Si aucun échec ne survient durant l'exécution de l'algorithme, alors on obtient un tableau final  $\theta_n$  d'entrées  $1, \dots, n$ . En vertu de (2C-A) et (2C-B) on a finalement  $\theta_n = T'$ . On dit alors que  $T'$  est  $T$ -constructible.

*Exemple.*

(a) Soient  $T$  et  $T'$  les tableaux suivants :

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

En insérant 1, 2, ... suivant les règles de l'algorithme, on construit les tableaux  $\theta_1, \theta_2, \dots$  suivants. On écrit les indices en chiffres romains sur la droite.

		$\infty$			$\infty$	3		0	3		I	3	5	0
1		0	1		I	1		I	1	4	I	1	4	0
		$\infty$		2	$\infty$		2	$\infty$		2	$\infty$	2		0
$\theta_1$			$\theta_2$			$\theta_3$			$\theta_4$			$\theta_5$		

Aucun échec ne s'est produit durant l'exécution de l'algorithme donc le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.

(b) Soient maintenant  $T$  et  $T'$  les tableaux

1	2	et	2	6
3	4		3	5
5			4	
6			1	

Suivant l'algorithme, on construit successivement les tableaux :

		$\infty$		2	$\infty$		2	$\infty$		2	$\infty$	2		0	2	6	?
		$\infty$			$\infty$	3		0	3		I	3	5	0	3	5	?
		$\infty$			$\infty$			$\infty$		4	$\infty$		4	$\infty$		4	?
1		0	1		I	1		I	1		II	1		I	1		?
$\theta_1$			$\theta_2$			$\theta_3$			$\theta_4$			$\theta_5$			$\theta'_6$		

Le numéro 6 doit être inséré dans la première ligne de  $\theta_5$ . De plus 6 apparaît dans la première colonne de  $T$ . Or on a  $f_5(1) = 0$ , nous sommes donc dans le second cas d'échec. Finalement ce tableau  $T'$  n'est pas  $T$ -constructible.

Si  $u$  est un endomorphisme nilpotent de type deux-colonnes, la notion de  $T$ -constructibilité ainsi définie permet de caractériser les points fixes de la composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ , comme le montre le théorème suivant.

**15.2. THÉORÈME**

Supposons que le diagramme de Young  $Y = Y(u)$  a (au plus) deux colonnes. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard, définissant une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard, définissant le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$ . Pour  $0 \leq i < j \leq n$  soit  $Y_{j/i}(T')$  le diagramme de Young associé au sous-tableau  $T'_{j/i}$  et soit  $Y_{j/i}^T$  la forme du tableau de Young obtenu d'après le sous-tableau gauche  $T_{j/i}$  par jeu de Taquin.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composantes  $K^T$ .
- (b) Le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.

(c) On a la relation de dominance  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ .

La suite de cette section est consacrée à la démonstration de ce résultat.



### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

L'implication (a) $\Rightarrow$ (c) provient de la proposition 12.2. Il reste à établir les implications (b) $\Rightarrow$ (a) et (c) $\Rightarrow$ (b). Présentons tout d'abord quelques propriétés de l'algorithme défini précédemment.

#### 15.3. Premières propriétés de l'algorithme

Dans ce paragraphe, on présente quelques propriétés de l'algorithme qu'il est utile d'observer en vue de la preuve du théorème. On formule d'abord quelques remarques générales puis on considère le premier numéro  $i \in \{1, \dots, n\}$  qui apparaît dans deux colonnes différentes de  $T$  et  $T'$ .

##### 15.3.1. Notations

Rappelons que  $p_i$  désigne le numéro de la ligne de  $T'$  qui contient  $i$ . Selon l'axiome (2C-C) de la définition de l'algorithme, soit  $I_i$  l'ensemble des numéros  $p \in \{1, \dots, r\}$  des lignes du tableau  $\theta_i$  dont la première case est non-vide et soit  $J_i$  l'ensemble des numéros des autres lignes non-vides de  $\theta_i$ .

*Quelques propriétés générales.* Le lemme suivant récapitule quelques propriétés de l'algorithme qui découlent facilement de sa définition et que l'on aura l'occasion d'invoquer plus tard.

##### 15.3.2. LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

(a) Si les numéros  $1, \dots, i$  sont dans les mêmes colonnes de  $T$  et  $T'$ , alors l'algorithme ne rencontre pas l'échec sur l'ensemble  $\{1, \dots, i\}$ . On a de plus  $\theta_i = T'_{|i}$ ,  $J_i = \emptyset$  et  $f_i(p) = 0$  pour tout  $p \in I_i$ .

(b) Supposons qu'aucun échec ne survient sur  $\{1, \dots, i-1\}$ . Si  $f_{i-1}(p_i) \in \mathbb{N} - \{0\}$  ou  $i \in C_1(T')$ , alors aucun échec ne se produit en  $i$ .

(On suppose maintenant qu'aucun échec ne survient sur  $\{1, \dots, i\}$ .)

(c) On a l'équivalence  $i \in C_2(T') \Leftrightarrow p_i \in I_{i-1} \Leftrightarrow f_{i-1}(p_i) \in \mathbb{N}$ . On a donc aussi  $i \in C_1(T') \Leftrightarrow f_{i-1}(p_i) = \infty$ .

(d) Si  $p \in J_{i-1}$ , alors la seconde entrée de la  $p$ -ème ligne de  $T'$ , s'il en existe une, est strictement plus grande que  $i$ .

(e) Soit  $p \in I_i - I_{i-1}$ . On a  $f_i(p) = 0$ .

(f) Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . On a l'inclusion  $I_j \subset I_i$ . Supposons  $p, p' \in I_j$  tels que  $f_j(p) \leq f_j(p')$ . Alors on a  $f_i(p) \leq f_i(p')$ .

(g) Supposons  $f_{i-1}(p_i) = \infty$ . Alors on a  $f_i(p) \geq f_{i-1}(p)$  pour tout  $p \in I_{i-1}$ .

(h) Soient  $p, p' \in I_{i-1}$  tels que  $f_{i-1}(p) \leq f_{i-1}(p')$ . On a l'encadrement

$$f_{i-1}(p') - f_{i-1}(p) - 1 \leq f_i(p') - f_i(p) \leq f_{i-1}(p') - f_{i-1}(p)$$

et, de plus, l'équivalence

$$f_i(p') - f_i(p) = f_{i-1}(p') - f_{i-1}(p) - 1 \Leftrightarrow f_{i-1}(p) < f_{i-1}(p_i) \leq f_{i-1}(p').$$

On démontre une propriété moins immédiate, plus précise que (2C-C), qui sera d'utilité un peu plus tard.

## 15.3.3. PROPOSITION

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Supposons qu'aucun échec ne survient sur  $\{1, \dots, i\}$ . Soit  $I'_i$  l'ensemble des  $p \in I_i$  tels que la seconde case de la  $p$ -ème ligne de  $\theta_i$  est vide. On a l'égalité  $\text{Max}_{p \in I_i} f_i(p) = \text{Max}_{p \in I'_i} f_i(p)$ .

*Démonstration.* Rappelons l'égalité  $\text{Max}_{p \in I_i} f_i(p) = \#J_i$  résultant de (2C-C). Posons  $h = \#J_i$ . Il est suffisant de prouver le fait suivant : Il existe des éléments  $p^{(1)}, \dots, p^{(h)} \in I'_i$  distincts deux-à-deux tels que  $f_i(p^{(l)}) \geq l$ . On a alors en effet  $f_i(p^{(h)}) = \text{Max}_{p \in I'_i} f_i(p)$ .

On démontre ce fait par induction sur  $i \geq 1$ . Le cas  $i = 1$  est trivial. Notons  $h' = \#J_{i-1}$ . Soient  $p^{(1)}, \dots, p^{(h')} \in I'_{i-1}$  les éléments possédant cette propriété au rang  $i - 1$ .

1) Supposons tout d'abord  $i \in C_2(T)$ . On a ( $I'_i = I'_{i-1} - \{p_i\}$  et  $J_i = J_{i-1}$ ) ou ( $I'_i = I'_{i-1}$  et  $J_i = J_{i-1} \cup \{p_i\}$ ) suivant qu'on a  $i \in C_2(T')$  ou  $i \in C_1(T')$ . Il suit :  $\#I'_{i-1} - \#J'_{i-1} = \#I'_i - \#J'_i + 1$ . Or, d'après (2C-B), on a l'inégalité  $\#I'_i \geq \#J_i$ . Il résulte  $\#I'_{i-1} \geq h' + 1$  de sorte qu'il existe  $p^{(0)} \in I'_{i-1}$  distinct de  $p^{(1)}, \dots, p^{(h')}$ .

Si  $i \in C_1(T')$ , alors on a  $f_{i-1}(p_i) = \infty$  (cf. lemme 15.3.2.(c)). On a en outre  $h = h' + 1$  comme dit ci-dessus. On a de plus l'égalité  $f_i(p^{(l)}) = f_{i-1}(p^{(l)}) + 1 \geq l + 1$  pour tout  $l \in \{0, \dots, h'\}$ . Ainsi les éléments  $p^{(0)}, \dots, p^{(h')} \in I'_i$  satisfont à la propriété.

Si  $i \in C_2(T')$ , alors on a  $h = h'$ . Pour  $l \in \{0, \dots, h'\}$  on a  $f_i(p^{(l)}) = f_{i-1}(p^{(l)})$  ou  $f_i(p^{(l)}) = f_{i-1}(p^{(l)}) + 1$  suivant qu'on a  $f_{i-1}(p^{(l)}) \geq f_{i-1}(p_i)$  ou  $f_{i-1}(p^{(l)}) < f_{i-1}(p_i)$ . Si  $p_i \notin \{p^{(1)}, \dots, p^{(h')}\}$ , alors les entiers  $p^{(1)}, \dots, p^{(h')}$  satisfont à la propriété. Si  $p_i = p^{(l)}$  pour un certain  $l \in \{1, \dots, h'\}$ , alors les éléments  $p^{(0)}, \dots, p^{(l-1)}, p^{(l+1)}, \dots, p^{(h')}$  peuvent être choisis.

2) Supposons ensuite  $i \in C_1(T)$ .

Supposons  $i \in C_1(T')$ . Alors on a  $h = h'$ . D'après 15.3.2.(c) on a l'égalité  $f_{i-1}(p_i) = \infty$ , d'où :  $f_i(p^{(l)}) = f_{i-1}(p^{(l)})$  pour tout  $l$ . Les entiers  $p^{(1)}, \dots, p^{(h')}$  peuvent être choisis.

Supposons  $i \in C_2(T')$ . Alors on a  $h = h' - 1$ . Pour  $l \in \{0, \dots, h'\}$  on a  $f_i(p^{(l)}) = f_{i-1}(p^{(l)})$  ou bien  $f_i(p^{(l)}) = f_{i-1}(p^{(l)}) - 1$  suivant qu'on a  $f_{i-1}(p^{(l)}) < f_{i-1}(p_i)$  ou  $f_{i-1}(p^{(l)}) \geq f_{i-1}(p_i)$ . Si  $p_i \notin \{p^{(2)}, \dots, p^{(h')}\}$ , alors les entiers  $p^{(2)}, \dots, p^{(h')}$  satisfont à la propriété. Si  $p_i = p^{(l)}$  pour un certain  $l \in \{2, \dots, h'\}$ , alors les éléments  $p^{(1)}, \dots, p^{(l-1)}, p^{(l+1)}, \dots, p^{(h')}$  conviennent.  $\square$

**Première différence entre les colonnes de  $T$  et  $T'$ .** Dans la discussion qui suit, on suppose que les colonnes de  $T$  et  $T'$  ne contiennent pas les mêmes entrées (autrement dit  ${}^S T' \neq T$  (cf. 4.4)). On considère  $i \in \{1, \dots, n\}$  le numéro minimal qui appartient à deux colonnes différentes de  $T$  et  $T'$ . D'après 15.3.2.(a) l'algorithme ne recense pas l'échec sur  $\{1, \dots, i - 1\}$  et on a  $\theta_{i-1} = T'_{i-1}$ .

Voyons tout d'abord sous quelle condition un échec se produit en  $i$ .

## 15.3.4. LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  le numéro minimal situé dans deux colonnes différentes de  $T$  et  $T'$ . Un échec se produit en  $i$  si et seulement si  $i \in C_1(T) \cap C_2(T')$ .

*Démonstration.* Aucun échec ne peut se produire lorsque  $i$  est dans la première colonne de  $T'$  (cf. 15.3.2.(b)), d'où la première implication. Supposons maintenant  $i \in C_1(T) \cap C_2(T')$ . On a  $f_{i-1}(p_i) = 0$  (cf. lemme 15.3.2.(a)), on est donc dans le second cas d'échec.  $\square$

Supposons qu'aucun échec ne survient en  $i$ . D'après le lemme on a donc  $i \in C_2(T) \cap C_1(T')$  et la situation est illustrée par la figure suivante :

$$\theta_{i-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline * & \\ \hline T'_{|i-1} & \\ \hline * & \\ \hline * & * \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \infty \end{array} \rightsquigarrow \theta_i = \begin{array}{|c|c|} \hline * & \\ \hline T'_{|i-1} & \\ \hline * & \\ \hline * & * \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} I \\ I \\ I \\ I \\ \infty \leftarrow p_i\text{-ème ligne} \end{array} \left. \vphantom{\theta_i} \right\} I_i$$

(Les indices  $f_i(p)$  sont inscrits à droite en chiffres romains.) On a en effet  $f_i(p) = 1$  pour tout  $p \in I_i$ . On a l'égalité  $I_i = I_{i-1}$  et  $I_i$  est l'ensemble des numéros des lignes de  $T'$  contenant une entrée parmi  $1, \dots, i-1$ . On a  $J_i = \{p_i\}$ .

On montre le lemme suivant :

### 15.3.5. LEMME

Soit  $i \in C_1(T') \cap C_2(T)$  le numéro minimal situé dans deux colonnes différentes de  $T$  et  $T'$ . Soit  $i' > i$  tel que l'algorithme n'échoue pas sur  $\{i+1, \dots, i'-1\}$  et tel que  $p_j \notin I_i$  pour tout  $j \in \{i+1, \dots, i'-1\}$ . Soit  $j \in \{i, \dots, i'-1\}$ . L'ensemble  $J_j$  est non-vide et on a la relation

$$f_j(p) < \#J_j = f_j(p').$$

pour tout  $p \in I_j - I_i$  et tout  $p' \in I_i$ .

*Démonstration.* Pour tout  $p' \in I_i$ , l'égalité  $\#J_j = f_j(p')$  découle de la propriété (2C-C) et du lemme 15.3.2.(d). On prouve les autres propriétés énoncées par récurrence sur  $j \geq i$ . Supposons ces propriétés satisfaites au rang  $j-1 \geq i$ . On fixe  $p' \in I_i$ .

Supposons d'abord  $I_{j-1} = I_i$ . Par hypothèse on a  $p_j \notin I_{j-1}$ . D'après (2C-C), il suit  $f_{j-1}(p_j) = \infty$ . D'après 15.3.2.(g) il résulte  $f_j(p') \geq f_{j-1}(p')$ . D'où :  $\#J_j \geq \#J_{j-1} > 0$ . Soit maintenant  $p \in I_j - I_i$ . On a donc  $p \notin I_{j-1}$ . D'après 15.3.2.(e), il suit  $f_j(p) = 0$ . D'où  $f_j(p) < \#J_j$ .

Supposons ensuite  $I_{j-1} - I_i \neq \emptyset$ . Donnons-nous  $p \in I_{j-1} - I_i$  tel que  $f_{j-1}(p)$  est maximal. D'après 15.3.2.(f) il suffit de montrer  $f_j(p) < f_j(p')$ . Comme  $p_j \notin I_i$ , on a  $f_{j-1}(p_j) \leq f_{j-1}(p)$  ou  $f_{j-1}(p_j) = \infty$  suivant que  $p_j \in I_{j-1}$  ou  $p_j \notin I_{j-1}$ . D'après 15.3.2.(h) il suit  $f_j(p) < f_j(p')$ . Il résulte en particulier  $\#J_j = f_j(p') > 0$  et la preuve est complète.  $\square$

#### 15.4. Propriétés de l'algorithme vis-à-vis de certains tableaux adjacents

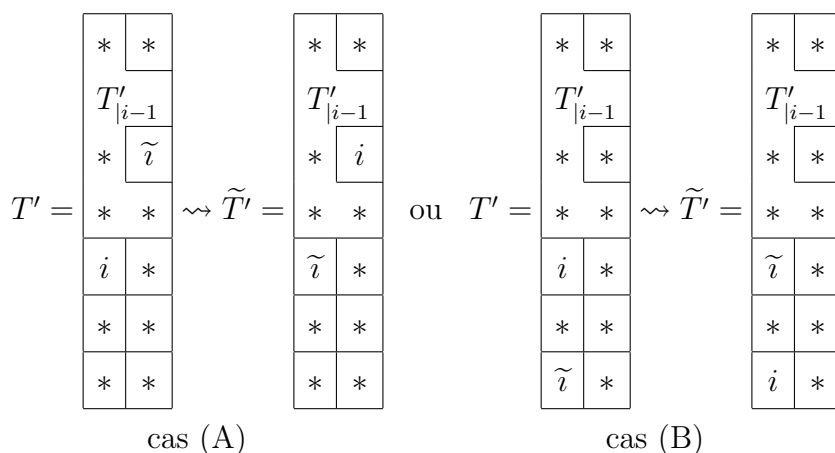
Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  le premier numéro situé dans deux colonnes différentes de  $T$  et  $T'$ . On considère un tableau lignes-standard  $\tilde{T}'$  s'obtenant d'après  $T'$  en échangeant  $i$  avec un autre numéro et on compare les chances de succès de l'algorithme pour les tableaux  $T'$  et  $\tilde{T}'$ . Ce problème préfigure les arguments inductifs qui seront employés durant la preuve du théorème.

On suppose  $i \in C_1(T') \cap C_2(T)$  de sorte qu'aucun échec ne survient en  $i$  (cf. lemme 15.3.4). Le numéro  $i$  apparaît ainsi tout d'abord dans la seconde colonne du tableau  $\theta_i$  et pour reconstruire  $T'$  il devra être déplacé vers la première colonne lors d'une étape ultérieure de l'algorithme.

Soit  $i' > i$  tel que l'algorithme n'échoue pas sur  $\{i + 1, \dots, i' - 1\}$  et tel que  $p_j \notin I_i$  pour tout  $j \in \{i + 1, \dots, i' - 1\}$  (situation du lemme 15.3.5). Supposons que  $i$  n'a pas encore été replacé dans la première colonne du tableau à l'étape  $i' - 1$ , autrement dit on suppose  $p_i \in J_{i'-1}$ . Supposons en outre que l'algorithme n'échoue pas à l'étape  $i'$ . En particulier il suit que le numéro voisin à droite de  $i$  dans  $T'$ , s'il y en a un, est strictement plus grand que  $i'$ , d'après 15.3.2.(d). Deux cas sont possibles :

- (A) Si  $p_{i'} \in I_i$ , alors on pose  $\tilde{i} = i'$ .
- (B) Si  $p_{i'} \notin I_i$ . D'après le lemme 15.3.5, l'ensemble  $J_{i'}$  est non-vide. On choisit  $\tilde{i} \in C_1(T')$  vérifiant  $p_{\tilde{i}} \in J_{i'}$ , que l'on choisit maximal pour l'ordre  $\prec_{T'}$  (cf. 15.1.2).

Dans le cas (B), d'après 15.3.2.(d), le numéro voisin à droite de  $\tilde{i}$  dans  $T'$ , s'il y en a un, est strictement plus grand que  $i'$ . Dans les deux cas, en échangeant les numéros  $i$  et  $\tilde{i}$  dans le tableau  $T'$ , on forme un autre tableau lignes-standard, que l'on note  $\tilde{T}'$ .



Dans les deux cas, on montre la proposition suivante :

##### 15.4.1. PROPOSITION

(Les notations sont celles qui ont été introduites ci-dessus.) L'algorithme relatif au couple  $(\tilde{T}', T)$  échoue en  $j \in \{1, \dots, n\}$  si et seulement si l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$  échoue lui-même en  $j$ .

Soient  $\tilde{p}_j, \tilde{\theta}_j, \tilde{f}_j, \tilde{I}_j, \tilde{J}_j$  les notations homologues de  $p_j, \theta_j, f_j, I_j, J_j$  relativement au couple  $(\tilde{T}', T)$ . On a besoin du résultat préliminaire suivant :

#### 15.4.2. LEMME

(Les notations ont été introduites ci-dessus.)

- (a) L'algorithme relatif au couple  $(\tilde{T}', T)$  n'échoue pas sur  $\{1, \dots, i'\}$ .  
 (b) Soit  $j \in \{i, \dots, \tilde{i} - 1\}$ . Le numéro  $i$  est situé dans la seconde case de la  $p_i$ -ème ligne de  $\theta_j$  tandis qu'il est situé dans la seconde case de la  $p_{\tilde{i}}$ -ème ligne de  $\tilde{\theta}_j$ . Les autres numéros des tableaux  $\theta_j$  et  $\tilde{\theta}_j$  sont à la même place dans les deux tableaux. De plus on a  $f_j(p) = \tilde{f}_j(p)$  pour tout  $p \notin I_i$ .  
 (c) Soit  $j \in \{\tilde{i}, \dots, i'\}$ . Les tableaux  $\theta_j$  et  $\tilde{\theta}_j$  s'obtiennent l'un d'après l'autre en échangeant les numéros  $i$  et  $\tilde{i}$ . De plus on a  $f_j(p) = \tilde{f}_j(p)$  pour tout  $p \in \{1, \dots, r\}$ .

*Démonstration de la proposition.* D'après la définition de l'algorithme, le succès de l'algorithme après l'étape  $j$  ne dépend que de la forme de  $\theta_j$ , des valeurs de la fonction  $f_j$  et du sous-tableau  $T'_{|n/j}$  formé par les numéros  $j + 1, \dots, n$ . D'après le point (c) du lemme, les tableaux  $\theta_{\tilde{i}}$  et  $\tilde{\theta}_{\tilde{i}}$  ont la même forme, les fonctions  $f_{\tilde{i}}$  et  $\tilde{f}_{\tilde{i}}$  sont égales, et d'autre part les sous-tableaux  $T'_{|n/\tilde{i}}$  et  $\tilde{T}'_{|n/\tilde{i}}$  coïncident. La proposition énoncée s'ensuit.  $\square$

*Démonstration du lemme.* On raisonne par récurrence sur  $j \geq i$ . Les propriétés énoncées sont satisfaites en  $j = i$ , comme l'illustre la figure suivante.

$$\theta_i = \begin{array}{|c|c|} \hline * & \\ \hline T'_{|i-1} & \\ \hline * & \\ \hline * & * \\ \hline & i \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} I \\ I \\ I \\ I \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{array} \quad \text{et} \quad \tilde{\theta}_i = \begin{array}{|c|c|} \hline * & \\ \hline T'_{|i-1} & \\ \hline * & i \\ \hline * & * \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{array} \quad \text{ou} \quad \tilde{\theta}_i = \begin{array}{|c|c|} \hline * & \\ \hline T'_{|i-1} & \\ \hline * & \\ \hline * & * \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & i \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} I \\ I \\ I \\ I \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|}} \right\} I_i = \tilde{I}_i$$

Supposons toutes les propriétés énoncées satisfaites au rang  $j - 1 \geq i$ . La démonstration comporte plusieurs étapes.

- (1) Tout d'abord on montre le point (a).

Dans les cas (A) et (B) l'entrée  $\tilde{i}$  appartient à la première colonne du tableau  $\tilde{T}'$ . D'après 15.3.2.(b), l'algorithme relatif au couple  $(\tilde{T}', T)$  n'échoue pas en  $\tilde{i}$ . Si  $j \neq \tilde{i}$ , alors on a  $j \notin \{i, \tilde{i}\}$  donc  $\tilde{p}_j = p_j \notin \{p_i, p_{\tilde{i}}\}$ .

Comme l'algorithme relatif à  $(T', T)$  n'échoue pas à l'étape  $j$ , la seconde case de la  $p_j$ -ème ligne du tableau  $\theta_{j-1}$  est libre. Comme les tableaux  $\theta_{j-1}$  et  $\tilde{\theta}_{j-1}$  satisfont aux propriétés (b) et (c) par hypothèse de récurrence, la  $p_j$ -ème ligne de

$\tilde{\theta}_{j-1}$  coïncide avec celle de  $\theta_{j-1}$  donc sa seconde case est libre. Ainsi  $j$  peut être inséré dans la seconde case de la  $p_j$ -ème ligne de  $\tilde{\theta}_{j-1}$  de sorte que le premier cas d'échec ne se produit pas à l'étape  $j$  pour le couple  $(\tilde{T}', T)$ . On a d'autre part  $p_j \notin I_i$  donc  $\tilde{f}_{j-1}(p_j) = f_{j-1}(p_j)$  par hypothèse de récurrence.

Comme aucun échec ne survient pour le couple  $(T', T)$  à l'étape  $j$ , il suit  $f_{j-1}(p_j) \neq 0$  donc d'après la relation précédente  $\tilde{f}_{j-1}(p_j) \neq 0$ . De cette façon le second cas d'échec ne se produit pas non plus. Le point (a) est établi.

(2) On montre ensuite que la différence entre les tableaux  $\theta_j$  et  $\tilde{\theta}_j$  est conforme à ce qui est décrit par les points (b) (si  $j < \tilde{i}$ ) et (c) (si  $j \geq \tilde{i}$ ).

Rappelons que le tableau  $\theta_j$  (resp.  $\tilde{\theta}_j$ ) s'obtient d'après  $\theta_{j-1}$  (resp.  $\tilde{\theta}_{j-1}$ ) en une ou deux étapes. Au cours de la première étape le numéro  $j$  est inséré dans la seconde case de la  $p_j$ -ème ligne (resp. la  $\tilde{p}_j$ -ème ligne) de  $\theta_{j-1}$  (resp. de  $\tilde{\theta}_{j-1}$ ). Notons  $\theta'_j$  (resp.  $\tilde{\theta}'_j$ ) le tableau intermédiaire ainsi obtenu.

On a  $p_j = \tilde{p}_j$  pour  $j \neq \tilde{i}$ . On a d'autre part  $p_{\tilde{i}} = \tilde{p}_{\tilde{i}}$  et  $\tilde{p}_{\tilde{i}} = p_{\tilde{i}}$ . Par hypothèse de récurrence, les tableaux  $\theta'_j$  et  $\tilde{\theta}'_j$  présentent la même différence que celle qui est décrite dans l'énoncé du lemme à propos des tableaux  $\theta_j$  et  $\tilde{\theta}_j$  : si  $j < \tilde{i}$ , la différence entre  $\theta'_j$  et  $\tilde{\theta}'_j$  est décrite par le point (b) du lemme. Si  $j \geq \tilde{i}$ , elle est conforme au point (c).

Dans le cas  $j \in C_2(T)$  on a  $\theta_j = \theta'_j$  et  $\tilde{\theta}_j = \tilde{\theta}'_j$  et il n'y a rien de plus à prouver.

Supposons maintenant  $j \in C_1(T)$ .

Notons  $F'_j$  (resp.  $\tilde{F}'_j$ ) l'ensemble des numéros de la seconde colonne du tableau  $\theta'_j$  (resp.  $\tilde{\theta}'_j$ ) dont la case voisine à gauche est libre. Le tableau  $\theta_j$  (resp.  $\tilde{\theta}_j$ ) s'obtient à partir du tableau intermédiaire  $\theta'_j$  (resp.  $\tilde{\theta}'_j$ ) en déplaçant vers la gauche l'élément de l'ensemble  $F'_j$  (resp.  $\tilde{F}'_j$ ) qui est minimal pour l'ordre  $\prec_{T'}$  (resp.  $\prec_{\tilde{T}'}$ ).

★ Étudions brièvement le lien entre les ordres  $\prec_{T'}$  et  $\prec_{\tilde{T}'}$ . Soient  $l, m \in C_1(T')$  distincts de  $i$  et  $\tilde{i}$ . On a ainsi  $l, m \in C_1(\tilde{T}')$ . Observons qu'on a l'équivalence  $l \prec_{T'} m \Leftrightarrow l \prec_{\tilde{T}'} m$ . On a de plus :  $l \prec_{T'} i \Leftrightarrow l \prec_{\tilde{T}'} \tilde{i}$ . Dans le cas (B) on a aussi l'équivalence  $l \prec_{T'} \tilde{i} \Leftrightarrow l \prec_{\tilde{T}'} i$ .

Soient maintenant  $m$  et  $\tilde{m}$  les éléments minimaux respectifs des ensembles  $F'_j$  et  $\tilde{F}'_j$  pour l'ordre approprié. Il suffit de démontrer  $p_m = \tilde{p}_{\tilde{m}}$ .

(2.a) Plaçons-nous d'abord dans le cas (A).

Dans ce cas  $i' = \tilde{i}$ . On a de plus  $\tilde{i} \in C_2(T')$  et  $i \in C_2(\tilde{T}')$ . En particulier  $m$  est distinct de  $\tilde{i}$  et  $\tilde{m}$  est distinct de  $i$ .

• Supposons d'abord  $j < i' = \tilde{i}$ . Les tableaux  $\theta'_j$  et  $\tilde{\theta}'_j$  présentent la différence décrite par (b), d'où :  $F'_j = \tilde{F}'_j \sqcup \{i\}$ . On obtient  $\tilde{m} \in F'_j$ , d'où il suit  $m \preceq_{T'} \tilde{m}$ . Par hypothèse  $i$  est encore dans la seconde colonne du tableau  $\theta_{i'-1}$ . À l'étape  $j$ , ce n'est donc pas l'entrée  $i$  qui est replacée vers la première colonne de  $\theta_j$ . Autrement dit  $m \neq i$ . Il suit  $m \in \tilde{F}'_j$ . Ainsi  $m$  et  $\tilde{m}$  sont distincts de  $i$  et  $\tilde{i}$  de sorte

que la relation  $m \preceq_{T'} \tilde{m}$  implique la relation  $m \preceq_{\tilde{T}'} \tilde{m}$ , comme vu précédemment. Par minimalité de  $\tilde{m}$ , il suit  $m = \tilde{m}$ .

- Supposons ensuite  $j = i'$ . Les tableaux  $\theta'_{i'}$  et  $\tilde{\theta}'_{i'}$  présentent la différence décrite par (c), ce qui se traduit par l'égalité :  $F'_{i'} \sqcup \{\tilde{i}\} = \tilde{F}'_{i'} \sqcup \{i\}$ .

- Supposons d'abord  $m \neq i$ . On a alors  $m \in \tilde{F}'_{i'}$ , d'où la relation :  $\tilde{m} \preceq_{\tilde{T}'} m$ . On a  $i \in F'_{i'}$  et on suppose  $m \neq i$ . Par minimalité de  $m$  on obtient donc  $m \prec_{T'} i$ . D'où :  $m \prec_{\tilde{T}'} \tilde{i}$ , comme vu précédemment. On a donc  $\tilde{m} \neq \tilde{i}$ . Ainsi on obtient  $\tilde{m} \in F'_{i'}$  et  $m \preceq_{T'} \tilde{m}$ . Comme  $m$  et  $\tilde{m}$  sont distincts de  $i$  et  $\tilde{i}$ , la relation  $m \preceq_{T'} \tilde{m}$  implique  $m \preceq_{\tilde{T}'} \tilde{m}$ . Par minimalité de  $\tilde{m}$  pour l'ordre  $\preceq_{\tilde{T}'}$ , il résulte  $m = \tilde{m}$ .

- Étudions maintenant le cas  $m = i$ . Un élément  $l \in \tilde{F}'_{i'}$  distinct de  $\tilde{i}$  appartient à l'ensemble  $F'_{i'}$  (d'après l'égalité précédente), donc on a  $i \preceq_{T'} l$  par minimalité de  $i$ . D'après une propriété liant les ordres  $\preceq_{T'}$  et  $\preceq_{\tilde{T}'}$  énoncée précédemment, on obtient  $\tilde{i} \preceq_{\tilde{T}'} l$  pour tout  $l$  distinct de  $\tilde{i}$ . On a donc forcément  $\tilde{m} = \tilde{i}$ . Il suit  $p_m = \tilde{p}_{\tilde{m}}$  comme affirmé.

Dans tous les cas on a (au moins) l'égalité  $p_m = \tilde{p}_{\tilde{m}}$ . L'argumentation est complète dans le cas (A).

(2.b) Plaçons-nous ensuite dans le cas (B).

Les numéros  $i$  et  $\tilde{i}$  apparaissent tous deux à la fois dans la première colonne de  $T'$  et dans celle de  $\tilde{T}'$ . On a en particulier  $m \preceq_{T'} i$ .

Par hypothèse le numéro  $i$  apparaît encore dans la seconde colonne du tableau  $\theta'_{i'-1}$ , donc à l'étape  $j \leq i'$  on a  $i \in F'_j$ . On a encore  $i \in F'_{i'}$ . Comme de plus  $\tilde{i}$  est l'élément maximal de l'ensemble  $F'_{i'}$  pour l'ordre  $\prec_{T'}$ , il suit  $i \preceq_{T'} \tilde{i}$ . D'après le lemme 15.3.5 l'ensemble  $J_{i'}$  est non-vidé, de sorte qu'il y a encore des numéros dans la seconde colonne de  $\theta'_{i'}$  avec une case libre à leur gauche. Le numéro  $\tilde{i}$ , qui est maximal pour l'ordre  $\prec_{T'}$ , est forcément l'un d'eux, de sorte qu'à l'étape  $j \leq i'$  le numéro  $\tilde{i}$  n'est pas remplacé dans la première colonne du tableau et on a  $m \neq \tilde{i}$ .

Les tableaux  $\theta'_j$  et  $\tilde{\theta}'_j$  présentent la différence décrite par (b) ou (c), on a donc  $F'_j = \tilde{F}'_j$ . D'où  $i \in F'_j \cap \tilde{F}'_j$ . Si  $j \geq \tilde{i}$ , alors on a de plus  $\tilde{i} \in F'_j \cap \tilde{F}'_j$ . On a en outre  $m, \tilde{m} \in F'_j \cap \tilde{F}'_j$ .

- Supposons d'abord  $m \neq i$ . D'où  $m \prec_{T'} i$ . Comme  $m \neq \tilde{i}$ , cette relation implique  $m \prec_{\tilde{T}'} \tilde{i}$ , en vertu des règles liant les relations  $\prec_{T'}$  et  $\prec_{\tilde{T}'}$  que l'on a énoncées précédemment. Il suit :  $\tilde{m} \neq \tilde{i}$ . On a établi la relation  $i \prec_{T'} \tilde{i}$ . D'après ces mêmes règles (ou même cela est visible directement) on a  $\tilde{i} \prec_{\tilde{T}'} i$ . Il suit par transitivité  $m \prec_{\tilde{T}'} i$ , d'où  $\tilde{m} \neq i$ . Ainsi  $m$  et  $\tilde{m}$  sont distincts de  $i$  et  $\tilde{i}$  et la relation  $m \preceq_{T'} \tilde{m}$  implique  $m \preceq_{\tilde{T}'} \tilde{m}$ . Il résulte  $m = \tilde{m}$ .

- Traitons maintenant le cas  $m = i$  : Comme  $i$  n'est pas encore remplacé dans la première colonne du tableau après l'étape  $i' - 1$ , on a nécessairement  $j = i'$ . On a  $\tilde{i} \in F'_{i'} \cap \tilde{F}'_{i'}$ . Comme  $i = m$  est minimal dans l'ensemble  $F'_{i'}$  pour l'ordre  $\prec_{T'}$ , d'après les règles énoncées liant les ordres  $\prec_{T'}$  et  $\prec_{\tilde{T}'}$ , on obtient que  $\tilde{i}$  est lui-même minimal dans l'ensemble  $\tilde{F}'_{i'}$  pour l'ordre  $\prec_{\tilde{T}'}$ . D'où  $\tilde{m} = \tilde{i}$ .

Dans les deux cas, on a au moins  $p_m = \tilde{m}$ . L'argumentation est complète dans le cas (B) et la seconde partie de la démonstration du lemme est achevée.

(3) On montre enfin l'égalité  $f_j(p) = \tilde{f}_j(p)$  pour  $p \notin I_i$  ou bien pour tout  $p$  suivant qu'on a  $j < \tilde{i}$  ou  $j \geq \tilde{i}$ .

D'après le point (2) de la démonstration, on a  $I_j = \tilde{I}_j$ . On a de plus  $J_j = \tilde{J}_j$  pour  $j \geq \tilde{i}$ .

(3.a) Soit d'abord  $p \in I_i$ . D'après 15.3.2.(f) et (2C-C), on a  $f_j(p) = \#J_j$  et  $\tilde{f}_j(p) = \#\tilde{J}_j$ . Pour  $j \geq \tilde{i}$ , on obtient donc  $f_j(p) = \tilde{f}_j(p)$ .

(3.b) Supposons ensuite  $p \notin I_j$ . Comme  $I_j = \tilde{I}_j$  on a aussi  $p \notin \tilde{I}_j$ . D'après (2C-C) on obtient  $f_j(p) = \tilde{f}_j(p) = \infty$ .

(3.c) Supposons  $p \in I_j - I_{j-1}$ . On a  $\tilde{I}_{j-1} = I_{j-1}$  par récurrence. Il suit  $p \in \tilde{I}_j - \tilde{I}_{j-1}$ . D'après le lemme 15.3.2.(e), on obtient  $f_j(p) = \tilde{f}_j(p) = 0$ .

(3.d) Soit enfin  $p \in I_{j-1} - I_i$ . Par récurrence on a  $f_{j-1}(p) = \tilde{f}_{j-1}(p)$ .

- Supposons d'abord  $j \neq \tilde{i}$ . On a alors  $p_j \notin I_i$  et  $p_j = \tilde{p}_j$ . D'où par récurrence  $f_{j-1}(p_j) = \tilde{f}_{j-1}(\tilde{p}_j)$ . Comme  $f_j(p)$  dépend uniquement des valeurs  $f_{j-1}(p)$  et  $f_{j-1}(p_j)$ , on obtient  $f_j(p) = \tilde{f}_j(p)$ .

- Traitons enfin le cas  $j = \tilde{i}$ . Comme  $\tilde{i}$  apparaît dans la première colonne de  $\tilde{T}'$ , on a  $\tilde{f}_{\tilde{i}-1}(\tilde{p}_{\tilde{i}}) = \infty$  (cf lemme 15.3.2.(c)). Dans le cas (B), le numéro  $\tilde{i}$  appartient à la première colonne de  $T'$  et on a pareillement  $f_{\tilde{i}-1}(p_{\tilde{i}}) = \infty$ . Dans le cas (A), on a  $p_{\tilde{i}} \in I_i$ , d'où  $f_{\tilde{i}-1}(p_{\tilde{i}}) > f_{\tilde{i}-1}(p)$  par le lemme 15.3.5. Dans les deux cas on a  $f_{\tilde{i}-1}(p_{\tilde{i}}) > f_{\tilde{i}-1}(p)$  d'une part et  $\tilde{f}_{\tilde{i}-1}(\tilde{p}_{\tilde{i}}) > \tilde{f}_{\tilde{i}-1}(p)$  d'autre part. On a donc  $f_{\tilde{i}}(p) = f_{\tilde{i}-1}(p) + \epsilon$  et  $\tilde{f}_{\tilde{i}}(p) = \tilde{f}_{\tilde{i}-1}(p) + \epsilon$  avec  $\epsilon = 0$  si  $\tilde{i} \in C_1(T)$  ou  $\epsilon = 1$  si  $\tilde{i} \in C_2(T)$ . Par hypothèse de récurrence  $\tilde{f}_{\tilde{i}-1}(p) = f_{\tilde{i}-1}(p)$ . Il résulte :  $f_{\tilde{i}}(p) = \tilde{f}_{\tilde{i}}(p)$ .

Cet argument conclut le point (3) de la démonstration du lemme 15.4.2, laquelle est maintenant complète.  $\square$

## 15.5. Démonstration de l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) du théorème 15.2

On débute la preuve par un argument géométrique.

*Une propriété d'interdépendance entre les points fixes de la composante  $K^T$ .* Rappelons tout d'abord la définition du drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$ , pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. On a fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$  une base de Jordan de forme  $Y$ . Le tableau  $T'$  est une numérotation des cases de  $Y$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $x_i$  la case de  $Y$  qui porte le numéro  $i$  dans  $T'$ . On pose alors  $e[i] = e_{x_i}$ . De cette manière le drapeau  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$  est défini par

$$V_i = \langle \varepsilon[1], \dots, \varepsilon[i] \rangle, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On montre le lemme suivant :



## 15.5.1. LEMME

Soient  $i, j, l, m, i', j'$  des entrées du tableau  $T'$  dont les positions relatives dans le tableau sont conformes au dessin suivant :

$$T' = \begin{array}{|c|c|} \hline \vdots & \\ \hline i & i' \\ \hline \vdots & \\ \hline j & j' \\ \hline \vdots & \\ \hline l & \\ \hline \vdots & \\ \hline m & \\ \hline \vdots & \\ \hline \end{array}$$

Si le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ , alors le drapeau  $\mathcal{F}_{\tilde{T}'}$  lui aussi est contenu  $K^T$ , lorsque  $\tilde{T}'$  est le tableau lignes-standard obtenu d'après  $T'$  en échangeant les positions...

- (1) ...des couples  $(i, i')$  et  $(j, j')$ .
- (1') ...de  $l$  et  $m$ .
- (2) ...de  $i$  et  $j$ , si  $i < j$  et  $i' > j'$ .
- (2') ...de  $i$  et  $l$ , si  $i > l$ .
- (3) ...de  $i'$  et  $j$ , si  $i' < j$ .
- (3') ...de  $i'$  et  $l$ , si  $i' < l$ .

*Remarques.*

(a) Bien sûr, en combinant ces propriétés, on en obtient d'autres du même genre. Par exemple on a  $\mathcal{F}_{\tilde{T}'} \in K^T$  lorsque  $\tilde{T}'$  est obtenu d'après  $T'$  en échangeant  $i'$  et  $j'$  pour  $i < j$  et  $i' > j'$ ...

(b) Les points (2) et (2') peuvent être remplacés par l'assertion suivante : si  $\tilde{T}'$  est un tableau obtenu d'après  $T'$  en échangeant  $i, j \in C_1(T')$  vérifiant  $i < j$  et  $i \succ_{T'} j$ , alors on a :  $\mathcal{F}_{T'} \in K^T \Rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{T}'} \in K^T$ .

*Démonstration du lemme.* Rappelons qu'un automorphisme  $\varphi \in GL(V)$  qui commute avec  $u$  laisse stable chaque composante irréductible de  $\mathcal{B}_u$ .

(1) et (1') :

Soit  $\varphi : V \rightarrow V$  l'automorphisme dont l'action échange les vecteurs  $e[i]$  avec  $e[j]$  d'une part et  $e[i']$  avec  $e[j']$  d'autre part et qui fixe les autres vecteurs de la base. Soit  $\varphi' : V \rightarrow V$  l'automorphisme qui échange les vecteurs  $\varepsilon[l]$  et  $\varepsilon[m]$  et qui fixe les autres vecteurs de la base. Les automorphismes  $\varphi$  et  $\varphi'$  commutent avec  $u$ , dont laissent la composante  $K^T$  invariante. Dans le cas (1) on obtient

$$\mathcal{F}_{\tilde{T}'} = \varphi(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T.$$

Dans le cas (1') on obtient pareillement

$$\mathcal{F}_{T'}^{\sim} = \varphi'(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T.$$

(2) et (2') :

Pour  $t \in k$  soit  $h_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme tel que  $h_t(e[i]) = e[i] + te[j]$  et  $h_t(e[i']) = e[i'] + te[j']$  et qui fixe les autres vecteurs de la base. Soit  $h'_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme tel que  $h'_t(e[i]) = e[i] + te[l]$  et qui fixe les autres vecteurs de la base. Pour tout  $t \in k$  les automorphismes  $h_t$  et  $h'_t$  commutent avec  $u$ , donc on a  $h_t(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T$  et  $h'_t(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T$ . Dans le cas (2) on obtient

$$\mathcal{F}_{T'}^{\sim} = \lim_{t \rightarrow \infty} h_t(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T.$$

Dans le cas (2') on obtient

$$\mathcal{F}_{T'}^{\sim} = \lim_{t \rightarrow \infty} h'_t(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T.$$

(3) et (3') :

Pour  $t \in k$  soit  $w_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme tel que  $w_t(e[i']) = e[i'] + te[j]$  et qui fixe les autres vecteurs de la base. Soit  $w'_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme tel que  $w'_t(e[i']) = e[i'] + te[l]$  et qui fixe les autres vecteurs de la base. Clairement les automorphismes  $w_t$  et  $w'_t$  commutent avec  $u$ . Dans le cas (3) on obtient

$$\mathcal{F}_{T'}^{\sim} = \lim_{t \rightarrow \infty} w_t(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T$$

et dans le cas (3') on a de même

$$\mathcal{F}_{T'}^{\sim} = \lim_{t \rightarrow \infty} w'_t(\mathcal{F}_{T'}) \in K^T.$$

La preuve est complète.  $\square$

### 15.5.2. Démonstration de l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) du théorème

Supposons que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible et montrons que le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ . L'implication est immédiate dans un cas :

★ Supposons  $C_1(T) = C_1(T')$  et  $C_2(T) = C_2(T')$ .

En d'autres termes on a  $T' \in \mathcal{T}'(T)$  (cf 4.4) et on sait qu'alors le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  (cf. 4.8) donc dans la composante  $K^T$ .

★ Supposons ensuite qu'il existe un numéro  $i \in \{1, \dots, n\}$  minimal contenu dans deux colonnes distinctes de  $T$  et  $T'$ . On raisonne par récurrence descendante sur  $i$ , l'initialisation de la récurrence correspondant au cas traité ci-dessus où les contenus des colonnes de  $T$  et  $T'$  ne diffèrent pas.

D'après le lemme 15.3.4, on a  $i \in C_1(T') \cap C_2(T)$ . Le numéro  $i$  apparaît dans la seconde colonne du tableau  $\theta_i$ . Comme on suppose que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible, les tableaux  $\theta_1, \dots, \theta_n$  peuvent être tous construits sans qu'un cas d'échec ne survienne et on trouve finalement  $\theta_n = T'$ . D'après le lemme 15.3.5 il existe  $i' > i$  minimal tel que  $i$  est contenu dans la première colonne du tableau  $\theta_{i'}$ . Autrement dit  $i$  est décalé à gauche lors de la  $i'$ -ème étape de l'algorithme. On a donc  $p_i \in J_{i'-1}$  et  $p_i \in I_{i'}$ , où  $p_i$  est le numéro de la ligne de  $T'$  contenant

$i$  et  $J_{i'-1}$  et  $I_{i'}$  sont les ensembles de l'axiome (2C-C) de la définition de l'algorithme. D'après le lemme 15.3.5 il existe aussi  $j > i$  minimal tel que  $p_j \in I_i$ . Dans la première récurrence on imbrique un second raisonnement par récurrence descendante, cette fois sur  $i'$ , avec initialisation pour  $i' \geq j$ .

1) *Étude du cas  $i' \geq j$ .* On est dans le cas (A) décrit dans la section 15.4, avec ici  $j$  dans le rôle  $i'$ . Comme dans 15.4, on pose  $\tilde{i} = j$  et on considère  $\tilde{T}'$  le tableau lignes-standard obtenu d'après  $T'$  en échangeant  $i$  et  $\tilde{i}$ . D'après la proposition 15.4.1 le tableau  $\tilde{T}'$  est  $T$ -constructible. Comme chacune des entrées  $1, \dots, i$  est contenue dans la même colonne de  $T$  et  $T'$ , on obtient  $\mathcal{F}_{\tilde{T}'} \in K^T$  par hypothèse de récurrence. D'après le lemme 15.5.1 on déduit  $\mathcal{F}_{T'} \in K^T$ .

2) *Cas général.* Supposons maintenant  $i' < j$ . On est dans le cas (B) décrit par la section 15.4 avec  $i'$  dans son propre rôle. Soit  $\tilde{i} > i$  le numéro introduit dans la section 15.4. Le numéro  $\tilde{i}$  appartient à la première colonne de  $T'$  mais appartient encore à la seconde colonne de  $\theta_{i'}$ . Soit  $\tilde{T}'$  le tableau obtenu d'après  $T'$  en échangeant  $i$  et  $\tilde{i}$ . Par la proposition 15.4.1 le tableau  $\tilde{T}'$  est  $T$ -constructible. Le numéro  $i$  est le premier qui soit situé dans deux colonnes distinctes des tableaux  $\tilde{T}'$  et  $T$ . En outre  $i$  appartient encore à la seconde colonne du tableau  $\tilde{\theta}_{i'}$  obtenu à la  $i'$ -ème étape de l'exécution de l'algorithme relatif au couple  $(\tilde{T}', T)$ . Par récurrence, on a  $\mathcal{F}_{\tilde{T}'} \in K^T$ . En utilisant le lemme 15.5.1, on déduit  $\mathcal{F}_{T'} \in K^T$ .

La démonstration de l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) est maintenant complète.  $\square$

## 15.6. Relations de dominance impliquées par un succès partiel de l'algorithme

À ce stade d'avancement de la démonstration du théorème 15.2, les implications (b) $\Rightarrow$ (a) et (a) $\Rightarrow$ (c) sont établies. En les combinant, on obtient : si le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible, alors pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$  on a la relation  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$ .

Supposons maintenant que l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$  ne rencontre pas l'échec au moins jusqu'à l'étape  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Sous cette hypothèse plus générale on peut espérer avoir tout de même la relation  $Y_{j/i'}(T') \preceq Y_{j/i'}^T$  pour les couples  $(i', j)$  tels que  $0 \leq i' < j \leq i$ . Nous allons en effet établir cette propriété. Elle sera utile dans la suite de la démonstration du théorème.

On utilise le lemme suivant :

### 15.6.1. LEMME

*Supposons que l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$  n'échoue pas sur  $\{1, \dots, i\}$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Il existe un entier  $\hat{n} \geq n$ , un diagramme de Young  $\hat{Y}$  à deux colonnes et  $\hat{n}$  cases, un tableau standard  $\hat{T}$  de forme  $\hat{Y}$ , un tableau lignes-standard  $\hat{T}'$  de même forme, tels que :*

- (1) *Le tableau  $\hat{T}'$  est  $\hat{T}$ -constructible,*

(2) les sous-tableaux  $\widehat{T}_i$  et  $T_i$  coïncident d'une part et les sous-tableaux  $\widehat{T}'_i$  et  $T'_i$  coïncident d'autre part.

*Démonstration.* Soit  $\widehat{Y}$  le diagramme de Young rectangulaire à deux colonnes et  $r$  lignes. Posons  $\widehat{n} = 2r$ . Les tableaux  $T'_i$  et  $T_i$  peuvent être vus comme des numérotations partielles du diagramme  $\widehat{Y}$ . Le  $i$ -ème tableau algorithmique  $\theta_i$  est lui aussi une numérotation partielle des cases du diagramme  $\widehat{Y}$ . On construit les tableaux  $\widehat{T}$  et  $\widehat{T}'$  selon un raisonnement par récurrence descendente sur  $i \leq n$ .

Rappelons que  $J_i$  désigne l'ensemble des numéros  $p \in \{1, \dots, r\}$  des lignes non-vides de  $\theta_i$  dont cependant la première case est vide. Si  $i = n$ , alors  $T'$  est  $T$ -constructible, on obtient donc  $\theta_n = T'$  et on a  $J_n = \emptyset$ . L'étude du cas  $J_i = \emptyset$ , à laquelle nous procédons maintenant, peut donc tenir lieu d'initialisation de la récurrence.

- On suppose tout d'abord  $J_i = \emptyset$ . D'après (2C-A) on a ainsi  $\theta_i = T'_i$ . De cette égalité et de l'axiome (2C-B) il résulte que les colonnes des sous-tableaux  $T_i$  et  $T'_i$  ont même taille. Le sous-tableau  $T'_i$  est une numérotation partielle des case de  $\widehat{Y}$ . On complète  $T'_i$  en un tableau lignes-standard  $\widehat{T}'$  de forme  $\widehat{Y}$  en numérotant les cases restantes de  $i + 1$  à  $\widehat{n}$  de la manière suivante : on commence par numéroté les cases vides de la première colonne de haut en bas, puis on numérote les cases vides de la seconde colonne de haut en bas. De même  $T_i$  est vu comme une numérotation partielle de  $\widehat{Y}$  et en numérotant les cases restantes suivant la même règle on complète  $T_i$  en un tableau standard  $\widehat{T}$  de forme  $\widehat{Y}$ . De cette manière chaque numéro  $j \in \{i + 1, \dots, \widehat{n}\}$  appartient à la même colonne de  $\widehat{T}$  et  $\widehat{T}'$ . Il est alors facile de se convaincre que le tableau  $\widehat{T}'$  est  $\widehat{T}$ -constructible.

- Supposons maintenant  $J_i \neq \emptyset$ , on a en particulier  $i < n$ . Rappelons que  $I'_i$  est l'ensemble des  $p \in \{1, \dots, r\}$  tels que la première case de la  $p$ -ème ligne de  $\theta_i$  est non-vide tandis que la seconde est vide. D'après la proposition 15.3.3 il existe  $p \in I'_i$  tel que  $f_i(p) = \#J'_i$ . Le sous-tableau  $T'_i$  est vu comme une numérotation partielle du diagramme  $\widehat{Y}$ . On complète  $T'_i$  en un tableau lignes-standard  $\widehat{T}'$  de forme  $\widehat{Y}$  de la manière suivante : tout d'abord en insérant l'entrée  $i + 1$  dans la seconde case de la  $p$ -ème ligne puis en numérotant les cases restantes de  $i + 2$  à  $\widehat{n}$  de telle sorte que les lignes soient croissantes. On complète  $T_i$  en un tableau standard  $\widehat{T}$  de forme  $\widehat{Y}$  en numérotant les cases restantes de  $i + 1$  à  $\widehat{n}$  de telle sorte que les lignes et colonnes du tableau obtenu restent croissantes. Durant ses  $i$  premières étapes, l'algorithme relatif au couple  $(\widehat{T}', \widehat{T})$  se confond avec celui qui concerne le couple  $(T', T)$ , le tableau  $\widehat{\theta}_i$  obtenu à la  $i$ -ème étape coïncide avec  $\theta_i$  et les fonctions indices  $\widehat{f}_i$  et  $f_i$  sont égales. À la  $(i + 1)$ -ème étape de l'algorithme relatif au couple  $(\widehat{T}', \widehat{T})$ , le numéro  $i + 1$  doit être inséré dans la  $p$ -ème ligne de  $\widehat{\theta}_i$ . On a  $\widehat{f}_i(p) = f_i(p) = \#J_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ . D'après 15.3.2.(b), l'algorithme relatif au couple  $(\widehat{T}', \widehat{T})$  n'échoue pas non plus en  $i + 1$ . Par récurrence la construction se poursuit. La démonstration est complète.  $\square$

On montre maintenant la proposition suivante :

### 15.7. PROPOSITION

Supposons que l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$  n'échoue pas sur  $\{1, \dots, i\}$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pour tous entiers  $i', j \in \{0, \dots, i\}$  vérifiant  $i' < j$ , on a la relation de dominance  $Y_{j/i'}(T') \preceq Y_{j/i'}^T$ .

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, il existe des tableaux  $\widehat{T}'$  et  $\widehat{T}$  respectivement lignes-standard et standard, de même forme, tels que  $\widehat{T}'$  est  $\widehat{T}$ -constructible et tels qu'on ait  $T'_{|i} = \widehat{T}'_{|i}$  et  $T_{|i} = \widehat{T}_{|i}$ . D'après l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) du théorème 15.2 (déjà établie) le drapeau  $\mathcal{F}_{\widehat{T}'}$  appartient à la composante  $K^{\widehat{T}}$  (dans la fibre de Springer appropriée). D'après la proposition 12.2, on obtient la relation de dominance  $Y_{j/i'}(\widehat{T}') \preceq Y_{j/i'}^{\widehat{T}}$  pour tous entiers  $i', j \in \{0, \dots, \widehat{n}\}$  vérifiant  $i' < j$ . Pour  $i', j \in \{0, \dots, i\}$  les diagrammes  $Y_{j/i'}(\widehat{T}')$  et  $Y_{j/i'}(T')$  coïncident d'une part et  $Y_{j/i'}^{\widehat{T}}$  et  $Y_{j/i'}^T$  coïncident d'autre part, si bien qu'on obtient la relation annoncée.  $\square$

### 15.8. Démonstration de l'implication (c) $\Rightarrow$ (b) du théorème 14.2

Commençons par une observation relative au jeu de Taquin.

*Jeu de Taquin sur les tableaux gauches à deux colonnes.* Dans le lemme 10.4.1 on a décrit le tableau de Young  ${}^Y\Gamma$  obtenu par jeu de Taquin à partir d'un tableau gauche  $\Gamma$ .

Supposons  $\Gamma = T_{|l/m}$  pour  $0 \leq l < m \leq n$ . Ainsi la forme du tableau  ${}^Y\Gamma = {}^\Gamma T_{|m/l}$  est le diagramme  $Y_{m/l}^T$  (cf. 10.2.1. On déduit du lemme 10.4.1 certaines propriétés qui concernent le diagramme  $Y_{m/l}^T$  :

#### 15.8.1. PROPOSITION

Soit  $T$  un tableau standard à deux colonnes.

(a) Soient  $l, m \in \{0, \dots, n\}$  tels que  $l < m - 1$ . On a  $\#C_2({}^Y T_{|m/l}) \geq \#C_2({}^Y T_{|m/l+1})$ . De plus, si  $l \in C_2(T)$ , alors on a l'égalité

$$\#C_2({}^Y T_{|m/l}) = \#C_2({}^Y T_{|m/l+1}).$$

(b) Supposons  $0 \leq i < l < m \leq n$ . On note  $\Gamma^1 = T_{|l/i}$ ,  $\Gamma^2 = T_{|m/l}$  et  $\Gamma^0 = T_{|m/i}$ . Pour  $a \in \{0, 1, 2\}$  on pose  $\tilde{\pi}_a = \#C_1({}^Y \Gamma^a) - \#C_2({}^Y \Gamma^a)$ . On a l'inégalité :

$$\tilde{\pi}_0 \geq \tilde{\pi}_2 - \tilde{\pi}_1.$$

*Démonstration.* Le point (a) résulte immédiatement du lemme 10.4.1.

Montrons (b). D'après le lemme 10.4.1, on a

$$\#C_2({}^Y \Gamma^0) \leq \#C_1(\Gamma^1) + \#C_2({}^Y \Gamma^2).$$

Il suit :

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0 &= m - i - 2\#C_2(Y\Gamma^0) \\
&\geq m - i - 2\#C_1(\Gamma^1) - 2\#C_2(Y\Gamma^2) \\
&= (m - l - 2\#C_2(Y\Gamma^2)) + l - i - 2\#C_1(\Gamma^1) \\
&= \tilde{\pi}_2 + \#C_2(\Gamma^1) - \#C_1(\Gamma^1) \\
&\geq \tilde{\pi}_2 - (\#C_1(Y\Gamma^1) - \#C_2(Y\Gamma^1)) \\
&= \tilde{\pi}_2 - \tilde{\pi}_1
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités  $\#C_2(Y\Gamma^1) \leq \#C_2(\Gamma^1)$  et  $\#C_1(Y\Gamma^1) \geq \#C_1(\Gamma^1)$ .

La démonstration est complète.  $\square$

On poursuit maintenant la preuve du théorème.

### Démonstration de l'implication (c) $\Rightarrow$ (b).

On démontre la contraposée : Supposons que l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$  échoue à l'étape  $m$ . Alors on prouve qu'il existe  $l < m$  tel qu'on ait la relation  $Y_{m/l}(T') \succ Y_{m/l}^T$ .

D'après le lemme 15.3.2.(a) il existe un numéro  $i \in \{1, \dots, n\}$  minimal qui n'appartient pas à la même colonne de  $T$  et  $T'$  et on a  $m \geq i$ . On raisonne par récurrence sur le couple  $(m, i)$  pour l'ordre lexicographique (récurrence ascendante sur  $m$  et descendante sur  $i$ ). Le cas suivant tient lieu d'initialisation de la récurrence :

(0) *Premier cas :  $m = i$ .*

D'après le lemme 15.3.4 on a  $i \in C_1(T) \cap C_2(T')$ . Il suit :

$$Y_{m/0}(T') \succ Y_{m/0}(T).$$

Supposons désormais  $m > i$ . D'après le lemme 15.3.4 on a  $i \in C_2(T) \cap C_1(T')$ . Soit  $j \in \{i, \dots, n\}$  minimal tel que  $p_j \in I_i$ , en posant par convention  $j = \infty$  si un tel entier ne se présente pas.

On traitera séparément les cas  $j \leq m$  et  $j > m$ . Tout d'abord on prouve l'affirmation suivante.

#### 15.8.2. AFFIRMATION

*Le numéro  $i$  peut être supposé maximal dans l'ensemble  $C_1(T') \cap \{i, \dots, \text{Min}(j - 1, m - 1)\}$  pour l'ordre  $\prec_{T'}$ .*

*Démonstration de l'affirmation.* Supposons l'implication (c) $\Rightarrow$ (b) avérée dans le cas où  $i$  est maximal dans l'ensemble  $C_1(T') \cap \{i, \dots, \text{Min}(j - 1, m - 1)\}$  pour l'ordre  $\prec_{T'}$ . On montre l'implication dans le cas général par induction, le cas où  $i$  est maximal tenant lieu d'initialisation.

Si  $i$  n'est pas maximal dans l'ensemble  $C_1(T') \cap \{i, \dots, \text{Min}(j-1, m-1)\}$  pour l'ordre  $\prec_{T'}$ , alors il existe un plus petit numéro

$$\tilde{i} \in C_1(T') \cap \{i+1, \dots, \text{Min}(j-1, m-1)\}$$

tel que  $i \prec_{T'} \tilde{i}$ .

★ *Étape 1.*

Montrons que le tableau  $\tilde{T}'$  obtenu d'après  $T'$  en échangeant  $i$  et  $\tilde{i}$  est lignes-standard et qu'il existe  $l \in \{0, \dots, m-1\}$  tel que  $Y_{m/l}(\tilde{T}') \succ Y_{m/l}^T$ .

D'après le lemme 15.3.5 l'ensemble  $J_{i'}$  est non-vide pour tout  $i' \in \{i, \dots, \text{Min}(j-1, m-1)\}$ . On a donc  $p_i \in J_{\tilde{i}-1}$  et  $p_{\tilde{i}} \in J_i$ . On est dans le cas (B) de la section 15.4. D'après §15.4 le tableau  $\tilde{T}'$  est lignes-standard. D'après la proposition 15.4.1, l'algorithme relatif au couple  $(\tilde{T}', T)$  échoue en  $m$ . Pour  $i' \in \{1, \dots, n\}$  on note  $\tilde{p}_{i'}$ ,  $\tilde{I}_i$  les homologues de  $p_{i'}$ ,  $I_i$  pour le  $\tilde{T}'$ . Le tableau  $\tilde{T}'$  est tel que :

- le numéro  $i$  est le plus petit numéro situé dans deux colonnes distinctes de  $\tilde{T}'$  et  $T$ ,
- l'algorithme relatif au couple  $(\tilde{T}', T)$  échoue en  $m$ ,
- pour tout  $i' \in \{1, \dots, \text{Min}(j-1, m-1)\}$ , on a  $\tilde{p}_{i'} \notin \tilde{I}_i$ ,
- le numéro  $i$  est maximal dans  $C_1(\tilde{T}') \cap \{i, \dots, \tilde{i}\}$  pour l'ordre  $\prec_{\tilde{T}'}$ .

En vertu de ces quatre propriétés, l'hypothèse d'induction peut s'appliquer au tableau  $\tilde{T}'$ . Il existe donc un entier  $l \in \{0, \dots, m-1\}$  tel que

$$Y_{m/l}(\tilde{T}') \succ Y_{m/l}^T.$$

Cela termine cette première étape.

★ *Étape 2 :* dans certains cas on a l'égalité  $Y_{m/l}(\tilde{T}') = Y_{m/l}(T')$ .

- Supposons  $l \geq \tilde{i}$ . Rappelons qu'on a  $i < \tilde{i}$ . Ainsi  $i$  et  $\tilde{i}$  ne figurent pas dans  $\{l+1, \dots, m\}$ , l'ensemble commun des entrées des tableaux  $T'_{|m/l}$  et  $\tilde{T}'_{|m/l}$ . Les tableaux  $T'_{|m/l}$  et  $\tilde{T}'_{|m/l}$  sont donc égaux. Il suit :  $Y_{m/l}(\tilde{T}') = Y_{m/l}(T')$ .
- Supposons  $l < i$ . Alors  $i$  et  $\tilde{i}$  figurent à la fois dans  $\{l+1, \dots, m\}$ , l'ensemble commun des entrées des tableaux  $T'_{|m/l}$  et  $\tilde{T}'_{|m/l}$ . Les tableaux  $T'_{|m/l}$  et  $\tilde{T}'_{|m/l}$  s'obtiennent l'un d'après l'autre en échangeant  $i$  et  $\tilde{i}$ . En particulier ils ont même forme on obtient  $Y_{m/l}(\tilde{T}') = Y_{m/l}(T')$ .
- Supposons  $i \leq l < \tilde{i}$  et plaçons-nous dans le cas où  $i$  n'a pas de numéro à sa droite dans  $T'$  ou bien a un numéro à sa droite dans  $T'$  qui est strictement supérieur à  $m$ . Comme on a  $i \prec_{T'} \tilde{i}$  par hypothèse, il vient que  $\tilde{i}$  n'a pas de numéro à sa droite dans  $T'$  ou bien a un numéro à sa droite qui est strictement supérieur à  $m$ . Ainsi  $\tilde{i}$  figure dans une ligne de longueur 1 dans chacun des deux sous-tableaux  $T'_{|m/l}$  et  $\tilde{T}'_{|m/l}$ . Ces derniers ont donc même forme. Il suit :  $Y_{m/l}(T') = Y_{m/l}(\tilde{T}')$ .

D'après l'étape 2, on suppose désormais :

- (a) On a  $i \leq l < \tilde{i}$ ,
- (b) Le numéro  $i$  admet un numéro  $i'$  à sa droite dans  $T'$ , qui vérifie  $i' \leq m$ .

On a l'inégalité  $\tilde{i} < i'$  : cela a été justifié dans 15.4 et traduit par le fait que le tableau  $\tilde{T}'$ , dont, le couple  $(\tilde{i}, i')$  forme une ligne, reste lignes-standard.

★ *Étape 3.*

Observons qu'il suffit d'établir la relation :

$$(R) : \quad Y_{m/i}(\tilde{T}') \succ Y_{m/i}^T.$$

Supposons en effet la relation (R) établie. Comme  $i \in C_2(T)$ , en vertu de 15.8.1.(a), on déduit l'égalité

$$\#C_2(Y_{m/i}) = \#C_2(Y_{m/i-1}).$$

D'où :

$$Y_{m/i-1}(\tilde{T}') \succ Y_{m/i-1}^T.$$

On a d'autre part l'égalité  $Y_{m/i-1}(\tilde{T}') = Y_{m/i-1}(T')$ . Il résulte :

$$Y_{m/i-1}(T') \succ Y_{m/i-1}^T.$$

Cela termine l'étape 3.

Dans le cas  $l = i$  la relation (R) est immédiate. Supposons désormais  $l > i$ .

On note  $\tilde{Y}^1 = Y_{l/i}(\tilde{T}')$ ,  $\tilde{Y}^2 = Y_{m/l}(\tilde{T}')$  et  $\tilde{Y}^0 = Y_{m/i}(\tilde{T}')$ . Pour  $a \in \{0, 1, 2\}$  soit  $\tilde{r}_a$  la différence de hauteur entre les deux colonnes du diagramme  $\tilde{Y}^a$  :

$$\tilde{Y}^1 = \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \tilde{r}_1 \text{ cases} \quad \tilde{Y}^2 = \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \tilde{r}_2 \text{ cases} \quad \tilde{Y}^0 = \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \tilde{r}_0 \text{ cases}$$

★ *Étape 4.*

Montrons qu'on a  $\tilde{r}_1 \leq \tilde{r}_2$  et l'égalité  $\tilde{r}_0 = \tilde{r}_2 - \tilde{r}_1$ .

Le diagramme  $\tilde{Y}^1 = Y_{l/i}(\tilde{T}')$  est la forme du sous-tableau  $\tilde{T}'_{l/i}$  (en remettant les lignes dans l'ordre décroissant des longueurs de haut en bas). Soit  $j' \in \{i+1, \dots, l\}$  une entrée du tableau  $\tilde{T}'_{l/i}$ . Supposons  $j' \in C_2(\tilde{T}')$ . Alors on a par hypothèse  $p_{j'} \notin I_i$ . Ainsi le numéro voisin à gauche de  $j'$  dans  $\tilde{T}'$  appartient à l'ensemble  $\{i, \dots, l\}$ . De plus ce numéro ne peut être  $i$ . En effet le numéro voisin à droite de  $i$  dans  $\tilde{T}'$ , s'il existe, est le numéro voisin à droite de  $\tilde{i}$  dans  $T'$ . Ce numéro est donc supérieur à  $\tilde{i}$ , donc à  $j$  (car  $j \leq l \leq \tilde{i}$ ). Le numéro voisin à gauche de  $j'$  dans  $\tilde{T}'$  appartient donc à l'ensemble  $\{i+1, \dots, j'-1\}$ , ainsi c'est encore une entrée du tableau  $\tilde{T}'_{l/i}$ . Il suit que la ligne du sous-tableau  $\tilde{T}'_{l/i}$  contenant  $j'$  a longueur 2.

Soit  $j' \in \{i+1, \dots, l\} \cap C_1(\tilde{T}')$ . Ainsi  $j'$  est une entrée de la première colonne du tableau  $\tilde{T}'_{l/i}$ . On a par hypothèse  $j' \prec_{T'} i$  donc  $j'$  admet un numéro  $j''$  voisin à droite dans  $T'$  tel que  $j'' < i'$ . On a d'autre part  $j' \notin \{i, \tilde{i}\}$  donc  $(j', j'')$  forme encore une ligne du tableau  $\tilde{T}'$ , puisque ce dernier s'obtient d'après  $T'$  en échangeant  $i$  et  $\tilde{i}$ . Il résulte que les lignes de  $\tilde{Y}^1$  de longueur 1 correspondent exactement aux



numéros  $j' \in \{i+1, \dots, l\} \cap C_1(\tilde{T}')$  dont le numéro  $j''$  voisin à droite dans  $\tilde{T}'$  est contenu dans l'ensemble  $\{l+1, \dots, i'-1\}$ .

Soit  $j' \in \{i+1, \dots, l\} \cap C_1(\tilde{T}')$  dont le numéro  $j''$  voisin à droite dans  $\tilde{T}'$  est contenu dans l'ensemble  $\{l+1, \dots, i'-1\}$ . Alors  $j''$  forme une ligne de longueur 1 du sous-tableau  $\tilde{T}'_{m/l}$ .

Il résulte : à chaque  $j' \in \{i+1, \dots, l\} \cap C_1(\tilde{T}')$  induisant une des  $\tilde{r}_1$  lignes de longueur 1 du diagramme  $\tilde{Y}^1$  correspond  $j''$  qui induit une ligne de longueur 1 du diagramme  $\tilde{Y}^2$ , tel que  $(j', j'')$  forme une ligne de longueur 2 du sous-tableau  $T'_{m/i}$ , donc du diagramme  $\tilde{Y}^0$ . Il suit :

$$\tilde{r}_1 \leq \tilde{r}_2 \quad \text{et} \quad \tilde{r}_0 = \tilde{r}_2 - \tilde{r}_1.$$

Cela conclut l'étape 4.

On note  $Y^1 = Y_{l/i}^T$ ,  $Y^2 = Y_{m/l}^T$  et  $Y^0 = Y_{m/i}^T$ . Pour  $a \in \{0, 1, 2\}$  on note  $\tilde{\pi}_a$  la différence de hauteur entre les deux colonnes du diagramme  $Y^a$  :

$$Y^1 = \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \tilde{\pi}_1 \text{ cases} \quad Y^2 = \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \tilde{\pi}_2 \text{ cases} \quad Y^0 = \left. \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \vdots & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \tilde{\pi}_0 \text{ cases}$$

★ *Étape 5* : Fin de la démonstration :

D'après la proposition 15.7, on a  $\tilde{Y}^1 \preceq Y^1$ . Il suit :  $\tilde{r}_1 \geq \tilde{\pi}_1$ . On a d'autre part par hypothèse  $\tilde{Y}^2 \succ Y^2$  et  $\tilde{r}_2 < \tilde{\pi}_2$ . D'après la proposition 15.8.1.(b), on obtient  $\tilde{\pi}_0 \geq \tilde{\pi}_2 - \tilde{\pi}_1$ . Il résulte :  $\tilde{\pi}_0 > \tilde{r}_2 - \tilde{r}_1 = \tilde{r}_0$ , d'où  $\tilde{Y}^0 \succ Y^0$ .

On a finalement établi la relation (R) :

$$Y_{m/i}(\tilde{T}') \succ Y_{m/i}^T.$$

La démonstration de l'affirmation est désormais complète.  $\square$

On poursuit la démonstration de l'implication du théorème, en distinguant deux cas : on suppose d'abord  $j \leq m$ , puis  $j > m$ .

### 15.8.3. Cas $j \leq m$

En vertu de l'affirmation précédente, on peut supposer  $i$  maximal dans l'ensemble  $\{i, \dots, j-1\} \cap C_1(T')$  pour l'ordre  $\prec_{T'}$ . D'après le lemme 15.3.5, l'ensemble  $J_{j-1}$  est non-vidé. Par maximalité de  $i$ , il suit :  $p_i \in J_{j-1}$ . Comme on a par hypothèse  $p_j \in I_i$ , le lemme 15.3.5 donne :  $f_{j-1}(p_j) \in \mathbb{N} - \{0\}$ . D'après 15.3.2.(b), l'algorithme n'échoue pas en  $j$ . (D'où :  $j > m$ .)

On est alors dans le cas (A) de la section 15.4 avec  $\tilde{i} = j$ . Soit  $\tilde{T}'$  le tableau obtenu d'après  $T'$  en échangeant  $i$  et  $j$ . La plus petite entrée située dans deux

colonnes distinctes des tableaux  $\tilde{T}'$  et  $T$  est strictement supérieure à  $i$ . D'autre part l'algorithme relatif au couple  $(\tilde{T}', T)$  échoue lui aussi en  $m$ , (cf. 15.4.1).

L'hypothèse de récurrence s'applique au tableau  $\tilde{T}'$  et il existe  $l < m$  tel que  $Y_{m/l}(\tilde{T}') \succ Y_{m/l}^T$ .

Comme dans la démonstration de l'affirmation, si on suppose  $l < i$  ou bien  $l \geq j$ , alors on a clairement l'égalité  $Y_{m/l}(\tilde{T}') = Y_{m/l}(T')$ . Si on suppose qu'on a l'inégalité  $l \geq i$  et que  $i$  n'a pas de numéro voisin à sa droite dans  $T'$  ou bien a un numéro  $i'$  à sa droite vérifiant  $i' > m$ , alors on a encore l'égalité  $Y_{m/l}(\tilde{T}') = Y_{m/l}(T')$ . Dans ces trois cas, il suit la relation  $Y_{m/l}(T') \succ Y_{m/l}^T$ .

On suppose donc désormais :

- (a) on a  $i \leq l < j$ ,
- (b) le numéro  $i$  admet un numéro  $i'$  à sa droite dans  $T'$ , qui vérifie  $i' \leq m$ .

On a  $j < i'$  : cela a été justifié dans 15.4 et traduit par le fait que le tableau  $\tilde{T}'$ , dont, le couple  $(j, i')$  forme une ligne, reste lignes-standard.

Comme dans la démonstration de l'affirmation, il suffit d'établir la relation :

$$(R) : \quad Y_{m/i}(\tilde{T}') \succ Y_{m/i}^T.$$

Supposons en effet (R) avérée. Comme  $i \in C_2(T)$ , d'après 15.8.1.(a), on déduit :

$$\#C_2(Y T_{m/i}) = \#C_2(Y T_{m/i-1}).$$

D'où :

$$Y_{m/i-1}(\tilde{T}') \succ Y_{m/i-1}^T.$$

On a d'autre part l'égalité  $Y_{m/i-1}(\tilde{T}') = Y_{m/i-1}(T')$ . Il résulte :

$$Y_{m/i-1}(T') \succ Y_{m/i-1}^T.$$

La relation (R) est établie exactement comme on prouve la relation qui porte le même nom dans la démonstration de l'affirmation, en remplaçant simplement le caractère “ $\tilde{v}$ ” par la lettre “ $j$ ”.

Cela complète l'étude du cas  $j \leq m$ .  $\square$

Il reste à traiter le cas  $j > m$ .

#### 15.8.4. Cas $j > m$ .

Par définition de  $j$ , on a  $p_{i'} \notin I_i$  pour tout  $i' \in \{i, \dots, m\}$ . En vertu de l'affirmation, on suppose  $i$  maximal dans l'ensemble  $\{i, \dots, m-1\} \cap C_1(T')$  pour l'ordre  $\prec_{T'}$ . D'après le lemme 15.3.5 l'ensemble  $J_{m-1}$  est non-vide et par maximalité de  $i$  on a  $p_i \in J_{m-1}$ . Si  $i$  admet un numéro voisin à sa droite dans  $T'$ , alors on note  $i'$  ce numéro. Sinon on pose  $i' = \infty$ . Comme  $i$  est encore dans la seconde colonne du tableau obtenu après la  $(m-1)$ -ème étape de l'algorithme, on a  $i' \geq m$ . On distingue deux sous-cas :  $i' = m$  ou  $i' > m$ .

(1) *Premier sous-cas :  $i' = m$ .*

Nous allons établir la relation de dominance :

$$Y_{m/i-1}(T') \succ Y_{m/i-1}^T.$$

Donnons-nous  $l \in C_1(T) \cap \{i+1, \dots, m-1\}$ . Pour construire  $\theta_l$ , le  $l$ -ème tableau de l'algorithme, d'après  $\theta_{l-1}$ , le précédent, on insère tout d'abord  $l$  dans la seconde case de la  $p_l$ -ème ligne de  $\theta_{l-1}$ . Un tableau intermédiaire  $\theta'_l$  est ainsi formé. Ensuite on déplace vers la gauche un numéro  $i_l$  de la seconde colonne de  $\theta'_l$  ayant une case libre à sa gauche dans  $\theta'_l$  et  $\theta_l$  est le tableau ainsi obtenu. D'après (2C-1) on a  $i_l \in C_1(T')$ . Comme  $i$  est le premier numéro dans deux colonnes distinctes de  $T'$  et  $T$ , on a  $\theta_{i-1} = T'_{|i-1}$  (cf. lemme 15.3.2.(a)) et les éléments de l'ensemble  $C_1(T') \cap \{1, \dots, i-1\}$  figurent dans la première colonne du tableau  $\theta_{i-1}$ . Il suit  $i_l \geq i$ . En outre  $i_l \neq i$  puisque  $i$  n'a pas encore été replacé dans la première colonne du tableau obtenu après la  $(m-1)$ -ème de l'algorithme. Il suit :  $i_l \in \{i+1, \dots, l\}$ .

Par maximalité de  $i$  on a  $i_l \prec_{T'} i$ . On suppose  $m = i'$ , autrement dit  $m$  est le numéro voisin à droite de  $i$  dans  $T'$ . D'après la définition de l'ordre  $\prec_{T'}$ , il suit que  $i_l$  a un numéro  $i'_l$  voisin à sa droite dans  $T'$  et  $i'_l < m$ . Ainsi le couple  $(i_l, i'_l)$  forme une ligne de longueur 2 dans le tableau  $T'_{|m/i}$ .

Finalement à tout  $l \in C_1(T) \cap \{i+1, \dots, m-1\}$ , on a associé une ligne de longueur 2 du tableau  $T'_{|m/i}$ . La construction est clairement injective. Il suit :

$$\#C_1(T_{|m/i}) \leq \#C_2(T'_{|m/i}).$$

Le lemme 10.4.1 implique facilement l'inégalité  $\#C_2({}^Y T_{|m/i}) \leq \#C_1(T_{|m/i})$ . Il suit :

$$\#C_2(T'_{|m/i}) \geq \#C_2({}^Y T_{|m/i}).$$

En outre, comme  $i \in C_2(T) \cap C_1(T')$ , on a les égalités

$$\#C_2(T'_{|m/i-1}) = \#C_2(T'_{|m/i}) + 1 \quad \text{et} \quad \#C_2({}^Y T_{|m/i-1}) = \#C_2({}^Y T_{|m/i})$$

(la première est immédiate, la seconde provient de 15.8.1.(a)). On obtient donc :

$$\#C_2(T'_{|m/i-1}) > \#C_2({}^Y T_{|m/i-1}).$$

Par définition, la hauteur de la seconde colonne du diagramme  $Y_{m/i-1}(T')$  vaut  $\#C_2(T'_{|m/i-1})$  tandis que la hauteur de la seconde colonne du diagramme  $Y_{m/i-1}^T$  vaut  $\#C_2({}^Y T_{|m/i-1})$ . Il résulte la relation annoncée :

$$Y_{m/i-1}(T') \succ Y_{m/i-1}^T.$$

L'étude du sous-cas  $i' = m$  est achevée.

(2) *Second sous-cas :  $i' > m$ .*

Montrons tout d'abord que l'algorithme n'échoue pas à l'étape  $i+1$ . Rappelons qu'on suppose  $i < m$ , il suit :  $i+1 \leq m$ . En particulier  $i+1 \neq i'$ . Il résulte que les numéros  $i$  et  $i+1$  ne figurent pas dans la même ligne de  $T'$ , autrement dit on a  $p_{i+1} \neq p_i$ . D'autre part on suppose  $j > m$  où  $j \in \{i+1, \dots, n\}$  est minimal tel que  $p_j \in I_i$ . Il suit :  $i+1 < j$  et  $p_{i+1} \notin I_i$ . À la  $(i+1)$ -ème étape, le numéro  $i+1$  doit être inséré dans la  $p_{i+1}$ -ème ligne du tableau  $\theta_i$ . Les lignes non-vides de

$\theta_i$  sont les lignes de numéros  $p \in I_i$  et la ligne contenant  $i$ , qui porte le numéro  $p_i$ . D'après ce qui précède  $i + 1$  est insérée dans une ligne vide de  $\theta_i$  et d'après (2C-A) il résulte  $i + 1 \in C_1(T')$ . En vertu de 15.3.2.(b) l'algorithme n'échoue pas à l'étape  $i + 1$ .

Notons  $a_1 < \dots < a_r$  les entrées de la première colonne du tableau  $T$  et notons  $b_1 < \dots < b_{\tilde{r}}$  les entrées de la seconde colonne de  $T$ . On a  $i = b_{\kappa'}$  pour un certain  $\kappa' \in \{1, \dots, \tilde{r}\}$ . Il existe  $\kappa \in \{1, \dots, r\}$  maximal tel que  $a_\kappa < i$ .

Notons  $\hat{Y}$  le diagramme de Young rectangulaire à  $r$  lignes et deux colonnes. Le diagramme  $\hat{Y}$  a donc  $\hat{n} = 2r$  cases. Ainsi les tableaux  $T'$  et  $T$  sont des numérotations partielles de  $\hat{Y}$ . Notons  $\check{T}'_{|m}$  le tableau obtenu d'après  $T'$  en retirant les numéros  $b_1, \dots, b_{\kappa'} = i$  et  $m + 1, \dots, n$ . Le sous-tableau  $\check{T}'_{|m}$  est encore une numérotation de  $\hat{Y}$ . Soit  $\check{T}$  le tableau obtenu d'après  $T$  en retirant les numéros  $b_1, \dots, b_{\kappa'} = i$  et en déplaçant vers le haut les numéros restants de la seconde colonne, de sorte que le nouveau tableau soit un tableau de Young :

$$\check{T} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_{\kappa'+1} \\ \hline & \vdots \\ \hline \vdots & b_{\tilde{r}} \\ \hline & \\ \hline a_r & \\ \hline \end{array}$$

Soit  $\check{T}_{|m}$  le sous-tableau obtenu d'après  $\check{T}$  en retirant les entrées  $m + 1, \dots, n$ . Le tableau  $\check{T}_{|m}$  est encore une numérotation partielle de  $\hat{Y}$ .

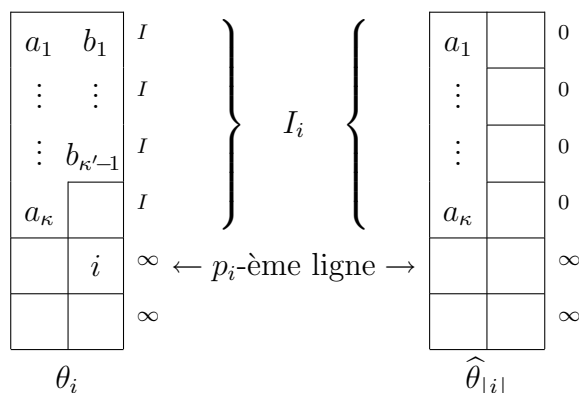
On ajoute des numéros  $m + 1, \dots, 2r + \kappa'$  au tableau  $\check{T}'_{|m}$ , de telle façon qu'on obtienne un tableau  $\hat{T}'$  de forme  $\hat{Y}$ , dont les lignes sont croissantes de gauche à droite. De même, on ajoute des numéros  $m + 1, \dots, 2r + \kappa'$  au tableau  $\check{T}_{|m}$ , de telle façon qu'on obtienne un tableau  $\hat{T}$  de forme  $\hat{Y}$ , dont les lignes et les colonnes sont croissantes respectivement de gauche à droite et de haut en bas. Les tableaux  $\hat{T}'$  ont  $\hat{T}$  même forme  $\hat{Y}$  et mêmes entrées. Soit

$$E = \{1, \dots, \hat{n} + \kappa'\} - \{b_1, \dots, b_{\kappa'}\} = \{a_1 < a_2 < \dots < a_\kappa < i + 1 < i + 2 < \dots < \hat{n} + \kappa'\}$$

leur ensemble d'entrées commun.

Considérons l'(unique) application strictement croissante  $\sigma : \{1, \dots, \hat{n}\} \rightarrow E$ . En appliquant  $\sigma^{-1}$  on re-numérote les cases des tableaux  $\hat{T}'$  et  $\hat{T}$  de 1 à  $\hat{n}$ . Modulo l'action de  $\sigma$  les tableaux  $\hat{T}'$  et  $\hat{T}$  sont vus comme un tableau lignes-standard et un tableau standard de même forme et on peut appliquer l'algorithme au couple  $(\hat{T}', \hat{T})$ . Soient  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_l, \dots$  ( $l \in E$ ) les tableaux construits étape après étape après avoir inséré les numéros  $l' \in E$ ,  $l' \leq l$  et soient  $\hat{f}_l$  ( $l \in E$ ) les fonctions indice. Posons  $[i] = a_\kappa$ . D'après 15.3.2.(a) l'algorithme n'échoue pas jusqu'à l'étape  $[i]$  et le tableau  $\hat{\theta}_{[i]}$  est obtenu d'après  $\theta_i$  en retirant les entrées  $b_1, \dots, b_{\kappa'} = i$  et les

indices  $f_i(p)$  et  $\widehat{f}_{[i]}(p)$  coïncident pour  $p \notin I_i$  :



Dans les étapes suivantes les numéros  $i+1, i+2, \dots$  sont insérés dans les tableaux  $\theta_i$  et  $\widehat{\theta}_{[i]}$ , de cette manière on construit les tableaux  $\theta_{i+1}, \theta_{i+2}, \dots$  d'une part et  $\widehat{\theta}_{i+1}, \widehat{\theta}_{i+2}, \dots$  d'autre part. Les tableaux  $\widehat{\theta}_{[i]}$  et  $\theta_i$  diffèrent uniquement par leurs lignes de numéros  $p \in I_i \cup \{p_i\}$ . Comme les entrées de  $i+1$  à  $m$  sont insérées dans des lignes distinctes des précédentes, on obtient facilement ces propriétés :

- L'algorithme relatif au couple  $(\widehat{T}', \widehat{T})$  n'échoue pas lors de l'insertion de  $l \leq m-1$ .
- Pour  $l \in E, l \leq m-1$  et  $p \notin I_i \cup \{p_i\}$ , les  $p$ -ème lignes des tableaux  $\widehat{\theta}_l$  et  $\theta_l$  coïncident et on a l'égalité  $f_l(p) = \widehat{f}_l(p)$ .

Ensuite  $m$  doit être inséré dans la  $p_m$ -ème ligne du tableau  $\widehat{\theta}_{m-1}$ . On a  $m-1 \in E$  d'après l'observation :  $m-1 > i$ . Ainsi le tableau  $\widehat{\theta}_{m-1}$  est bien-défini. D'autre part les  $p_m$ -ème lignes des tableaux  $\theta_{m-1}$  et  $\widehat{\theta}_{m-1}$  coïncident et on a l'égalité  $f_{m-1}(p_m) = \widehat{f}_{m-1}(p_m)$ . Comme l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$  échoue en  $m$ , il suit que l'algorithme relatif au couple  $(\widehat{T}', \widehat{T})$  échoue lui aussi en  $m$ .

L'algorithme relatif à  $(\widehat{T}', \widehat{T})$  échoue strictement plus tôt que le premier. L'hypothèse de récurrence s'applique donc. Pour  $l < m$  soit  $\widehat{T}'_{|m/l}$  le sous-tableau obtenu d'après  $\widehat{T}'$  en retirant les numéros  $l' \in E$  tels que  $l' \leq l$  ou  $l' > m$ . Soit  $Y_{m/l}(\widehat{T}')$  le diagramme de Young induit par le sous-tableau  $\widehat{T}'_{|m/l}$ , au sens de 9.6.6. De même soit  $\widehat{T}_{|m/l}$  le tableau gauche obtenu d'après  $\widehat{T}$  en retirant les numéros  $l' \in E$  tels que  $l' \leq l$  ou  $l' > m$ . Soit  ${}^Y\widehat{T}_{|m/l}$  le tableau de Young obtenu d'après  $\widehat{T}_{|m/l}$  par jeu de Taquin et soit  $Y_{m/l}^{\widehat{T}}$  le diagramme de Young dont  ${}^Y\widehat{T}_{|m/l}$  a la forme. Alors l'hypothèse de récurrence implique l'existence de  $l < m$  tel qu'on ait la relation de dominance :

$$Y_{m/l}(\widehat{T}') \succ Y_{m/l}^{\widehat{T}}.$$

Si  $l \geq i$ , alors on a les égalités  $\widehat{T}'_{|m/l} = T'_{|m/l}$  et  $\widehat{T}_{|m/l} = T_{|m/l}$ . D'où :  $Y_{m/l}(\widehat{T}') = Y_{m/l}(T')$  et  $Y_{m/l}^{\widehat{T}} = Y_{m/l}^T$ . On obtient alors la relation de dominance :

$$Y_{m/l}(T') \succ Y_{m/l}^T.$$

Ce qui complète l'étude du point (2) dans ce cas de figure.

Supposons ensuite  $l < i$  et montrons qu'on peut se ramener au cas  $l \geq i$  précédent. Dans ce but on compare  $Y_{m/l}(\widehat{T}')$  avec  $Y_{|m/i}(\widehat{T}')$  d'une part et  ${}^Y\widehat{T}_{|m/l}$  avec  ${}^Y\widehat{T}_{|m/i}$  d'autre part.

D'après 15.8.1.(a), on a  $\#C_2({}^Y\widehat{T}_{|m/l}) \geq \#C_2({}^Y\widehat{T}_{|m/i})$ . D'autre part, soient  $\widehat{r}_1$  et  $\widehat{r}_2$  les hauteurs des secondes colonnes des diagrammes  $Y_{m/l}(\widehat{T}')$  et  $Y_{|m/i}(\widehat{T}')$  respectivement. La relation de dominance  $Y_{m/l}(\widehat{T}')$   $\succ$   $Y_{m/l}^{\widehat{T}}$  s'écrit aussi :  $\widehat{r}_1 > \#C_2({}^Y\widehat{T}_{|m/l})$ . Le tableau  $\widehat{T}'_{|m/i}$  est obtenu d'après  $\widehat{T}'_{|m/l}$  en retirant certains numéros parmi  $a_1, \dots, a_\kappa$ . Ces derniers appartiennent tous à la première colonne du tableau  $\widehat{T}'$  et leurs numéros voisins à droite dans  $\widehat{T}'$  sont tous strictement plus grands que  $m$ . Les lignes induites par ces numéros dans le diagrammes  $Y_{m/l}(\widehat{T}')$  ont donc toutes longueur 1. Il suit :  $\widehat{r}_2 = \widehat{r}_1$ . On obtient donc la relation  $\widehat{r}_2 > \#C_2({}^Y\widehat{T}_{|m/i})$ . Il résulte :

$$Y_{m/i}(\widehat{T}') \succ Y_{m/i}^{\widehat{T}}$$

et on est ramené au cas  $l \geq i$ .

Cet argument achève l'étude du point (2) et l'étude du cas  $m < j$ .  $\square$

Dans tous les cas on a trouvé  $l < m$  tel qu'on ait la relation :

$$Y_{m/l}(T') \succ Y_{m/l}^T.$$

Cela complète le raisonnement par récurrence. La démonstration de l'implication (c) $\Rightarrow$ (b) du théorème 15.2 est désormais complète.  $\square$

## Chapitre 16. RETOUR SUR LE CAS CROCHET : UN CRITÈRE ALGORITHMIQUE

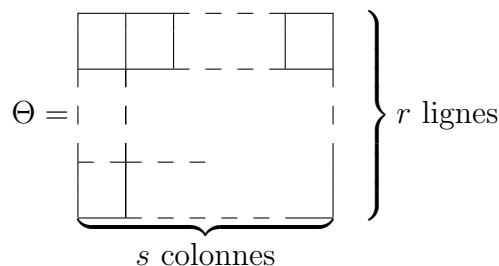
Dans les cas deux-lignes et deux-colonnes, nous avons défini une notion de constructibilité d'un tableau lignes-standard  $T'$  selon un tableau standard  $T$ . Bien sûr les deux notions de constructibilité coïncident dans le cas de tableaux ayant à la fois deux lignes et deux colonnes.

Dans cette section, on suppose le diagramme  $Y = Y(u)$  de type crochet et on définit une telle notion de constructibilité pour les tableaux de forme  $Y$ . Soit  $r$  la hauteur de la première colonne de  $Y$  et soit  $s$  la longueur de la première ligne de  $Y$ . On a de la sorte  $r + s - 1 = n$ .

### 16.1. Une notion de $T$ -constructibilité

On fixe un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  et un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

*Notations.* Soit  $\Theta$  le diagramme rectangulaire à  $r$  lignes et  $s$  colonnes :



Les lignes de  $\Theta$  sont numérotées de 1 à  $r$  de haut en bas et les colonnes de  $\Theta$  sont numérotées de 1 à  $s$  de gauche à droite. Le tableau  $T'$  peut être vu comme une numérotation partielle de  $\theta_0$ .

Soit  $\theta$  un tableau obtenu en numérotant certaines cases de  $\Theta$  (par exemple  $\theta = T$  ou  $\theta = T'$  mais le tableau  $\theta$  peut ne pas avoir la forme d'un diagramme de Young). Pour  $p \geq 1$  on note  $L_p(\theta)$  l'ensemble des numéros de la  $p$ -ème ligne de  $\theta$ . Pour  $q \geq 1$  on note  $C_q(\theta)$  l'ensemble des numéros de la  $q$ -ème colonne de  $\theta$  et on note en outre  $n_q(\theta)$  le cardinal de  $C_q(\theta)$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  soit  $p_i$  le numéro de la ligne de  $T'$  qui contient  $i$ .

On définit un algorithme qui vise à reconstruire le tableau  $T'$  comme terme final d'une suite de tableaux  $\theta_1, \theta_2, \dots$  obtenus en insérant successivement les numéros  $1, 2, \dots$  dans le diagramme  $\Theta$ , suivant certaines règles qui dépendent de  $T$ . L'algorithme peut échouer. Si l'algorithme réussit, alors on dira que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  le tableau  $\theta_i$  satisfait aux propriétés suivantes :  
On note  $\gamma_i$  le numéro de la première colonne de  $\theta_i$  dont la première case est vide.

(C-A) Les numéros de la première colonne de  $\theta_i$  sont rangés dans l'ordre croissant.  
Pour tout  $p \in \{1, \dots, r\}$  on a  $L_p(\theta_i) = L_p(T'_i)$ .

(C-B) Pour  $q \in \{1, \dots, s\}$  on a l'égalité  $n_q(\theta_i) = n_q(T'_i)$ .

(C-C) La  $(\gamma_i + 1)$ -ème colonne de  $\theta_i$  est vide.

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  supposons qu'on a construit un tableau  $\theta_{i-1}$  satisfait à ces propriétés. Le tableau  $\theta_{i-1}$  a donc l'aspect suivant :

$$\theta_{i-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \swarrow \gamma_i\text{-ème colonne} & & \\ \hline * & * & * & \\ \hline * & & & \\ \hline & & & \\ \hline * & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \theta_{i-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \swarrow \gamma_i\text{-ème colonne} & & \\ \hline * & * & * & \\ \hline * & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & * \\ \hline \end{array}$$

En effet il résulte facilement des axiomes que la différence entre les tableaux  $\theta_{i-1}$  et  $T'_{i-1}$  concerne au plus un numéro, les autres occupent la même place dans les deux tableaux.

On forme le tableau  $\theta_i$  à partir de  $\theta_{i-1}$  en insérant  $i$  suivant la règle suivante. Notons  $q_i^T \in \{1, \dots, s\}$  le numéro de la colonne de  $T$  qui contient  $i$ . D'après (C-B) et (C-C) on a  $q_i^T \in \{1, \gamma_{i-1}, \gamma_{i-1} + 1\}$ . On décrète le cas d'échec suivant :

(Premier cas d'échec) Si  $q_i^T = \gamma_{i-1} + 1$ , alors l'algorithme échoue.

Supposons  $q_i^T \leq \gamma_{i-1}$ , de sorte qu'un échec de ce type ne survient pas en  $i$ . La  $p_i$ -ème case de la  $\gamma_{i-1}$ -ème colonne de  $\theta_{i-1}$  est toujours libre, on y insère  $i$ . Soit  $\theta'_i$  le tableau ainsi obtenu. Par exemple :

$$\theta'_i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & i \\ \hline * & & & \\ \hline & & & \\ \hline * & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \theta'_i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & \\ \hline * & & & \\ \hline & & & i \\ \hline * & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \theta'_i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & i \\ \hline * & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & * \\ \hline \end{array} \quad \text{ou} \quad \theta'_i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & \\ \hline * & & & \\ \hline & & & i \\ \hline & & & * \\ \hline \end{array}$$

On distingue deux cas :

- (1) Supposons  $q_i^T = \gamma_{i-1}$ . On pose  $\theta_i = \theta'_i$ .
- (2) Supposons  $\gamma_{i-1} > 1$  et  $q_i^T = 1$ . On décrète le cas d'échec suivant :

(Second cas d'échec) Si les  $r - 1$  dernières cases de la  $\gamma_{i-1}$ -ème colonne du tableau intermédiaire  $\theta'_i$  sont vides, alors l'algorithme échoue.

Supposons que ce second cas d'échec ne se produit pas. Certaines des  $r - 1$  dernières cases de la  $\gamma_{i-1}$ -ème colonne de  $\theta'_i$  sont donc non-vides, parmi celles-ci on choisit celle qui est située le plus haut et on déplace le numéro qu'elle contient vers la gauche jusqu'à la première colonne. On note  $\theta_i$  le tableau ainsi obtenu.



Par exemple, si  $\theta'_i$  est comme dans le dessin précédent, on obtient :

$\theta'_i =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td><math>i</math></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	*	*	*	$i$	*								*				ou $\theta_i =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td><math>i</math></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	*	*	*		*				$i$				*				ou $\theta_i =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td><math>i</math></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	*	*	*	$i$	*								*				ou $\theta_i =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td><math>i</math></td></tr> <tr><td>*</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	*	*	*		*							$i$	*			
*	*	*	$i$																																																																				
*																																																																							
*																																																																							
*	*	*																																																																					
*																																																																							
$i$																																																																							
*																																																																							
*	*	*	$i$																																																																				
*																																																																							
*																																																																							
*	*	*																																																																					
*																																																																							
			$i$																																																																				
*																																																																							
	échec !		pas d'échec		pas d'échec		pas d'échec																																																																

Les propriétés (C-A), (C-B), (C-C) sont clairement satisfaites par le nouveau tableau  $\theta_i$ .

Si aucun échec ne survient durant l'exécution de l'algorithme, alors on obtient un tableau final  $\theta_n$  d'entrées  $1, \dots, n$ . D'après (C-A) et (C-B) on a  $\theta_n = T'$ . On dit alors que  $T'$  est  $T$ -constructible.

*Exemple.*

(a) Supposons

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

On obtient successivement

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>							1			<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>	2						1			<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>	2				3		1		
1																													
2																													
1																													
2																													
	3																												
1																													
$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$																											

Il y a un échec de premier type à l'étape 4. En effet 4 appartient à la troisième colonne de  $T$  (autrement dit  $q_4^T = 3$ ) et on a  $\gamma_3 = 2$ .

(b) Supposons

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$$

On construit

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	1									<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2</td><td></td></tr> </table>	1							2		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	3					2			<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> </table>	1	3	4				2		
1																																							
1																																							
	2																																						
1	3																																						
2																																							
1	3	4																																					
2																																							
$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta'_4$																																				

Il y a un échec de second type à l'étape 4. En effet aucun numéro de la dernière colonne de  $\theta'_4$  ne peut être décalé vers la gauche.

(c) Supposons maintenant

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

On construit

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \\ \hline & & 4 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$\theta_1 \qquad \theta_2 \qquad \theta_3 \qquad \theta_4 \qquad \theta_5$

Aucun échec ne survient et le tableau final  $\theta_5$  coïncide avec  $T'$ . Le tableau  $T'$  est donc  $T$ -constructible.

On relie maintenant le fait que  $T'$  est  $T$ -constructible à une propriété relative au couple  $(T', T)$  déjà évoquée, qui fournit un critère pour dire que le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  appartient à la composante  $K^T$  (cf. théorème 13.1).

## 16.2. PROPOSITION

Supposons  $Y = Y(u)$  de type crochet. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. Soient  $a_1 = 1, a_2, \dots, a_s$  les numéros de la première ligne de  $T$ . Soient  $a'_1, a'_2, \dots, a'_s$  les numéros de la première ligne de  $T'$ . Le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible si et seulement si on a  $a'_{q-1} < a_q \leq a'_q$  pour tout  $q \in \{2, \dots, s\}$ .

*Démonstration.* Si un échec survient à l'étape  $i \in \{1, \dots, n\}$  de l'exécution de l'algorithme relatif au couple  $(T', T)$ , alors on a facilement :

- si l'échec est de premier type, alors  $i \in \{a_2, \dots, a_s\}$ .
- si l'échec est de second type, alors  $i \in \{a'_2, \dots, a'_s\}$ .

Supposons maintenant que l'algorithme n'échoue pas durant ses  $i - 1$  premières étapes et voyons à quelle condition un échec survient en  $i$ .

(1) Supposons  $i = a_q$  pour  $q \in \{2, \dots, s\}$ . À quelle condition un échec de premier type se produit-il en  $i$  ?

Si  $a'_s \geq a_q$ , alors il existe  $q' \in \{1, \dots, s\}$  minimal tel que  $a'_{q'} \geq a_q$ . Sinon on pose  $q' = s + 1$ . Les numéros  $a'_1, \dots, a'_{q'-1}$  forment la première ligne du tableau  $\theta_{i-1}$  obtenu après l'étape  $i - 1$ . On a donc  $\gamma_{i-1} = q'$ . Ainsi, un échec de premier type se produit en  $i$  si et seulement si on a  $q' < q$ . Cela équivaut à la relation :  $a_q \leq a'_{q-1}$ .

(2) Supposons  $i = a'_q$  pour  $q \in \{2, \dots, s\}$ . À quelle condition un échec de second type se produit-il en  $i$  ?

On a  $\gamma_{i-1} = q$ . Soit  $q_i^T$  le numéro de la colonne de  $T$  contenant  $i$ . Comme déjà vu on a  $q_i \in \{1, q, q + 1\}$ . Un échec de second type se produit si et seulement si

on a  $q_i = 1$  et la  $q$ -ème colonne de  $\theta_{i-1}$  est vide. D'après (C-B) cela équivaut à la relation  $a'_q > a_q$ .

Finalement l'algorithme échoue si et seulement si on a  $a_q \leq a'_{q-1}$  ou  $a'_q > a_q$  pour un certain  $q \in \{2, \dots, s\}$ . La démonstration est complète.  $\square$

En combinant cette proposition avec le théorème 13.1, on déduit une autre caractérisation des points fixes des composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  dans le cas où l'endomorphisme  $u$  est de type crochet.

## UN THÉORÈME RÉCAPITULATIF

Les théorèmes 13.1, 14.2 et 15.2 peuvent finalement être résumés par l'énoncé suivant.

**THÉORÈME.** *Soit  $Y = Y(u)$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard, définissant une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard, définissant le drapeau  $\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$ . Pour  $0 \leq i < j \leq n$  soit  $Y_{j/i}(T')$  le diagramme de Young associé au sous-tableau  $T'_{|j/i}$  et soit  $Y_{j/i}^T$  la forme du tableau de Young obtenu à partir du sous-tableau gauche  $T_{|j/i}$  par jeu de Taquin. Supposons le diagramme de Young  $Y$  de type crochet, deux-lignes ou deux-colonnes.*

*Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *Le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ .*
- (b) *Le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible.*
- (c) *On a la relation de dominance  $Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ .*

Ces trois exemples suggèrent que pour un diagramme de Young  $Y$  quelconque et un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  :

- (1) On peut définir une notion de  $T$ -constructibilité des tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .
- (2) Pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ , l'appartenance du drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  à la composante  $K^T$  est liée à la constructibilité de  $T'$ .

*Quatrième partie*

**Cellules de Schubert intersectées**  
**avec les composantes des fibres de Springer**  
**dans les cas crochet et deux-lignes**

Nous construisons des décompositions cellulaires des composantes de la fibre de Springer dans les cas crochet et deux-lignes. Nous en déduisons un calcul de la dimension d'une intersection finie de composantes.

Cette partie contient les trois chapitres suivants.

- Chapitre. 17. CELLULES DE SCHUBERT INTERSECTÉES AVEC  
 LES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$  DANS LE CAS CROCHET.  
 DIMENSION D'UNE INTERSECTION DE COMPOSANTES
- Chapitre. 18. CELLULES DE SCHUBERT INTERSECTÉES AVEC  
 LES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$  DANS LE CAS DEUX-LIGNES
- Chapitre. 19. DIMENSION D'UNE INTERSECTION DE COMPOSANTES  
 DANS LE CAS DEUX-LIGNES

*Rappels.* Posons toujours  $Y = Y(u)$ . Une base de Jordan de forme  $Y$  (cf. §4.5.2) est supposée fixée. Soit  $H \subset GL(V)$  le tore des automorphismes diagonaux dans cette base. À un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  on associe le drapeau  $\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$  fixé par  $H$  (cf. §4.6) et la cellule de Shimomura  $S_u(T') \subset \mathcal{B}_u$  qui contient  $\mathcal{F}_{T'}$  (cf. §7.1.5). D'après le lemme 7.1.4, il existe  $H' = (h_t)_{t \in k^\times} \subset H$  un sous-tore de rang 1 régulier, dont l'action stabilise  $\mathcal{B}_u$ , et tel que :

$$S_u(T') = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u : \lim_{\infty} h_t \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}_{T'}\}.$$

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. La composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  est stable par  $H'$ . On a l'équivalence (cf. lemme 12.1.2) :

$$S_u(T') \cap K^T \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{F}_{T'} \in S_u(T').$$

L'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  est d'autre part donnée par l'égalité

$$S_u(T') \cap K^T = \{\mathcal{F} \in K^T : \lim_{\infty} h_t \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}_{T'}\}.$$

En particulier l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  est connexe.

Dans cette partie on suppose le diagramme  $Y$  de type crochet ou deux-lignes. Alors, d'après les chapitres 13, 14 et 16, nous connaissons les points fixes contenus dans  $K^T$  (ils correspondent aux tableaux lignes-standards  $T$ -constructibles), donc nous connaissons les cellules de Schubert qui intersectent  $K^T$ . Lorsque  $Y$  est de

type crochet ou deux-lignes, les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$  sont lisses (cf. [5]). D'après le théorème 1.6.4, si l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  est non-vide, alors on a

$$K^T \cap S_u(T') \cong \mathbb{A}^{d^T(T')}.$$

L'un de nos buts, dans cette partie, est de calculer la dimension  $d^T(T')$ .

Pour ce faire, on se donne tableau  $T$ -constructible  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  et on construit :

- deux ensembles  $I^T(T') \subset I(T, T') \subset \{1, \dots, n\}$ ,
- un ouvert  $\mathcal{W}(T, T') \subset K^T$  contenant  $\mathcal{F}_{T'}$  et isomorphe à  $k^{I(T, T')}$  tel que  $S_u(T') \cap K^T$  s'obtient comme le sous-espace  $k^{I^T(T')} \subset k^{I(T, T')}$

(où on note  $k^I$  l'ensemble des fonctions  $f : I \rightarrow k$  pour tout ensemble  $I$ ).

Lorsque  $Y$  est de type crochet, l'ouvert  $\mathcal{W}(T, T')$  ne dépend pas de  $T$  et on obtient une description de l'intersection de  $S_u(T')$  avec plusieurs composantes. On déduit la dimension de l'intersection de ces composantes.

Lorsque  $Y$  est de type deux-lignes, on décrit l'intersection de  $S_u(T')$  avec plusieurs composantes dans le cas où  $T'$  est un tableau standard. On déduit la dimension d'une intersection finie de composantes. Cette méthode demande beaucoup de calculs. Elle s'appuie sur l'algorithme de  $T$ -construction (cf. §14.1).

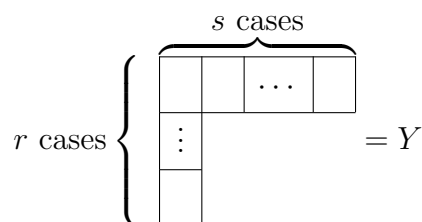
*Références bibliographiques.* Dans [5], F. Fung calcul les nombres de Betti des composantes de  $\mathcal{B}_u$  et les nombres de Betti d'une intersection de deux composantes dans les cas crochet et deux-lignes, en établissant un lien entre la géométrie des composantes et la théorie de Kazhdan-Lusztig dans ce cas particulier.

Dans [11], P. Lorist décrit les composantes de  $\mathcal{B}_u$  dans le cas où  $Y$  a deux lignes de longueurs  $s \geq 2$  et  $\check{s} = 2$ . La méthode employée est similaire à la nôtre : elle consiste à calculer les intersections d'une composante de  $\mathcal{B}_u$  avec les cellules de Schubert de la variété drapeau.

Les composantes de type crochet sont bien connues (cf. [29]). Nous avons tenu à faire figurer l'étude de ce cas parce que cela permet d'appliquer la méthode de calcul tout d'abord dans un contexte plus favorable avant de l'appliquer au cas deux-lignes, qui est plus difficile. D'autre part cela permet de souligner quelques points communs et dissemblances avec le cas deux-lignes.

**Chapitre 17 . CELLULES DE SCHUBERT INTERSECTÉES AVEC  
LES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$  DANS LE CAS CROCHET.  
DIMENSION D'UNE INTERSECTION DE COMPOSANTES**

Dans ce chapitre on suppose le diagramme  $Y = Y(u)$  de type crochet. Soit  $r$  le nombre de lignes de  $Y$  et  $s$  le nombre de colonnes. Ainsi la première ligne de  $Y$  a longueur  $s$  et les  $r - 1$  suivantes ont longueur 1.



Nous énonçons les deux théorèmes suivants. Le premier théorème décrit l'intersection d'une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  avec une cellule de Shimomura  $S_u(T')$  (cf. §7.1.5) :

**17.1. THÉORÈME**

Supposons  $Y = Y(u)$  de type crochet. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. Notons  $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_s$  les entrées de la première ligne de  $T$  et  $a'_1 < a'_2 < \dots < a'_s$  les entrées de la première ligne de  $T'$ . On suppose

$$a'_{q-1} < a_q \leq a'_q \quad \forall q \in \{1, \dots, s\}.$$

Alors la composante  $K^T$  contient le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  et l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  avec la cellule  $S_u(T')$  est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}^{d^T(T')}$ , avec

$$d^T(T') = \dim S_u(T') - \sum_{q=2}^s (a'_q - a_q).$$

Observons que ce théorème permet de compléter la preuve du théorème 13.1.

*Exemple.* Supposons

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

On a  $\dim S_u(T') = 4$  (cf. §7.2.2). D'après le théorème le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$  et on a  $S_u(T') \cap K^T \cong \mathbb{A}^3$ .

Le second théorème donne la dimension d'une intersection de composantes.

**17.2. THÉORÈME**

Soient  $T_1, \dots, T_l \in \mathcal{T}(Y)$  des tableaux standards et soient  $1 = a_1^{(m)} < a_2^{(m)} < \dots < a_s^{(m)}$  les entrées de la première ligne de  $T_m$  pour  $m \in \{1, \dots, l\}$ . L'intersection entre les composantes irréductibles  $K^{T_1}, \dots, K^{T_l}$  est non-vide si et seulement si la condition

$$\text{Max}(a_{q-1}^{(m)} : 1 \leq m \leq l) < \text{Min}(a_q^{(m)} : 1 \leq m \leq l) \quad \forall q \in \{2, \dots, s\}$$

est satisfaite. Alors on a l'égalité

$$\text{codim}_{\mathcal{B}_u} K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_l} = \sum_{q=2}^s (\text{Max}(a_{q-1}^{(m)} : 1 \leq m \leq l) - \text{Min}(a_q^{(m)} : 1 \leq m \leq l)).$$

*Exemple.* Supposons

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$$

D'après le théorème, l'intersection entre les composantes  $K^{T_1}$ ,  $K^{T_2}$  et  $K^{T_3}$  est non-vide et de dimension 1.

**DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES**

Nous fixons un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  et un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

*Notations.* Soient  $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_s$  les entrées de la première ligne de  $T$ . Soient  $a'_1 < a'_2 < \dots < a'_s$  les entrées de la première ligne de  $T'$  et  $b'_2, \dots, b'_r$  les  $r-1$  dernières entrées de la première colonne.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & a_2 & \cdots & a_s \\ \hline * & & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline * & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_s \\ \hline b'_2 & & & \\ \hline \vdots & & & \\ \hline b'_r & & & \\ \hline \end{array}$$

On pose  $A' = \{a'_q : 1 \leq q \leq s\}$  et  $B' = \{b'_p : 2 \leq p \leq r\}$ . Soit

$$I(T') = \{b \in B' : b > a'_1\}.$$

Nous allons d'abord montrer que les deux théorèmes s'obtiennent comme conséquences de la proposition suivante.



**17.3. PROPOSITION**

(a) La cellule  $S_u(T') \subset \mathcal{B}_u$  s'écrit (indépendamment de  $T$ )

$$S_u(T') = \text{Spec } k[\zeta_i : i \in I(T'); \eta_j : j \in J(T')]$$

où  $J(T')$  est un certain ensemble fini.

(b) On suppose

$$a'_{q-1} < a_q \leq a'_q \quad \forall q \in \{1, \dots, s\}.$$

Alors le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$ . L'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  est le fermé de  $S_u(T')$  formé par les zéros des coordonnées  $\zeta_i$  pour  $i \in I(T')$  vérifiant  $a_q \leq i < a'_q$  avec  $q \in \{2, \dots, s\}$ .

Il est facile de voir que le théorème 17.1 résulte de la proposition. Montrons le second théorème.

**17.3.1. Démonstration du théorème 17.2**

Supposons l'intersection  $K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_l}$  non-vide. D'après le lemme 12.1.2, il existe  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  tel que  $\mathcal{F}_{T'} \in K^{T_m}$  pour tout  $m \in \{1, \dots, l\}$ . Notons  $a'_1 < \dots < a'_s$  les entrées de sa première ligne de  $T'$ . D'après §13.1, on a  $a'_{q-1} < a_q^{(m)} \leq a'_q$  pour tous  $q \in \{2, \dots, s\}$  et  $m \in \{1, \dots, l\}$ . Il résulte :

$$\text{Max}(a_{q-1}^{(m)} : 1 \leq m \leq l) < \text{Min}(a_q^{(m)} : 1 \leq m \leq l) \quad \forall q \in \{2, \dots, s\}.$$

Inversement supposons cette inégalité vérifiée. Posons  $a_1 = 1$  et, pour  $q \in \{2, \dots, s\}$ , posons  $a_q = \text{Max}_m(a_q^{(m)})$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  le tableau standard dont  $a_1, \dots, a_s$  sont les entrées de la première ligne. On a alors  $a_{q-1} < a_q^{(m)} \leq a_q$  pour tous  $q \in \{2, \dots, s\}$  et  $m \in \{1, \dots, l\}$ . D'après la proposition 17.3 Il résulte :  $\mathcal{F}_T \in K^{T_m}$  pour tout  $m \in \{1, \dots, l\}$ .

On a  $\dim S_u(T) = \dim \mathcal{B}_u$  (cf. remarque 7.2.2). Avec les notations de §17.3.(a), le fermé  $S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_l} \subset S_u(T)$  est l'ensemble des zéros des fonctions  $\zeta_i$  pour  $i \in I(T)$  vérifiant  $a_q^{(m)} \leq i < a_q$  pour un certain  $q \in \{2, \dots, s\}$  et un certain  $m \in \{1, \dots, l\}$ . Il suit :

$$\dim S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_l} = \dim \mathcal{B}_u - \sum_{q=2}^r (a_q - \text{Min}_m(a_q^{(m)})).$$

D'où :

$$\text{codim}_{\mathcal{B}_u} K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_l} \geq \sum_{q=2}^s (\text{Max}_m(a_q^{(m)}) - \text{Min}_m(a_q^{(m)})).$$

Supposons maintenant  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  quelconque tel que l'intersection  $S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_l}$  soit non-vide. On note  $a'_1, \dots, a'_s$  les entrées de la première ligne de  $T'$ . Il suit  $a'_q \geq \text{Max}_m(a_q^{(m)})$  pour tous  $m, q$ . D'après §17.3 nous avons

$$\dim S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_l} = \dim S_u(T') - \sum_{q=2}^r (a'_q - \text{Min}_m(a_q^{(m)}))$$

d'où

$$\dim S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \cdots \cap K^{T_s} \leq \dim \mathcal{B}_u - \sum_{q=2}^s (\text{Max}_m(a_q^{(m)}) - \text{Min}_m(a_q^{(m)})).$$

La dimension de l'intersection  $K^{T_1} \cap \cdots \cap K^{T_s}$  s'obtient comme le maximum des dimensions des intersections  $S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \cdots \cap K^{T_i}$ , pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Il résulte l'inégalité

$$\text{codim}_{\mathcal{B}_u} K^{T_1} \cap \cdots \cap K^{T_s} \leq \sum_{q=2}^s (\text{Max}_m(a_q^{(m)}) - \text{Min}_m(a_q^{(m)}))$$

d'où finalement l'égalité annoncée.  $\square$

Il reste à montrer la proposition 17.3.

#### 17.4. Démonstration de la proposition 17.3

Nous omettrons quelques détails dans la démonstration. Nous voulons surtout faire ressortir la trame du raisonnement car elle est commune au cas deux-lignes étudié ensuite.

##### 17.4.1. Certains ensembles d'indices

Posons par convention :  $a'_{s+1} = a_{s+1} = n + 1$ . Pour illustrer les définitions, considérons les tableaux de l'exemple 17.1 :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & \\ \hline 6 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

Ensembles  $I(i), I(T'), I^T(i), I^T(T') \subset B'$ .

Soit  $i \in A'$ . On a  $i = a'_q$  avec  $q \in \{1, \dots, s\}$ . On pose

$$I(i) = \{a'_q + 1, \dots, a'_{q+1} - 1\}$$

et  $I^T(i) = \{a'_q + 1, \dots, a_{q+1} - 1\}$

On a donc  $I^T(i) \subset I(i) \subset B'$ . On pose d'autre part  $I(i) = I^T(i) = \emptyset$  pour  $i \in B'$ . On obtient ainsi

$$I(T') = \bigsqcup_{i \in A'} I^T(i) = \bigsqcup_{i=1}^n I(i)$$

où  $I(T')$  est l'ensemble de la proposition. On pose :

$$I^T(T') = \bigsqcup_{i \in A'} I^T(i).$$

*Exemple.* Si  $T$  et  $T'$  sont les tableaux ci-dessus, alors on obtient  $I(2) = \{3\}$ ,  $I^T(2) = I(4) = I^T(4) = \emptyset$ ,  $I(5) = I^T(5) = \{6\}$ .

Ensembles  $J(i), J(T') \subset B'$ .

Pour  $i = b'_p \in B'$  on pose

$$J(i) = \{j \in \{b'_{p+1}, \dots, b'_r\} : j > i\}.$$

On pose d'autre part  $J(i) = \emptyset$  pour  $i \in A'$  et

$$J(T') = \bigsqcup_{i \in B'} J(i).$$

*Exemple.* Si  $T$  et  $T'$  sont les tableaux ci-dessus, alors on a  $J(1) = \{3, 6\}$  et  $J(6) = J(3) = \emptyset$ .

Ensemble  $J^T(T') \subset B'$  et fonction  $\gamma : J^T(T') \rightarrow A'$ .

On pose :

$$J^T(T') = \bigsqcup_{q=1}^s \{i \in B' : a_q \leq i \leq a'_q - 1\}.$$

Soit  $i \in J^T(T')$ . On a donc  $a_q \leq i \leq a'_q - 1$  pour  $q \in \{1, \dots, s\}$ . On pose  $\gamma(i) = a'_q$ . On obtient ainsi une fonction  $\gamma : J^T(T') \rightarrow A'$ .

*Exemple.* Si  $T$  et  $T'$  sont les tableaux ci-dessus, alors on a  $J^T(T') = \{2, 4\}$  et  $\gamma(1) = \{2\}$  et  $\gamma(3) = \{4\}$ .

En utilisant §4.5.1 et §7.2.2, on montre par un argument simple de dénombrement :

#### 17.4.2. LEMME

On a les égalités :

- (a)  $\#I^T(T') + \#J^T(T') + \#J(T') = \dim \mathcal{B}_u$
- (b)  $\#I(T') + \#J(T') = \dim S_u(T')$ .

#### 17.4.3. Certains sous-groupes de $GL(V)$

On a fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$  une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$  (cf. §4.5.2). Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $x_i \in |Y|$  la case de  $Y$  qui porte le numéro  $i$  dans  $T'$ , enfin on pose  $e[i] = e_{x_i}$ . Les vecteurs  $e[i]$  obtenus ainsi forment une base adaptée du drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$ . On définit certains sous-groupes de  $GL(V)$ .

Groupes  $U, U^T$  et  $U'$ .

Soient

$$U = \{g \in GL(V) : ge[i] - e[i] \in \langle e[j] : j \in I(i) \rangle \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$U^T = \{g \in GL(V) : ge[i] - e[i] \in \langle e[j] : j \in I^T(i) \rangle \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$\text{et } U' = \{g \in GL(V) : ge[i] - e[i] \in \langle e[j] : j \in J(i) \rangle \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Les groupes  $U, U^T$  et  $U'$  ainsi obtenus sont unipotents et on a  $U^T \subset U$ . De plus le produit  $UU' = U'U$  est un groupe naturellement isomorphe au groupe produit cartésien  $U \times U'$ . Enfin on a les égalités  $\dim U = \#I(T')$ ,  $\dim U^T = \#I^T(T')$  et  $\dim U' = \#J(T')$ .

Groupe  $H^T$ .

Soit

$$H^T = \{g \in GL(V) : \begin{array}{ll} ge[i] = e[i] & \text{si } i \notin J^T(T') \\ \text{et } ge[i] - e[i] \in k.e[\gamma(i)] & \text{si } i \in J^T(T') \end{array}\}.$$

On a ainsi  $\dim H^T = \#J^T(T')$ .

On montre le lemme suivant :

#### 17.4.4. LEMME

(a) L'application  $\varphi : U' \times U \rightarrow S_u(T')$ ,  $(g', g) \mapsto g'.g.\mathcal{F}_{T'}$  est bien définie et est un isomorphisme de variétés.

(b) L'application  $\psi : U' \times H^T \times U^T \rightarrow K^T$ ,  $(g', h, g) \mapsto g'.h.g.\mathcal{F}_{T'}$  est bien définie et est une immersion ouverte.

*Démonstration.* Soit  $\Omega_{T'} \subset \mathcal{B}$  l'ouvert de l'atlas affine de  $\mathcal{B}$  qui contient le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  (cf. §2.3.4). Il est facile de voir que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des immersions fermées sur  $\Omega_{T'}$  (cf. §1.1.7).

(a) On a clairement  $g.\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$  pour tout  $g \in U$ . Comme  $U'$  est contenu dans le centralisateur de  $u$ , qui stabilise  $\mathcal{B}_u$ , il suit que  $\varphi$  est bien définie. Rappelons que  $S_u(T')$  s'obtient comme l'intersection de  $\mathcal{B}_u$  avec l'orbite d'un groupe unipotent  $\tilde{U}$  (cf. §6.1.3 et §7.1.5). D'après §7.1.1, on a  $U, U' \subset \tilde{U}$ . Alors on obtient  $\varphi(g', g) \in S_u(T')$ . Comme  $S_u(T')$  est par ailleurs fermé dans l'ouvert affine  $\Omega_{T'}$  (cf. §6.1.1), l'application  $\varphi$  est une immersion fermée dans  $S_u(T')$ . D'après le lemme 17.4.2, les variétés  $U' \times U$  et  $S_u(T')$  ont même dimension. L'application est donc un isomorphisme.

(b) Il est facile de vérifier  $h.g.\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$  pour tous  $h \in H^T$  et  $g \in U$ . Comme  $U'$  centralise  $u$ , il suit que l'image de  $\psi$  est contenue dans  $\mathcal{B}_u$ . D'autre part, si  $h$  est générique dans le groupe  $H^T$ , alors on a  $\psi(g', h, g) \in \mathcal{B}_u^T$ . L'image de  $\psi$  est donc contenue dans la composante  $K^T$ , obtenue comme l'adhérence de  $\mathcal{B}_u^T$ . Elle est localement fermée et de même dimension que  $K^T$  (cf. lemme 17.4.2), elle est donc ouverte dans  $K^T$ .  $\square$

On peut maintenant montrer la proposition 17.3.

#### 17.4.5. Démonstration de la proposition 17.3

On note  $\mathcal{W}(T, T')$  l'image du morphisme  $\psi$  du lemme précédent. D'après le lemme, l'intersection  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$  s'identifie au sous-ensemble fermé  $\psi(U' \times U^T) \subset S_u(T')$ . Cela implique que  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$  est un fermé de  $K^T \cap S_u(T')$ . D'autre part, comme  $\mathcal{W}(T, T')$  est ouvert dans  $K^T$ , on obtient que  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$  est un ouvert de  $K^T \cap S_u(T')$ . Enfin  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$  est non-vide (contient  $\mathcal{F}_{T'}$ ). D'après le lemme 12.1.3, on a l'égalité  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T') = K^T \cap S_u(T')$ . La démonstration est complète.  $\square$

NON-SINGULARITÉ DES COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES DE LA FIBRE DE  
SPRINGER DANS LE CAS CROCHET

Pour conclure ce chapitre consacré à l'étude du cas crochet, voyons qu'à l'aide des constructions précédentes, on peut montrer le résultat suivant, bien connu (cf. [29], [5]).

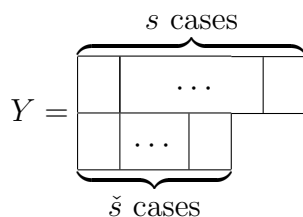
**17.5. PROPOSITION**

*Si  $Y = Y(u)$  est de type crochet, alors les composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  sont non-singulières.*

*Démonstration.* Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  définissant une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . D'après la proposition 5.4.5, il suffit d'établir la non-singularité de tout drapeau de la forme  $\mathcal{F}_{T'}$  contenu dans  $K^T$  (on peut même se limiter au cas où  $T'$  est un tableau standard). D'après le lemme 17.4.4, le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans un ouvert de  $K^T$  isomorphe à un espace affine. Il suit que  $\mathcal{F}_{T'}$  est un point non-singulier de  $K^T$ .  $\square$

Chapitre 18. CELLULES DE SCHUBERT INTERSECTÉES  
 AVEC LES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$   
 DANS LE CAS DEUX-LIGNES

On suppose désormais  $Y = Y(u)$  de type deux-lignes. On note  $s$  et  $\check{s}$  les longueurs des lignes de  $Y$ .



D'après §4.5.1 on a l'égalité  $\dim \mathcal{B}_u = \check{s}$ .

Considérons un tableau  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et un tableau  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard  $T$ -constructible (cf. §14.1). Nous montrons d'une part que le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$  (cela complète la démonstration du théorème 14.2). Nous établissons d'autre part l'isomorphisme

$$S_u(T') \cap K^T \cong \mathbb{A}^{d^T(T')}$$

pour un nombre  $d^T(T') \in \mathbb{N}$  préalablement introduit.

Dans le prochain chapitre, nous décrirons avec plus de précision l'intersection  $S_u(T') \cap K^T$  dans le cas où le tableau  $T'$  est standard. Nous en déduirons un calcul de la dimension d'une intersection finie de composantes.

ÉNONCÉ DU THÉORÈME

On définit tout d'abord le nombre  $d^T(T')$  évoqué ci-dessus.

**18.1. Définition du nombre  $d^T(T') \in \mathbb{N}$**

Soient  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard et  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard et  $T$ -constructible. (La propriété  $T$ -constructibilité n'est cependant pas invoquée dans la définition suivante.)

*Notations.* Rappelons que, si  $\theta$  est un tableau quelconque à deux lignes, on note  $L_p(\theta)$  l'ensemble des entrées contenues dans la  $p$ -ème ligne de  $\theta$  (pour  $p \in \{1, 2\}$ ).

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $s_i$  et  $\check{s}_i$  les longueurs des lignes du sous-tableau  $T|_i$ . Autrement dit :

$$s_i = \#L_1(T|_i) = \#L_1(T) \cap \{1, \dots, i\} \text{ et } \check{s}_i = \#L_2(T|_i) = \#L_2(T) \cap \{1, \dots, i\}.$$

De même on note  $s'_i$  et  $\check{s}'_i$  les longueurs des lignes du sous-tableau  $T'|_i$  :

$$s'_i = \#L_1(T'|_i) = \#L_1(T') \cap \{1, \dots, i\} \text{ et } \check{s}'_i = \#L_2(T'|_i) = \#L_2(T') \cap \{1, \dots, i\}.$$

On définit tout d'abord divers sous-ensembles d'indices  $i \in \{1, \dots, n\}$  dépendant de  $T$  et  $T'$ .

*Exemple.* Pour illustrer les définitions qui viennent, on considère les deux tableaux suivants :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 11 \\ \hline 2 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 7 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & \\ \hline \end{array}$$

Ces tableaux sont ceux de l'exemple 14.1.(b). D'après ce dernier, on sait que  $T'$  est  $T$ -constructible.

#### 18.1.1. Définition de l'ensemble $I(T')$

Soit  $I^+(T')$  l'ensemble des numéros  $i \in L_1(T')$  tels que  $s'_i > \check{s}'_i$ . Soit  $I^-(T')$  l'ensemble des numéros  $i \in L_2(T')$  tels que  $\check{s}'_i > s'_i + 1$ . Enfin soit :

$$I(T') = I^+(T') \cup I^-(T').$$

*Exemple.* Pour  $T'$  comme ci-dessus, on a  $I^+(T') = \{1, 11\}$ ,  $I^-(T') = \{4, 6, 8\}$  et donc  $I(T') = \{1, 4, 6, 8, 11\}$ .

#### 18.1.2. Définition des ensembles $I_{\hat{m}f}(T, T')$ et $\widehat{I}_{\hat{m}f}(T, T')$

Soit  $I_{\hat{m}f}(T, T')$  l'ensemble des  $i \in \{1, \dots, n\}$  tels que les sous-tableaux  $T|_i$  et  $T'|_i$  ont même forme. On a, autrement dit :

$$I_{\hat{m}f}(T, T') = \{i \in \{1, \dots, n\} : s_i = s'_i \text{ et } \check{s}_i = \check{s}'_i\}.$$

Pour  $i \in I_{\hat{m}f}(T, T')$ , on pose :

$$\widehat{s}_i = s'_i - \check{s}'_i.$$

Soit  $\widehat{I}_{\hat{m}f}(T, T')$  l'ensemble des  $i \in I_{\hat{m}f}(T, T')$  tels qu'il existe  $j \in I_{\hat{m}f}(T, T')$  vérifiant  $j > i$  et  $\widehat{s}_j < \widehat{s}_i$ .

*Exemple.* Pour  $T$  et  $T'$  comme ci-dessus on a  $I_{\hat{m}f}(T, T') = \{1, 2, 10, 11\}$  et  $\widehat{I}_{\hat{m}f}(T, T') = \{1\}$ .

#### 18.1.3. Définition de l'ensemble $I(T, T')$

On définit l'ensemble  $I(T, T')$  par la formule suivante :

$$I(T, T') = (L_1(T) - L_1(T) \cap I_{\hat{m}f}(T, T')) \sqcup (L_1(T) \cap \widehat{I}_{\hat{m}f}(T, T')).$$

*Exemple.* Pour  $T$  et  $T'$  comme ci-dessus, on a  $I(T, T') = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ .

#### 18.1.4. Définition de l'ensemble $I^T(T')$ et du nombre $d^T(T')$

On pose alors :

$$I^T(T') = I(T') \cap I(T, T') \quad \text{et} \quad d^T(T') = \#I^T(T').$$

*Exemple.* Pour  $T$  et  $T'$  comme ci-dessus, on trouve  $I^T(T') = \{1, 4, 6\}$  donc  $d^T(T') = 3$ .

On peut maintenant énoncer le théorème :

**18.2. THÉORÈME**

Supposons  $Y = Y(u)$  de type deux-lignes. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard définissant une composante  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard définissant le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$ . Supposons que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible. L'intersection entre  $K^T$  et la cellule de Shimomura  $S_u(T')$  est non-vide et est isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}^{d^T(T')}$ .

*Exemple.* Ainsi pour  $T$  et  $T'$  comme dans les exemples ci-dessus, on trouve  $S_u(T') \cap K^T \cong \mathbb{A}^3$ .

## PRINCIPALES ÉTAPES DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 18.2

Avant de procéder à la démonstration du théorème proprement dite, présentons-en les étapes principales. Nous allons voir que le théorème s'obtient comme conséquence des deux lemmes suivants.

Le premier, purement combinatoire, concerne le cardinal de l'ensemble  $I(T, T')$  :

## 18.2.1. LEMME

Supposons que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible. On a l'égalité :

$$\#I(T, T') = \dim \mathcal{B}_u.$$

L'étape clef de la démonstration du théorème consiste en la construction d'un sous-ensemble localement fermé  $\mathcal{W}(T, T') \subset \mathcal{B}_u$  analogue à celui du lemme 17.4.4 dans le cas crochet. On montre :

## 18.2.2. LEMME

Supposons que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible. Il existe un sous-ensemble  $\mathcal{W}(T, T') \subset \mathcal{B}_u$  localement fermé satisfaisant aux propriétés suivantes :

- (1) L'ensemble  $\mathcal{W}(T, T')$  est un ouvert non-vide de  $K^T$ .
- (2) Il existe des applications algébriques  $\phi_i : \mathcal{W}(T, T') \rightarrow \mathbb{A}^1$  pour  $i \in I(T, T')$ , dont le produit est un isomorphisme de variétés  $\mathcal{W}(T, T') \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^N$ .
- (3) Le point fixe  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans  $\mathcal{W}(T, T')$ . L'intersection  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$  est le fermé de Zariski de  $\mathcal{W}(T, T')$  formé par les zéros des fonctions coordonnées  $\phi_i$  pour  $i \in I(T, T') - I^T(T')$ .
- (4) L'intersection  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$  est fermé dans la cellule  $S_u(T')$ .

Un tel ensemble  $\mathcal{W}(T, T')$  possède la propriété suivante :



## 18.2.3. PROPOSITION

*Supposons que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible. Soit un sous-ensemble localement fermé  $\mathcal{W}(T, T') \subset \mathcal{B}_u$  satisfaisant aux propriétés (1), (2), (3) et (4) du lemme 18.2.2. On a l'égalité  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T') = K^T \cap S_u(T')$ .*

*Démonstration de la proposition.* Comme dans §17.4.5, l'ensemble  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$  est non-vide et ouvert et fermé dans  $S_u(T') \cap K^T$ . Comme  $S_u(T') \cap K^T$  est connexe (cf. §12.1.3) on obtient l'égalité  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T') = K^T \cap S_u(T')$ .  $\square$

Dès lors le théorème 18.2 s'obtient très facilement comme conséquence des points (2) et (3) du lemme 18.2.2 et de la proposition 18.2.3. Il reste donc à montrer les lemmes 18.2.1 et 18.2.2.

Auparavant, voyons une autre conséquence du lemme 18.2.2.

NON-SINGULARITÉ DES COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES DE LA FIBRE DE  
SPRINGER DANS LE CAS DEUX-LIGNES

Le résultat suivant (bien connu, cf. [5]) découle des points (2) et (3) du lemme 18.2.2. la démonstration est similaire à celle de la proposition 17.5.

## 18.3. PROPOSITION

*Si  $Y = Y(u)$  est de type deux-lignes, alors les composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  sont non-singulières.*

Nous consacrons la suite de ce chapitre à la démonstration des lemmes 18.2.1 et 18.2.2.

DÉMONSTRATION DES LEMMES 18.2.1 ET 18.2.2

Le tableau  $T'$  est supposé  $T$ -constructible. De cette manière l'algorithme de reconstruction de  $T'$  défini dans §14.1 réussit. Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , soit  $\theta_i$  le tableau obtenu après la  $i$ -ème étape de l'exécution de l'algorithme. En particulier  $\theta_0$  est le tableau vide et on a  $\theta_n = T'$ .

**18.4. Quelques rappels, notations et observations préliminaires**

Rappelons tout d'abord l'aspect général du tableau  $\theta_i$  obtenu après la  $i$ -ème étape de l'algorithme et introduisons quelques notations.

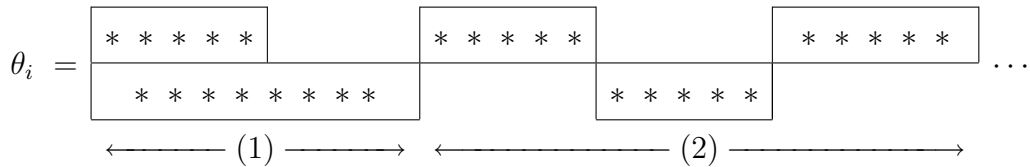
*Rappel.* Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Le tableau  $\theta_i$  satisfait aux axiomes suivants (cf. §14.1). (On rappelle que  $n_q(\theta)$  désigne le nombre d'entrées de la  $q$ -ème colonne d'un tableau  $\theta$ .)

(2L-A) Chaque ligne de  $\theta_i$  est une suite de bandes séparées par des espaces blancs (des cases vides). Les entrées contenues dans chaque ligne sont dans l'ordre croissant de gauche à droite. On a  $L_p(\theta_i) = T'_i$  pour tout  $p \in \{1, 2\}$ .

(2L-B) Les colonnes de  $\theta_i$  étant comptées de gauche à droite, on a l'égalité  $n_q(\theta_i) = n_q(T'_i)$  pour tout  $q \geq 1$ .

En particulier  $1, \dots, i$  sont les entrées du tableau  $\theta_i$  et chaque entrée n'apparaît qu'une fois.

Le tableau  $\theta_i$  a la forme suivante :



où la figure  $\boxed{* * *}$  symbolise une bande.

18.4.1. *Sous-tableaux  $\theta_i[A]$  et  $\theta_i[B]$ , sous-ensembles  $A_i, B_i \subset \{1, \dots, i\}$*

Comme il est indiqué sur le dessin, le tableau  $\theta_i$  comprend deux parties :

- (1) Les deux bandes qui sont adjacentes au bord gauche du tableau sont dites "en-place". (Éventuellement l'une des deux est vide.) Notons  $\theta_i[A]$  le sous-tableau de  $\theta_i$  formé par ces deux bandes. Notons  $A_i$  l'ensemble des numéros de ce sous-tableau. Ces numéros ne seront plus déplacés au cours des étapes ultérieures de l'exécution de l'algorithme.
- (2) Les bandes restantes sont dites "à-placer". Notons  $\theta_i[B]$  le sous-tableau formé par elles. Notons  $B_i$  l'ensemble des numéros de ce sous-tableau. Ces numéros n'occupent pas la même place dans les tableaux  $\theta_i$  et  $T'$ , ils devront donc être ultérieurement déplacés.

18.4.2. Nombres  $s^{(i)}$  et  $\check{s}^{(i)}$ 

On note  $s^{(i)}$  et  $\check{s}^{(i)}$  les longueurs respectives des deux bandes “en-place” du tableau  $\theta_i$  :

$$\theta_i = \begin{array}{c} \leftarrow s^{(i)} \text{ cases} \rightarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * & * & * \\ \hline \end{array} \\ \longleftarrow \check{s}^{(i)} \text{ cases} \longrightarrow \end{array} \dots$$

On caractérise les éléments  $i \in I_{\hat{m}f}(T, T')$  à l’aide de l’algorithme de la manière suivante. Rappelons qu’on note  $s'_i = \#L_1(T'_i)$  et  $\check{s}'_i = \#L_2(T'_i)$ .

## 18.4.3. LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (a) On a  $i \in I_{\hat{m}f}(T, T')$ .
- (b) Les tableaux  $\theta_i$  et  $T'_i$  coïncident.
- (c) Le tableau  $\theta_i$  a la forme d’un diagramme de Young.
- (d) On a  $s^{(i)} = s'_i$  et  $\check{s}^{(i)} = \check{s}'_i$ .

*Remarque.* Le tableau  $\theta_i$  est considéré comme un tableau à deux lignes. Par : “les tableaux  $\theta_i$  et  $T'_i$  coïncident”, on entend : ligne par ligne. Par : “le tableau  $\theta_i$  a la forme d’un diagramme de Young”, on entend : chaque ligne de  $\theta_i$  est formée d’une seule bande et la première ligne est plus longue que la seconde.

*Démonstration.* Ce lemme résulte facilement des axiomes (2L-A) et (2L-B).  $\square$

## 18.5. Démonstration du lemme 18.2.1

Pour tout  $i \in L_1(T) - I(T, T')$ , on a  $i \in I_{\hat{m}f}(T, T') - \hat{I}_{\hat{m}f}(T, T')$ . Par définition de  $\hat{I}_{\hat{m}f}(T, T')$ , il suit en particulier :

$$s_i - \check{s}_i \geq s - \check{s}.$$

D’où l’égalité :

$$L_1(T) - I(T, T') = \{i \in L_1(T) \cap I_{\hat{m}f}(T, T') - I(T, T') : i \geq s - \check{s}\}.$$

Dès lors, le lemme 18.2.1 s’obtient comme conséquence du lemme suivant :

## 18.5.1. LEMME

Supposons que le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible. Pour tout  $t \in \{0, \dots, s - \check{s}\}$ , on a l’égalité

$$\#\{i \in L_1(T) \cap I_{\hat{m}f}(T, T') - I(T, T') : i \geq t\} = t \quad \forall t \in \{0, \dots, s - \check{s}\}.$$

En effet : il suffit d’appliquer la formule précédente pour  $t = s - \check{s}$  et d’utiliser l’égalité  $\check{s} = \dim \mathcal{B}_u$ .

Pour montrer le lemme 18.5.1, on a besoin du résultat intermédiaire suivant.

18.5.2. LEMME

(Mêmes hypothèses.) Soit  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  tel que  $\{i, i + 1\} \notin I_{\hat{m}f}(T, T')$ . On a l'égalité

$$\text{Max}(0, s^{(i+1)} - \check{s}^{(i+1)}) = \text{Max}(0, s^{(i)} - \check{s}^{(i)}).$$

*Démonstration du lemme 18.5.2.* Par définition de l'algorithme on a clairement  $s^{(i+1)} \in \{s^{(i)}, s^{(i)} + 1\}$  et  $\check{s}^{(i+1)} \in \{\check{s}^{(i)}, \check{s}^{(i)} + 1\}$ . Si on suppose  $s^{(i)} < \check{s}^{(i)}$ , alors on a encore  $s^{(i+1)} \leq s^{(i+1)}$  et l'égalité énoncée dans le lemme résulte facilement dans ce cas. On suppose désormais  $s^{(i)} \geq \check{s}^{(i)}$ .

On distingue deux cas.

(1) Premier cas :  $i \in I_{\hat{m}f}(T, T')$ .

Par hypothèse il suit  $i + 1 \notin I_{\hat{m}f}(T, T')$ . D'après le lemme 18.4.3 le tableau  $\theta_i$  a la forme d'un diagramme de Young, contrairement au tableau  $\theta_{i+1}$ . On a donc nécessairement :

$$\theta_i = T'_i = \begin{array}{c} \longleftarrow s^{(i)} \text{ cases} \longrightarrow \\ \boxed{\begin{array}{cccccccc} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{array}} \\ \longleftarrow \check{s}^{(i)} \text{ cases} \longrightarrow \end{array} \quad \text{et} \quad \theta_{i+1} = \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cccccccc} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{array}} \boxed{i+1} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{= \theta_i} \end{array}$$

(Autrement dit  $i + 1 \in L_1(T) \cap L_2(T')$ .) Si  $s^{(i)} > \check{s}^{(i)}$ , alors on obtient  $s^{(i+1)} = s^{(i)}$  et  $\check{s}^{(i+1)} = \check{s}^{(i)}$ , d'où l'égalité l'égalité du lemme.

Si  $s^{(i)} = \check{s}^{(i)}$ , alors on a  $s^{(i+1)} = s^{(i)}$  et  $\check{s}^{(i+1)} = \check{s}^{(i)} + 1$ . Les deux maxima  $\text{Max}(0, s^{(i+1)} - \check{s}^{(i+1)})$  et  $\text{Max}(0, s^{(i)} - \check{s}^{(i)})$  sont nuls et par conséquent égaux.

(2) Second cas :  $i \notin I_{\hat{m}f}(T, T')$ .

Le tableau  $\theta_i$  a l'aspect suivant :

$$\theta_i = \begin{array}{c} \boxed{***} \quad \quad \quad \boxed{***} \\ \boxed{**} \quad \quad \quad \boxed{***} \quad \quad \quad \boxed{***} \\ \longleftarrow \theta_i[B] \longrightarrow \end{array}$$

Comme on suppose  $s^{(i)} \geq \check{s}^{(i)}$  et  $i \notin I_{\hat{m}f}(T, T')$ , il suit facilement que le sous-tableau  $\theta_i[B]$  est non-vidé.

Si  $i + 1 \in L_1(T)$ , alors le tableau  $\theta_{i+1}$  s'obtient d'après  $\theta_i$  par l'ajout d'une colonne, sans que les colonnes déjà présentes soient modifiées, d'où :  $s^{(i+1)} = s^{(i)}$  et  $\check{s}^{(i+1)} = \check{s}^{(i)}$ . L'égalité du lemme s'ensuit.

Supposons maintenant  $i + 1 \in L_2(T)$ . Par définition de l'algorithme, pour former  $\theta_{i+1}$ , un nouveau numéro est ajouté à l'extrémité de chaque bande formant  $\theta_i$ , la dernière bande exceptée. Comme le sous-tableau  $\theta_i[B]$  est non-vidé, les bandes "en-place" de  $\theta_i$  sont toutes deux agrandies d'une case, d'où :  $s^{(i+1)} = s^{(i)} + 1$  et  $\check{s}^{(i+1)} = \check{s}^{(i)} + 1$ . L'égalité du lemme en découle.

La démonstration est complète dans tous les cas.  $\square$

*Démonstration du lemme 18.5.1.* Par commodité, on pose :

$$J(T, T') = L_1(T) \cap I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T') - I(T, T').$$

et

$$J(T, T', t) = \{i \in J(T, T') : \widehat{s}_i \geq t\}.$$

On raisonne par récurrence sur  $n \geq 1$ .

Supposons dans un premier temps  $I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T') = \{n\}$ . D'après le lemme 18.5.2, on a  $s^{(n)} = \check{s}^{(n)}$ . On obtient :  $s = \check{s}$ . Autrement dit le diagramme  $Y$  est rectangulaire. Alors on a clairement  $I(T, T') = L_1(T)$ . Le lemme résulte immédiatement dans ce cas.

On suppose désormais  $I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T') \neq \{n\}$ , de sorte qu'il existe  $m \in I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ , distinct de  $n$ , maximal. L'hypothèse de récurrence se traduit par l'égalité, pour tout  $t \in \{0, \dots, \widehat{s}_m\}$  :

$$\#J(T|_m, T'|_m, t) = t.$$

*Observation.* On a  $L_1(T|_m) \cap I_{\widehat{\text{mf}}}(T|_m, T'|_m) = L_1(T) \cap I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T') \cap \{1, \dots, n-1\}$ . On a d'autre part l'inclusion  $I(T|_m, T'|_m) \subset I(T, T') \cap \{1, \dots, m\}$  avec égalité si  $s - \check{s} \geq \widehat{s}_m$ . Par conséquent, si on suppose  $s - \check{s} \geq \widehat{s}_m$ , alors on a :

$$J(T|_m, T'|_m) = J(T, T') \cap \{1, \dots, n-1\}.$$

On distingue deux cas principaux.

(1) Premier cas :  $m < n-1$ .

Il suit  $n-1 \notin I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ . D'après le lemme 18.5.2, on a l'égalité  $s - \check{s} = \widehat{s}_m$ . D'après l'observation précédente, il suit :

$$J(T|_m, T'|_m) = J(T, T') \cap \{1, \dots, n-1\}.$$

Montrons :  $n \in L_2(T)$ . Si on avait  $n \in L_1(T)$ , alors le tableau  $\theta_n$  s'obtiendrait d'après  $\theta_{n-1}$  par l'ajout d'une colonne sans modifier les précédentes et on aurait  $n \notin I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$  du fait de  $n-1 \notin I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ , ce qui n'est pas possible en vertu de l'égalité  $\theta_n = T'$  et d'après le lemme 18.4.3.

Il suit :  $n \in L_2(T)$ . D'où :

$$J(T|_m, T'|_m) = J(T, T').$$

Il résulte :

$$\#J(T, T', t) = \#J(T|_m, T'|_m, t) = t \quad \forall t \in \{0, \dots, s - \check{s}\}.$$

Cela conclut le premier cas.

(2) Second cas :  $m = n-1$ . On distingue deux sous-cas.

(2.a) Supposons  $n \in L_1(T)$ .

On a alors  $s_n = s_{n-1} + 1$  et  $\check{s}_n = \check{s}_{n-1}$ , d'où :  $s - \check{s} = \widehat{s}_{n-1} + 1$ . D'après l'observation précédente, on a l'égalité :

$$J(T|_{n-1}, T'|_{n-1}) = J(T, T') \cap \{1, \dots, n-1\}.$$

On obtient pour tout  $t \in \{1, \dots, s - \check{s} - 1\}$  :

$$\#J(T, T', t) = \#J(T|_{n-1}, T'|_{n-1}, t) = t.$$

Il reste à établir l'égalité dans le cas  $t = s - \check{s}$ .

Soit  $i \in J(T, T')$  distinct de  $n$ . On a en particulier  $\widehat{s}_i \leq \widehat{s}_{n-1}$ , d'où  $i \in J(T|_{n-1}, T'|_{n-1}, \widehat{s}_{n-1})$ . Il résulte :

$$J(T, T', s - \check{s}) = J(T|_{n-1}, T'|_{n-1}, \widehat{s}_{n-1}) \cup \{n\}.$$

D'où finalement :

$$\#J(T, T', s - \check{s}) = (s - \check{s} - 1) + 1 = s - \check{s}.$$

Cela conclut le sous-cas (2.a).

(2.b) Supposons  $n \in L_2(T)$ .

On a alors  $s_n = s_{n-1}$  et  $\check{s}_n = \check{s}_{n-1} + 1$ , d'où :  $s - \check{s} = \widehat{s}_{n-1} - 1$ . Soit  $t \in \{0, \dots, s - \check{s}\}$ .

On montre l'égalité :

$$J(T, T', t) = J(T|_{n-1}, T'|_{n-1}, t).$$

L'égalité  $\#J(T, T', t) = t$  en résultera immédiatement.

Soit  $i \in J(T|_{n-1}, T'|_{n-1}, t)$ . On a par définition  $i \in L_1(T) \cap I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ . De plus, on a par hypothèse :  $\widehat{s}_i \leq s - \check{s}$ . Comme par ailleurs on suppose  $i \notin I(T|_{n-1}, T'|_{n-1}, t)$ , cela implique facilement  $i \notin I(T, T')$ . D'où :  $i \in J(T, T', t)$ .

Soit  $i \in J(T, T', t)$ . On a en particulier  $i \in L_1(T)$ . Comme on suppose  $n \in L_2(T)$ , il suit  $i \leq n - 1$ . D'où :  $i \in L_1(T|_{n-1}) \cap I_{\widehat{\text{mf}}}(T|_{n-1}, T'|_{n-1})$ . On a d'autre part l'inclusion :  $I(T|_{n-1}, T'|_{n-1}) \subset I(T, T')$ . Il résulte :  $i \notin I(T|_{n-1}, T'|_{n-1})$ . On obtient finalement  $i \in J(T|_{n-1}, T'|_{n-1}, t)$ .

La démonstration est complète.  $\square$

## DÉMONSTRATION DU LEMME 18.2.2

La démonstration du lemme 18.2.2 est plus longue et nous y consacrons plusieurs sections. Rappelons que le tableau  $T'$  est supposé  $T$ -constructible.

### 18.6. Notations et observations préliminaires

La démonstration du lemme reste élémentaire. Néanmoins il est nécessaire d'introduire un certain nombre de notations.

#### 18.6.1. Base $e[i]$ adaptée au tableau $T'$

On a fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$ , une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$  (cf. §4.5.2).

Le tableau  $T'$  s'obtient comme une numérotation des cases de  $Y$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  soit  $x_i$  la case de  $Y$  portant le numéro  $i$  dans le tableau  $T'$ . On pose  $e[i] = e_{x_i}$ .

De cette manière le drapeau  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$  est défini par :

$$V_i = \langle e[1], \dots, e[i] \rangle \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, n\}.$$

18.6.2. *Prolongement de  $u$  en un endomorphisme  $u_\infty$  d'un espace vectoriel  $V_\infty$  de dimension infinie. Variété  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$*

On considère de nouveau la base de Jordan indexée sur l'ensemble des cases de  $Y$ . Cette base se divise en deux familles de vecteurs : la sous-base formée par les vecteurs  $v_1, \dots, v_s$  associés aux cases de la première ligne de  $Y$  et la sous-base formée par les vecteurs  $\check{v}_1, \dots, \check{v}_s$  associés aux cases de la seconde ligne de  $Y$ .

Le schéma suivant illustre l'action de  $u$  sur les deux sous-familles.

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow \cdots \leftarrow v_{s-1} \leftarrow v_s \\ 0 \leftarrow \check{v}_1 \leftarrow \check{v}_2 \leftarrow \cdots \leftarrow \check{v}_s \end{aligned}$$

On complète la famille  $(v_1, \dots, v_s)$  en une famille infinie  $(v_q)_{q \geq 1}$ . De même on complète  $(\check{v}_1, \dots, \check{v}_s)$  en une famille infinie  $(\check{v}_q)_{q \geq 1}$ . Puis on considère l'espace vectoriel  $V_\infty$  de dimension infinie sur  $k$  dont les deux familles infinies réunies forment une base :

$$V_\infty = \left( \bigoplus_{q=1}^{\infty} kv_q \right) \oplus \left( \bigoplus_{q=1}^{\infty} k\check{v}_q \right).$$

De cette manière  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $V_\infty$ .

L'endomorphisme  $u : V \rightarrow V$  s'étend naturellement en un endomorphisme  $u_\infty : V_\infty \rightarrow V_\infty$  dont l'action sur la base est indiqué par le schéma suivant.

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow v_1 \leftarrow \cdots \leftarrow v_{q-1} \leftarrow v_q \leftarrow \cdots \\ 0 \leftarrow \check{v}_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \check{v}_{q-1} \leftarrow \check{v}_q \leftarrow \cdots \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  l'ensemble des drapeaux partiels  $\mathcal{F} = (0 = V_0 \subset \dots \subset V_n \subset V_\infty)$  vérifiant  $\dim V_i = i$  pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  et stables par l'endomorphisme  $u_\infty$ . Bien que l'espace vectoriel  $V_\infty$  soit de dimension infinie, l'ensemble  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  forme une variété algébrique projective de dimension finie. En effet on a  $V_n \subset \ker u_\infty^n$  et  $\ker u_\infty^n$  est un espace de dimension finie.

La fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  coïncide avec la sous-variété fermée de  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  formée par les drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  vérifiant  $V_n = V$ .

18.6.3. *Espace vectoriel étendu  $\bar{V}_\infty$ . Endomorphisme  $\tilde{u} : \bar{V}_\infty \rightarrow V_\infty$  inverse à droite de  $u_\infty$*

On considère deux vecteurs additionnels  $v_\emptyset$  et  $\check{v}_\emptyset$  et on pose

$$\bar{V}_\infty = (kv_\emptyset \oplus k\check{v}_\emptyset) \oplus V_\infty.$$

Soit  $\tilde{u} : \bar{V}_\infty \rightarrow V_\infty$  l'application linéaire dont l'action sur la base est décrite par le schéma suivant.

$$\begin{aligned} v_\emptyset \mapsto v_1 \mapsto \cdots \mapsto v_{q-1} \mapsto v_q \mapsto \cdots \\ \check{v}_\emptyset \mapsto \check{v}_1 \mapsto \cdots \mapsto \check{v}_{q-1} \mapsto \check{v}_q \mapsto \cdots \end{aligned}$$

L'application  $\tilde{u}$  ainsi construite satisfait à la propriété suivante :

*Propriété.* On a  $u_\infty \circ \tilde{u}(v) = v$  pour tout  $v \in V_\infty$ .

18.6.4. Ensemble étendu  $\overline{\llbracket 1, n \rrbracket}$ . Une fonction  $\nu : \overline{\llbracket 1, n \rrbracket} \rightarrow \overline{\llbracket 1, n \rrbracket}$  “voisin à gauche dans  $T'$ ”

On introduit deux symboles  $\emptyset_1$  et  $\emptyset_2$ . On pose

$$e[\emptyset_1] = \nu_\emptyset \text{ et } e[\emptyset_2] = \check{\nu}_\emptyset.$$

Soit  $\overline{\llbracket 1, n \rrbracket} = \{\emptyset_1, \emptyset_2, 1, \dots, n\}$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Si  $i$  n'est pas dans la première colonne de  $T'$ , alors on note  $\nu(i)$  le numéro voisin à gauche de  $i$  dans  $T'$ . Si  $i$  est le premier numéro de la  $p$ -ème ligne de  $T'$ , alors on pose  $\nu(j) = \emptyset_p$ . En outre, par commodité, on pose  $\nu(\emptyset_p) = \emptyset_p$  pour  $p \in \{1, 2\}$ . On a ainsi défini une fonction “voisin à gauche dans  $T'$ ”

$$\nu : \overline{\llbracket 1, n \rrbracket} \rightarrow \overline{\llbracket 1, n \rrbracket}$$

D'après l'axiome (2L-A), si le numéro  $j \in \{1, \dots, i\}$  ne figure pas dans la première colonne de  $T'$ , alors  $\nu(j)$  est aussi le numéro voisin de  $j$  dans  $\theta_i$  (éventuellement séparé de  $j$  par des cases vides) :

$$\theta_i = \begin{array}{ccccccc} \cdots & \boxed{\nu(j')} & & & & \boxed{j'} & \cdots \\ \cdots & * & \boxed{\nu(j)} & \boxed{j} & * & & \end{array}$$

La propriété suivante est clairement satisfaite.

*Propriété.* Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a l'égalité  $\tilde{u}e[\nu(i)] = e[i]$ .

*Observation : lien entre  $A_i, B_i$  et  $\nu$ .* Soient  $A_i, B_i \subset \{1, \dots, i\}$  les ensembles introduits dans §18.4.1. Au cours de la  $i$ -ème étape de l'algorithme, le tableau  $\theta_i$  est construit d'après  $\theta_{i-1}$ .

(1) Si  $i \in L_1(T)$ , la construction consiste à ajouter une colonne contenant  $i$  à droite de  $\theta_{i-1}$ , les autres colonnes ne sont pas affectées et on a

$$A_{i-1} = A_i \cap \{1, \dots, i-1\} \quad \text{et} \quad B_{i-1} = B_i \cap \{1, \dots, i-1\}.$$

On a par ailleurs l'implication :

$$i \in A_i \Rightarrow B_{i-1} = \emptyset.$$

(2) Supposons  $i \in L_2(T)$ . Les ensembles  $A_i, B_i$  sont alors liés aux ensembles  $A_{i-1}, B_{i-1}$  par l'intermédiaire de  $\nu$ . En effet on a pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$  :

$$j \in A_i \Leftrightarrow \nu(j) \in A_{i-1} \cup \{\emptyset_1, \emptyset_2\} \quad \text{et} \quad j \in B_i \Leftrightarrow \nu(j) \in B_{i-1}.$$

18.6.5. Une fonction  $\gamma_i : \overline{\llbracket 1, n \rrbracket} \rightarrow \overline{\llbracket 1, n \rrbracket}$  “voisin en biais dans  $\theta_i$ ”

On fixe  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Supposons  $j \in L_p(T')$  pour  $p \in \{1, 2\}$ . Soit  $p' \in \{1, 2\}$  le numéro de l'autre ligne de  $T'$ . L'entrée  $j$  figure dans la  $p$ -ème ligne du tableau  $\theta_i$ . On note  $\gamma_i(j)$  le premier numéro rencontré lorsqu'on lit la  $p'$ -ème ligne de  $\theta_i$  de la droite vers la gauche, en commençant par la case situé à gauche de la colonne contenant  $j$ . Si toutes les cases rencontrées sont vides, alors on pose  $\gamma_i(j) = \emptyset_{p'}$ .

$$\theta_i = \begin{array}{cccccccccccccccc} * & * & * & \boxed{j} & * & \boxed{\gamma_i(j')} & & & \boxed{h} & * & * & \boxed{\gamma_i(h')} & & & & & & \cdots \\ * & * & \boxed{\gamma_i(j)} & \boxed{j} & \check{j} & * & * & * & * & * & * & \boxed{j'} & \boxed{\gamma_i(h)} & & & \boxed{*} & \boxed{h'} & \boxed{*} & * \end{array}$$



Par commodité on pose  $\gamma_i(\emptyset_1) = \emptyset_2$  et  $\gamma_i(\emptyset_2) = \emptyset_1$ . On définit de cette manière une fonction “voisin en biais en  $\theta_i$ ”

$$\gamma_i : \overline{[1, i]} \rightarrow \overline{[1, i]}.$$

*Relations entre  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i-1}$ .* Observons que la donnée de  $\gamma_i$  caractérise le tableau  $\theta_i$ . Le tableau  $\theta_i$  est construit d’après  $\theta_{i-1}$ . On décrit cette construction en citant certaines relations entre  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i-1}$ . Comme dans la construction de  $\theta_i$  d’après  $\theta_{i-1}$ , deux cas sont à considérer suivant que le numéro  $i$  figure dans la première ou dans la seconde ligne de  $T$ .

On montre le lemme suivant.

18.6.6. LEMME

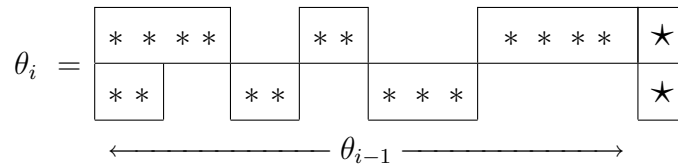
Fixons  $i \in \{2, \dots, n\}$ .

- (1) On suppose  $i \in L_1(T)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ , on a l’égalité  $\gamma_i(j) = \gamma_{i-1}(j)$ .
- (2) On suppose  $i \in L_2(T)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ , on a l’égalité  $\nu \circ \gamma_i(j) = \gamma_{i-1} \circ \nu(j)$ .

*Démonstration.*

(1) On suppose  $i \in L_1(T)$ .

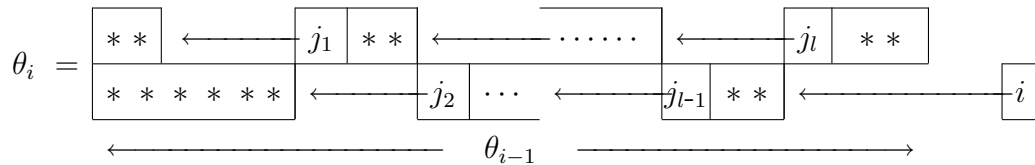
Dans ce cas, le tableau  $\theta_i$  s’obtient d’après  $\theta_{i-1}$  en insérant  $i$  dans la case appropriée d’une nouvelle colonne à droite de  $\theta_{i-1}$ .



Les étoiles indiquent les positions possibles de  $i$ . Les anciennes colonnes, qui contiennent les numéros  $1, \dots, i - 1$ , n’ont pas subi de modifications. Il résulte facilement (1).

(2) On suppose  $i \in L_2(T)$ .

Dans ce cas le tableau  $\theta_i$  est construit à partir de  $\theta_{i-1}$  en insérant  $i$  à l’extrémité de la dernière bande de la ligne appropriée de  $\theta_{i-1}$  et en poussant vers la gauche la première entrée de chaque bande de la seconde partie de  $\theta_{i-1}$  au sens de §18.4.1, de sorte que les colonnes pleines de  $\theta_i$  restent concentrées à la gauche du tableau.



(Éventuellement  $l = 0$ ). Pour que l’algorithme n’échoue pas, il est nécessaire que la case de la dernière colonne de  $\theta_{i-1}$  contenue dans la ligne où  $i$  doit être inséré soit libre.

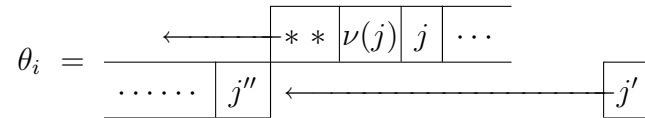
Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Supposons  $j \in L_p(T')$ . Notons  $p' \in \{1, 2\}$  le numéro de la ligne de  $T'$  qui ne contient pas  $j$ . On distingue trois cas.

- ( $\alpha$ ) Supposons tout d'abord qu'une des deux conditions suivantes est validée :
- On a  $\nu(j) \in \{1, \dots, i\}$  et la colonne de  $\theta_{i-1}$  où figure  $\nu(j)$  contient un second numéro, que l'on note  $j'$ .
  - On a  $\nu(j) = \emptyset_p$ , on note alors  $j' = \emptyset_{p'}$ .

Dans les deux cas on a par définition  $\gamma_{i-1}(\nu(j)) = \nu(j')$ . La colonne contenant  $\nu(j)$  n'est pas modifiée en passant de  $\theta_{i-1}$  à  $\theta_i$ . Il est facile de voir que les cases contenant  $j$  et  $\nu(j)$  sont adjacentes dans  $\theta_i$ . Il suit :  $\gamma_i(j) = j'$ . D'où la formule  $\gamma_{i-1}(\nu(j)) = \nu(\gamma_i(j))$ .

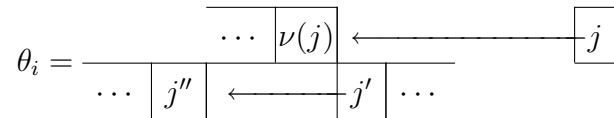
On suppose désormais que les conditions précédentes ne sont plus satisfaites : on a  $\nu(j) \in \{1, \dots, i\}$  et  $j$  n'est pas dans une colonne pleine.

( $\beta$ ) Supposons de plus que  $j$  n'est pas le premier numéro d'une bande et  $j \neq i$ . Autrement dit  $j \notin \{j_1, \dots, j_l, i\}$ , selon les notations du dessin précédent. La situation est illustrée par le dessin suivant :



On a  $j'' = \gamma_{i-1}(\nu(j))$  et  $j'' = \nu(j')$ . En outre  $j$  occupe la même place dans les tableaux  $\theta_i$  et  $\theta_{i-1}$ . Il suit  $j' = \gamma_i(j)$ . On obtient finalement l'égalité  $\gamma_{i-1}(\nu(j)) = \nu(\gamma_i(j))$ .

( $\gamma$ ) Supposons enfin  $j \in \{j_1, \dots, j_l, i\}$ . La situation est la suivante :



On a  $\gamma_{i-1}(\nu(j)) = j'' = \nu(j')$  et  $j' = \gamma_i(j)$ . Il suit  $\gamma_{i-1}(\nu(j)) = \nu(\gamma_i(j))$ .

Dans tous les cas on obtient

$$\gamma_{i-1}(\nu(j)) = \nu(\gamma_i(j)).$$

La démonstration du lemme est complète.  $\square$

18.6.7. *Observation*

Supposons  $i \in L_2(T)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ , il existe  $j' \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $\gamma_{i-1}(j) = \nu(j')$ .

En effet, chaque numéro du tableau  $\theta_{i-1}$ , sauf celui qui est contenu dans la dernière colonne, admet un numéro voisin à sa droite dans  $\theta_i$ . Pour  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ , le numéro  $\gamma_{i-1}(j)$  ne figure pas dans la dernière colonne de  $\theta_i$  puisque  $j$  est toujours strictement à droite de  $\gamma_{i-1}(j)$ . Il existe donc  $j' \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $\gamma_{i-1}(j) = \nu(j')$ .

### 18.7. Drapeau $\mathcal{F}(\phi) \in \mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$ défini par une fonction $\phi : I \subset L_1(T) \rightarrow k$

On se donne une fonction  $\phi : I \rightarrow k$  définie sur un ensemble  $I \subset L_1(T)$ . En s'appuyant sur la forme des tableaux  $\theta_1, \dots, \theta_n$  de l'algorithme, on va construire un drapeau  $\mathcal{F}(\phi)$  sur  $V_\infty$  stable par  $u_\infty$  et dépendant algébriquement de  $\phi$ .

On complète la fonction  $\phi$  en une fonction  $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow k$  en posant  $\phi(i) = 0$  si  $i \notin I$ .

#### 18.7.1. Fonctions associées $\phi^{(i)} : \overline{[1, i]} \rightarrow k$ .

Ces fonctions sont construites par récurrence sur  $i$ .

Pour initialiser la construction on pose  $\phi^{(0)}(\emptyset_1) = \phi^{(0)}(\emptyset_2) = 0$ .

Supposons la construction achevée au rang  $i - 1 \geq 0$ . On pose tout d'abord  $\phi^{(i)}(\emptyset_1) = \phi^{(i)}(\emptyset_2) = 0$ . Puis on distingue deux cas.

- (1) Supposons  $i \in L_1(T)$ . On pose  $\phi^{(i)}(i) = \phi(i)$  et  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(j)$  pour  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ .
- (2) Supposons  $i \in L_2(T)$ . On pose  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(\nu(j))$  pour  $j \in \{1, \dots, i\}$ .

Une première propriété des fonctions  $\phi^{(i)}$  est la suivante.

*Propriété.* Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Supposons que la colonne de  $\theta_i$  contenant  $j$  est pleine (contient deux numéros). Alors on a  $\phi^{(i)}(j) = 0$ .

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Supposons la propriété vraie jusqu'en  $i - 1 \geq 0$ . Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$  contenu dans une colonne pleine de  $\theta_i$ .

(1) Si  $i \in L_1(T)$ , alors  $\theta_i$  est formé en insérant  $i$  dans une nouvelle colonne à droite de  $\theta_{i-1}$ . Il suit  $j \leq i - 1$  et  $j$  est dans une colonne pleine de  $\theta_{i-1}$ . On a par définition  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(j)$ . Par récurrence on obtient  $\phi^{(i)}(j) = 0$ .

(2) Si  $i \in L_2(T)$ , alors on a  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(\nu(j))$ . Si  $\nu(j) \in \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ , alors on obtient  $\phi^{(i)}(j) = 0$ . Sinon, il est clair que le numéro  $\nu(j)$  figure dans une colonne pleine du tableau  $\theta_{i-1}$  et on obtient par récurrence  $\phi^{(i)}(j) = 0$ .

Dans tous les cas on a  $\phi^{(i)}(j) = 0$ .  $\square$

#### 18.7.2. Construction des vecteurs $e_i[j](\phi)$

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On définit des vecteurs  $e_i[j](\phi) \in V_\infty$  ( $j \in \overline{[1, i]}$ ) dépendant algébriquement de  $\phi$ . On procède par induction sur le tableau  $\theta_i$ .

On pose tout d'abord  $e_i[\emptyset_1](\phi) = e[\emptyset_1]$  et  $e_i[\emptyset_2](\phi) = e[\emptyset_2]$ .

Pour  $j \in \{1, \dots, i\}$ , on pose :

$$e_i[j](\phi) = \tilde{u} e_i[\nu(j)](\phi) + \tilde{u} e_i[\gamma_i(j)](\phi).$$

*Observation.* Rappelons que les colonnes pleines du tableau  $\theta_i$  sont concentrées sur la gauche. Soit  $j$  un numéro contenu dans une colonne pleine de  $\theta_i$ . En utilisant la propriété 18.7.1, on montre facilement :  $e_i[j](\phi) = e[j]$ .

La propriété suivante découle facilement de la définition du vecteur  $e_i[j](\phi)$  et de la propriété 18.6.3.

*Propriété.* Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Soit  $q_j^{(i)}$  le numéro de la colonne du tableau  $\theta_i$  qui contient  $j$ . On a  $e_i[j](\phi) \in \ker u^{q_j^{(i)}}$

On montre :

### 18.7.3. LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les vecteurs  $e_i[j](\phi)$  ( $j \in \{1, \dots, i\}$ ) forment une famille libre.

*Démonstration.* Pour simplifier posons ici  $e_i[j] = e_i[j](\phi)$ . On note  $m$  le nombre de colonnes de  $\theta_i$ . Pour  $q \in \{0, \dots, m\}$ , on note  $C_{\leq q}$  l'ensemble des entrées des  $q$  premières colonnes du tableau  $\theta_i$ . On montre la liberté de la famille  $\{e_i[j] : j \in C_{\leq q}\}$  par récurrence sur  $q$ . Pour  $q = m$ , on retrouve l'énoncé du lemme. Le cas  $q = 0$  est trivial.

Supposons établie la liberté de la famille  $\{e_i[j] : j \in C_{\leq q-1}\}$  pour  $q - 1 \geq 0$ . Soit une relation de liaison :

$$0 = \sum_{j \in C_{\leq q}} \lambda_j \cdot e_i[j].$$

On remplace selon la définition du vecteur  $e_i[j]$  :

$$0 = \sum_{j \in C_{\leq q}} (\tilde{u} e_i[\nu(j)] + \tilde{u} e_i[\gamma_i(j)]).$$

On note  $\overline{C}_{\leq q-1} = C_{\leq q-1} \cup \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ . Cette dernière égalité est l'image par  $\tilde{u}$  d'une relation de liaison entre les vecteurs  $e_i[j]$ , pour  $j \in \overline{C}_{\leq q-1}$ . On écrit cette égalité sous la forme :

$$0 = \tilde{u} \sum_{j \in \overline{C}_{\leq q-1}} \tilde{\lambda}_j \cdot e_i[j].$$

Par hypothèse de récurrence, les vecteurs  $e_i[j]$  ( $j \in C_{\leq q-1}$ ) forment une famille libre. On a en outre  $e_i[\emptyset_1] = e[\emptyset_1]$  et  $e_i[\emptyset_2] = \emptyset_2$ . Il suit que la famille  $\{e_i[j] : j \in \overline{C}_{\leq q-1}\}$  est libre. D'autre part l'application  $\tilde{u} : \overline{V}_\infty \rightarrow V_\infty$  est clairement injective. D'où :  $\tilde{\lambda}_j = 0$  pour tout  $j \in \overline{C}_{\leq q-1}$ .

On va déduire  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j \in C_{\leq q}$  en comparant  $\lambda_j$  et  $\lambda_{\nu(j)}$ . Le vecteur  $\tilde{u} e_i[\nu(j)]$  intervient dans la combinaison linéaire définissant le vecteur  $e_i[j]$  dans deux cas seulement :

- si  $j' = j$ , avec coefficient 1,
- si  $\gamma_i(j') = \nu(j)$ , avec coefficient  $\phi^{(i)}(j')$ .

On obtient ainsi :

$$\tilde{\lambda}_{\nu(j)} = \lambda_j + \sum_{\gamma_i(j') = \nu(j)} \phi^{(i)}(j') \cdot \lambda_{j'}$$

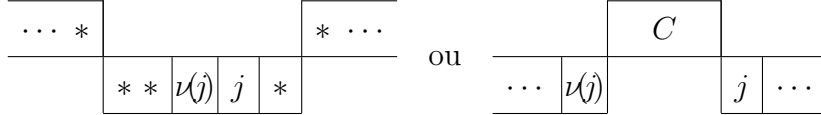
où la somme est prise sur les numéros  $j' \in C_{\leq q}$  vérifiant  $\gamma_i(j') = \nu(j)$ .

Soient  $A_i, B_i$  les sous-ensembles de  $\{1, \dots, i\}$  introduits dans la section 18.4.1. On montre  $\lambda_j = 0$  par induction. L'initialisation est l'étude du cas  $j \in A_i$ .

(1) Supposons  $j \in A_i$ .

Soit  $j' \in C_{\leq q}$  vérifiant  $\gamma_i(j') = \nu(j)$ . Il est clair que  $j'$  est contenu dans une colonne pleine de  $\theta_i$ . D'après la propriété 18.7.1, on a  $\phi^{(i)}(j') = 0$ . Il suit :  $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$ . D'où :  $\lambda_j = 0$ .

(2) Supposons  $j \in B_i$  et supposons établie l'égalité  $\lambda_{j'} = 0$  pour tout numéro  $j'$  situé strictement à gauche de  $j$  dans le tableau  $\theta_i$ . Il y a deux situations, selon que  $j$  est la premier numéro d'une bande, ou non :



(Éventuellement dans le second cas :  $\nu(j) \in A_i \cup \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ .)

Dans le premier cas il n'existe pas  $j' \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $\nu(j) = \gamma_i(j')$ , d'où  $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$ . Il suit  $\lambda_j = 0$ .

Dans le second cas les numéros  $j' \in \{1, \dots, i\}$  vérifiant  $\nu(j) = \gamma_i(j')$  sont exactement les numéros figurant dans la bande  $C$ . Ces numéros sont donc strictement à gauche de la colonne contenant  $j$ . Par hypothèse d'induction, il suit :  $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$ . D'où  $\lambda_j = 0$ .

On a finalement montré  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j \in C_{\leq q}$ . Cela achève le raisonnement par récurrence et la démonstration du lemme.  $\square$

On établit ensuite une propriété inductive liant les vecteurs  $e_i[j](\phi)$  aux vecteurs  $e_{i-1}[j](\phi)$ .

#### 18.7.4. LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

(1) Supposons  $i \in L_1(T)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, i-1\}$  on a l'égalité

$$e_i[j](\phi) = e_{i-1}[j](\phi).$$

(2) Supposons  $i \in L_2(T)$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ , on a l'égalité :

$$e_i[j](\phi) = \tilde{u}(e_{i-1}[\nu(j)](\phi)).$$

*Démonstration.* Pour simplifier les écritures, on pose  $e_i[j] = e_i[j](\phi)$ .

(1) Supposons  $i \in L_1(T)$ . On a alors :

$$\gamma_i(j) = \gamma_{i-1}(j) \quad \text{et} \quad \phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(j) \quad \forall j \in \{1, \dots, i-1\}.$$

Comme ces seules variables interviennent dans la définition inductive des vecteurs  $e_i[j](\phi)$  et  $e_{i-1}[j](\phi)$ , on obtient l'égalité  $e_i[j](\phi) = e_{i-1}[j](\phi)$  pour tout  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ .

(2) On suppose  $i \in L_2(T)$ . Observons tout d'abord que cela implique que la première colonne du tableau  $T_i$  contient deux numéros. En vertu de l'axiome (2L-B), la première colonne de  $\theta_i$  contient également deux numéros.

On montre la formule énoncée par un raisonnement inductif au cours duquel le tableau  $\theta_i$  est parcouru de gauche à droite.

L'initialisation de l'induction est l'étude du cas où  $j \in \{1, \dots, i\}$  appartient à une colonne pleine de  $\theta_i$ . Dans ce cas on a  $\nu(j) \in \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$  ou bien  $\nu(j)$  appartient à une colonne pleine de  $\theta_{i-1}$ . D'après l'observation 18.7.2 on a  $e_i[j] = e[j]$  et  $e_{i-1}[\nu(j)] = e[\nu(j)]$ . L'égalité découle de la propriété 18.6.4.

Soit maintenant un numéro  $j \in \{1, \dots, i\}$  qui figure dans une colonne non-pleine de  $\theta_i$  supposons l'égalité établie pour tout numéro  $j'$  de  $\theta_i$  situé strictement à gauche de la colonne de  $j$ . Puisque la première colonne de  $\theta_i$  est pleine et puisque  $j'$  n'y figure pas, on a  $\nu(j) \notin \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$  et  $\gamma_i(j) \notin \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ , donc  $\nu(j)$  et  $\gamma_i(j)$  sont des numéros de  $\theta_i$  situés strictement à gauche de  $j$  et l'hypothèse de récurrence s'applique. On obtient :

$$\begin{aligned} e_i[j] &= \tilde{u} (e_i[\nu(j)] + \phi^{(i)}(j).e_i[\gamma_i(j)]) \\ &= \tilde{u} (\tilde{u}e_{i-1}[\nu \circ \nu(j)] + \phi^{(i)}(j).\tilde{u}e_{i-1}[\nu \circ \gamma_i(j)]) \\ &= \tilde{u} (\tilde{u}e_{i-1}[\nu(\nu(j))] + \phi^{(i-1)}(\nu(j)).\tilde{u}e_{i-1}[\gamma_{i-1}(\nu(j))]) \\ &= \tilde{u}e_{i-1}[\nu(j)]. \end{aligned}$$

On utilise les définitions des vecteurs  $e_i[j]$  et  $e_{i-1}[\nu(j)]$ , de  $\phi^{(i)}(j)$  et le lemme 18.6.6.(2).

Le raisonnement par induction est achevé.  $\square$

18.7.5. *Définition du drapeau*  $\mathcal{F}(\phi) = (V_0(\phi), V_1(\phi), \dots, V_n(\phi))$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on définit :

$$V_i(\phi) = \langle e_i[j](\phi) : j \in \{1, \dots, i\} \rangle.$$

En outre on pose  $V_0(\phi) = 0$ . Ainsi  $V_i(\phi)$  est un sous-espace vectoriel de  $V_\infty$  de dimension  $i$ , dépendant algébriquement de  $\phi$ . On montre le résultat suivant :

LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On a

$$u_\infty(V_i(\phi)) \subset V_{i-1}(\phi) \subset V_i(\phi) \quad \text{et} \quad V_i(\phi) = V_{i-1}(\phi) \oplus k.e_i[i](\phi).$$

On définit alors

$$\mathcal{F}(\phi) = (V_0(\phi), V_1(\phi), \dots, V_n(\phi))$$

qui, d'après le lemme, est un drapeau sur l'espace  $V_\infty$ , stable par l'endomorphisme  $u_\infty$ . De plus l'application  $\phi \mapsto \mathcal{F}(\phi)$  est algébrique.

*Démonstration du lemme.* D'après le lemme 18.7.3, on a

$$\dim V_{i-1}(\phi) = i - 1 \quad \text{et} \quad \dim V_i(\phi).$$

On traite successivement les deux cas  $i \in L_1(T)$  et  $i \in L_2(T)$ . Pour simplifier les écritures, on pose  $e_i[j] = e_i[j](\phi)$ .

(1) Supposons  $i \in L_1(T)$ .

D'après le lemme 18.7.4, on a  $e_i[j] = e_{i-1}[j]$  pour tout  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ . Il suit :

$$V_{i-1}(\phi) \subset V_i(\phi).$$

Cette inclusion est stricte car les dimensions de  $V_{i-1}(\phi)$  et  $V_i(\phi)$  sont distinctes. D'où nécessairement :  $e_i[i] \notin V_{i-1}(\phi)$ . Il suit l'égalité :

$$V_i(\phi) = V_{i-1}(\phi) \oplus (k.e_i[i]).$$

Pour  $j' \in \{1, \dots, i-1\}$  on a  $u_\infty(\tilde{u}e_i[j']) = e_i[j']$  d'après §18.6.3. On obtient  $u_\infty(\tilde{u}e_i[j']) = e_{i-1}[j'] \in V_{i-1}(\phi)$ . Si  $j' \in \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ , alors on a  $u_\infty(\tilde{u}e_i[j']) = 0$ . On obtient ainsi :  $u_\infty(\tilde{u}e_i[j']) \in V_{i-1}(\phi)$  pour tout  $j' \in \{1, \dots, i-1\} \cup \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ .

Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . On a par définition de  $e_i[j]$  :

$$e_i[j] = \tilde{u}e_i[\nu(j)] + \phi^{(i)}(j).\tilde{u}e_i[\gamma_i(j)].$$

On a  $\nu(j), \gamma_i(j) \in \{1, \dots, i-1\} \cup \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ . D'après l'observation précédente, il suit  $u(e_i[j]) \in V_{i-1}(\phi)$ . D'où finalement l'inclusion :

$$u_\infty(V_i(\phi)) \subset V_{i-1}(\phi).$$

L'étude du cas  $i \in L_1(T)$  est terminée.

(2) Supposons  $i \in L_2(T)$ .

Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$ . D'après le lemme 18.7.4, on a

$$e_i[j] = \tilde{u}e_{i-1}[\nu(j)].$$

Si  $\nu(j) \in \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ , alors on a  $u_\infty(e_i[j]) = 0$ . Sinon on obtient  $u_\infty(e_i[j]) = e_{i-1}[\nu(j)]$  d'après la propriété 18.6.4. Dans tous les cas  $u_\infty(e_i[j]) \in V_{i-1}(\phi)$ . Comme cela est montré pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ , il résulte l'inclusion

$$u_\infty(V_i(\phi)) \subset V_{i-1}(\phi).$$

Comme  $\dim V_i(\phi) = \dim V_{i-1}(\phi) + 1$ , il suffit de montrer l'inclusion  $V_i(\phi) \subset V_{i-1}(\phi) + k.e_i[i]$ . Il résultera l'égalité et  $V_i(\phi) = V_{i-1}(\phi) \oplus k.e_i[i]$  et en particulier l'inclusion  $V_{i-1}(\phi) \subset V_i(\phi)$ .

On montre donc

$$e_i[j] \in V_{i-1}(\phi) + k.e_i[i] \quad \forall j \in \{1, \dots, i-1\}.$$

On discute suivant la place de  $j$  dans le tableau  $\theta_{i-1}$ .

Supposons tout d'abord que  $j$  figure dans une colonne pleine de  $\theta_{i-1}$ . Il résulte que  $j$  figure dans une colonne pleine de  $\theta_i$ . On obtient  $e_i[j] = e[j] = e_{i-1}[j]$  donc en particulier  $e_i[j] \in V_{i-1}(\phi)$ . Ce premier cas est résolu.

Soit maintenant  $j \in \{1, \dots, i-1\}$  qui appartenant à une colonne non-pleine de  $\theta_{i-1}$ .

$$\theta_{i-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdots * & \gamma_{i-1}(j) & \\ \hline \cdots * & j & * \cdots \\ \hline \end{array} \quad \longleftarrow \boxed{j'}$$

Comme l'illustre le dessin il découle de la définition de l'algorithme qu'il existe  $j' \in \{1, \dots, i\}$  vérifiant  $\nu(j') = \gamma_{i-1}(j)$  et qui est déplacé au cours de la  $i$ -ème étape de l'algorithme, lorsque  $\theta_i$  est construit à partir de  $\theta_{i-1}$ . De deux choses l'une : soit  $j'$  est la premier numéro d'une bande de  $\theta_{i-1}$  située strictement à droite de  $j$ , soit  $j' = i$  (lorsque  $j$  figure dans la dernière bande de  $\theta_{i-1}$ ).

On mène un raisonnement par induction consistant à passer en revue les numéros du tableau  $\theta_{i-1}$  de droite à gauche. L'initialisation est l'étude du cas  $j' = i$ , autrement dit du cas où  $j$  figure dans la dernière bande de  $\theta_{i-1}$ . On a immédiatement  $e_i[i] \in V_{i-1}(\phi) + k.e_i[i]$ . Dans l'étude de la transmission de la propriété d'induction on suppose  $j' \in \{1, \dots, i-1\}$ . On a  $e_i[j'] \in V_{i-1}(\phi) + k.e_i[i]$  par hypothèse d'induction.

Dans les deux cas on a  $e_i[j'] \in V_{i-1}(\phi) + k.e_i[i]$ . On traite de manière simultanée les deux phases du raisonnement par induction.

On a (en utilisant §18.7.4) :

$$\begin{aligned} e_{i-1}[j] &= \tilde{u}e_{i-1}[\nu(j)] + \phi^{(i-1)}(j).\tilde{u}e_{i-1}[\gamma_{i-1}(j)] \\ &= \tilde{u}e_i[\nu(j)] + \phi^{(i-1)}(j).\tilde{u}e_{i-1}[\nu(j')] \\ &= e_{i-1}[j] + \phi^{(i-1)}(j).e_i[j']. \end{aligned}$$

Il suit :

$$e_{i-1}[\nu(j)] = e_{i-1}[j] - \phi^{(i-1)}(j).\tilde{u}e_i[j'] \in V_{i-1}(\phi) + k.e_i[i].$$

Cet argument complète le raisonnement par induction et conclut la démonstration du lemme.  $\square$

On conclut l'étude préliminaire de l'espace vectoriel  $V_i(\phi)$  en énonçant cette dernière propriété.

#### 18.7.6. LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pour  $p \in \{1, 2\}$ , on note  $i_p$  le dernier numéro de la  $p$ -ème ligne de  $\theta_i$  ou bien  $i_p = \emptyset_p$  à défaut, si cette ligne ne contient aucun numéro.

(a) Soit  $u_\infty^{-1}(V_i(\phi))$  l'image réciproque du sous-espace  $V_i(\phi) \subset V_\infty$  par l'endomorphisme  $u_\infty : V_\infty \rightarrow V_\infty$ . On a l'égalité :

$$u_\infty^{-1}(V_i(\phi)) = V_i(\phi) + \langle \tilde{u}e_i[i_1](\phi), \tilde{u}e_i[i_2](\phi) \rangle.$$

(b) On a  $V_i(\phi) \cap \langle \tilde{u}e_i[i_1](\phi), \tilde{u}e_i[i_2](\phi) \rangle = 0$ . Les vecteurs  $\tilde{u}e_i[i_1](\phi)$  et  $\tilde{u}e_i[i_2](\phi)$  forment une famille libre.

*Démonstration.* Observons tout d'abord qu'on a clairement  $\dim u_\infty^{-1}(V_i(\phi)) = \dim V_i(\phi) + 2$ . De cette manière le point (b) est conséquence du point (a) et il suffit d'établir le point (a). Pour simplifier l'écriture, on pose  $e_i[j] = e_i[j](\phi)$ .

On a :

$$\begin{aligned} u_\infty^{-1}(V_i(\phi)) &= \langle \tilde{u}e_i[j] : j \in \{1, \dots, i\} \rangle + \ker u \\ &= \langle \tilde{u}e_i[\nu(j)] : j \in \{1, \dots, i\} \rangle + \langle \tilde{u}e_i[i_1](\phi), \tilde{u}e_i[i_2](\phi) \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer :  $\tilde{u}e_i[\nu(j)] \in V_i(\phi) + \langle \tilde{u}e_i[i_1](\phi), \tilde{u}e_i[i_2](\phi) \rangle$  pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ .

On a l'égalité :

$$\tilde{u}e_i[\nu(j)] = e_i[j] - \phi^{(i)}(j).\tilde{u}e_i[\nu(j)].$$



Si  $j$  figure dans une colonne pleine de  $\theta_i$ , alors on a  $\phi^{(i)}(j) = 0$  et la formule précédente donne :  $\tilde{u}e_i[\nu(j)] \in V_i(\phi)$ .

Traitons maintenant le second cas, où la colonne de  $\theta_i$  contenant  $j$  n'est pas pleine. On mène un raisonnement inductif consistant à passer en revue de droite à gauche les numéros  $j$  de  $\theta_i$  figurant seuls dans leurs colonnes.

Si  $\gamma_i(j) \in \{i_1, i_2\}$ , la formule précédente donne

$$\tilde{u}e_i[\nu(j)] \in V_i(\phi) + \langle \tilde{u}e_i[i_1](\phi), \tilde{u}e_i[i_2](\phi) \rangle.$$

Si  $\gamma_i(j) \notin \{i_1, i_2\}$ , il existe  $j' \in \{1, \dots, i\}$  situé strictement à droite de  $j$  dans  $\theta_i$  tel que  $\gamma_i(j) = \nu(j')$ . Par hypothèse d'induction on a

$$\tilde{u}e_i[\gamma_i(j)] = \tilde{u}e_i[\nu(j')] \in V_i(\phi) + \langle \tilde{u}e_i[i_1](\phi), \tilde{u}e_i[i_2](\phi) \rangle.$$

D'après la formule précédente, il suit

$$\tilde{u}e_i[\nu(j)] \in V_i(\phi) + \langle \tilde{u}e_i[i_1](\phi), \tilde{u}e_i[i_2](\phi) \rangle.$$

La preuve est complète.  $\square$

## 18.8. Construction de l'ensemble $\mathcal{W}(T, T')$

On note  $N = \dim \mathcal{B}_u$ . On construit tout d'abord un morphisme de variétés  $\Phi : \mathbb{A}^N \rightarrow \mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$ . D'après le lemme 18.2.1, l'espace affine  $\mathbb{A}^N$  s'identifie à l'ensemble  $k^{I(T, T')}$  des fonctions de  $I(T, T')$  dans  $k$ . On définit alors :

$$\Phi : \phi \in k^{I(T, T')} \mapsto \mathcal{F}(\phi).$$

Rappelons que la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  s'identifie au sous-ensemble fermé de la variété  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  formé par les drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  tels que  $V_n = V$ . On considère ainsi  $\mathcal{B}_u$  comme une sous-variété fermée de  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$ .

On montre :

### 18.8.1. PROPOSITION

- (a) L'image du morphisme  $\Phi : \mathbb{A}^N \rightarrow \mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  est contenu dans  $\mathcal{B}_u$  et est un ouvert de la composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ .
- (b) Le morphisme  $\Phi$  est un isomorphisme sur son image.

On définit alors  $\mathcal{W}(T, T')$  comme l'image du morphisme  $\Phi$ .

En vue de montrer la proposition, on énonce quelques propriétés des vecteurs  $e_i[j](\phi)$  et de l'espace vectoriel  $V_i(\phi)$ , lorsqu'on suppose  $\phi \in k^{I(T, T')}$ .

## 18.8.2. LEMME

Soit  $\phi \in k^{I(T, T')}$ .

(a) On a  $\phi^{(n)}(j) = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

(b) On a  $V_i(\phi) \subset V$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

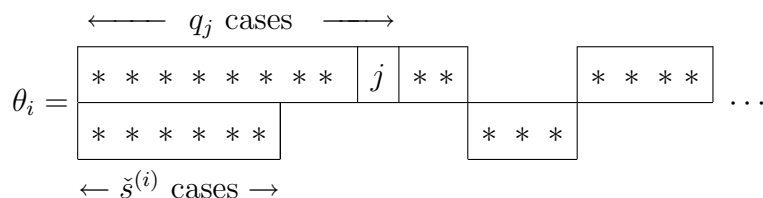
*Démonstration.* Observons que le point (b) découle du point (a). En effet il suit alors  $e_n[j](\phi) = e[j]$  pour tout  $j$ , d'où :  $V_n(\phi) \subset V$ . Puis on obtient :  $V_i(\phi) \subset V$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , en utilisant l'inclusion  $V_i(\phi) \subset V_n(\phi)$ .

Démontrons (a).

Notons  $\theta_i$  désigne le tableau obtenu après la  $i$ -ème étape de l'algorithme de  $T$ -construction de  $T'$ . Comme on suppose que  $T'$  est  $T$ -constructible, on a  $\theta_n = T'$ . Si le numéro  $j$  apparaît dans la seconde ligne de  $T'$ , alors  $j$  figure dans une colonne pleine de  $\theta_n$  et on a  $\phi^{(n)}(j) = 0$  d'après §18.7.1. Il reste à montrer :  $\phi^{(n)}(j) = 0$  pour  $j \in \{1, \dots, n\} \cap L_1(T')$ .

On montre cette propriété au terme d'un raisonnement par récurrence sur  $i$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Rappelons que le tableau  $\theta_i$  est divisé en deux sous-tableaux  $\theta_i[A]$  et  $\theta_i[B]$  (cf. §18.4.1). On note  $s^{(i)}$  et  $\check{s}^{(i)}$  les longueurs des lignes de  $\theta_i[A]$ . Soit  $j \in A_i \cap L_1(T')$ . On note  $q_j$  le numéro de la colonne de  $T'$  contenant  $j$ . En vertu de l'axiome (2L-A), le numéro  $j$  figure également dans la  $q_j$ -ème colonne du tableau  $\theta_i$ .



Rappelons que  $s_{i'}$  et  $\check{s}_{i'}$  désignent les longueurs des lignes du sous-tableau  $T_{|i'}$  et qu'on note  $\widehat{s}_{i'} = s_{i'} - \check{s}_{i'}$  (pour  $i' \in \{1, \dots, n\}$ ) (cf. §18.1.2).

On définit  $\widehat{I}^{(i)}$  comme l'ensemble des numéros  $j \in A_i \cap L_1(T')$  tels qu'il existe  $i' \in I_{\text{mf}}(T, T')$  avec  $i' > i$  et vérifiant

$$q_j - \check{s}_j > \widehat{s}_{i'}.$$

On montre pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$  et tout  $j \in A_i \cap L_1(T')$  :

$$j \notin \widehat{I}^{(i)} \Rightarrow \phi^{(i)}(j) = 0.$$

Observons qu'on a en particulier  $\widehat{I}^{(n)} = \emptyset$ . Ainsi il est suffisant de montrer cette propriété pour terminer de montrer le lemme.

On raisonne par récurrence sur  $i$ , avec initialisation immédiate si  $i = 0$ . Supposons la propriété vraie pour  $i - 1 \geq 0$ . Soit  $j \in L_1(T') \cap A_i$ . Si  $j$  figure dans une colonne pleine de  $\theta_i$ , on obtient  $\phi^{(i)}(j) = 0$  d'après la propriété 18.7.1. Il reste à considérer le cas où la colonne de  $\theta_i$  contenant  $j$  n'est pas pleine. On distingue deux cas.

(1) Supposons  $i \in L_2(T)$ .

La première colonne de  $T_i$  contient alors numéros. D'après (2L-B), il en est de même de la première colonne de  $\theta_i$ . Comme  $j$  ne figure pas dans une colonne pleine de  $\theta_i$ , en particulier  $j$  n'est pas dans la première colonne de  $\theta_i$  et on a  $\nu(j) \in A_{i-1}$  d'après l'observation 18.6.4. Le fait que  $j$  ne figure pas dans une colonne pleine de  $\theta_i$  implique en outre que la première ligne du sous-tableau  $\theta_{i-1}[A]$  est plus longue que la seconde, d'où il suit :  $\check{s}^{(i)} = \check{s}^{(i-1)} + 1$ . On a par ailleurs  $q_{\nu(j)} = q_j - 1$ .

Supposons  $\phi^{(i)}(j) \neq 0$ . Par définition de  $\phi^{(i)}(j)$ , on a  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(\nu(j))$ . D'où :  $\phi^{(i-1)}(\nu(j)) \neq 0$ . Par hypothèse de récurrence on obtient  $\nu(j) \in \widehat{I}^{(i-1)}$  et il existe  $i' \geq i$  tel que  $i' \in I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$  et  $q_{\nu(j)} - \check{s}^{(i-1)} > \widehat{s}_{i'}$ . D'après ce qui précède, on a donc  $q_j - \check{s}^{(i)} > \widehat{s}_{i'}$ . On a d'autre part  $s^{(i)} - \check{s}^{(i)} \geq q_j - \check{s}^{(i)}$  donc  $s^{(i)} - \check{s}^{(i)} > \widehat{s}_{i'} = s^{(i')} - \check{s}^{(i')}$ . Il suit :  $i' > i$ . D'où finalement  $j \in \widehat{I}^{(i)}$ .

(2) Supposons  $i \in L_1(T)$ .

Le fait que  $j$  ne figure pas dans une colonne pleine de  $\theta_i$  implique que la première ligne du sous-tableau  $\theta_i[A]$  est plus longue que la seconde. On en déduit facilement l'égalité :  $\check{s}^{(i)} = \check{s}^{(i-1)}$ .

Supposons tout d'abord  $j \leq i - 1$ . On a  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(j)$ . Si on suppose  $\phi^{(i)}(j) \neq 0$ , alors il suit  $\phi^{(i-1)}(j) \neq 0$  et on obtient  $j \in \widehat{I}^{(i-1)}$  par hypothèse de récurrence. Il existe donc  $i' \geq i$  tel que  $i' \in I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$  et  $q_j - \check{s}^{(i-1)} > \widehat{s}_{i'}$ . On obtient  $q_j - \check{s}^{(i)} = q_j - \check{s}^{(i-1)} > \widehat{s}_{i'}$ . Comme d'autre part  $s^{(i)} - \check{s}^{(i)} \geq q_j - \check{s}^{(i)}$  et comme  $\widehat{s}_{i'} = s^{(i')} - \check{s}^{(i')}$ , il suit  $i' > i$ . D'où :  $j \in \widehat{I}^{(i)}$ .

Traisons enfin le cas  $j = i$ . On suppose en particulier  $i \in A_i \cap L_1(T')$ , ce qui implique  $B_{i-1} = \emptyset$  (cf. observation 18.6.4) et  $i \in I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ . Rappelons que la fonction  $\phi : I(T, T') \rightarrow k$  a été étendue par zéro en  $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow k$  et qu'on a  $\phi^{(i)}(i) = \phi(i)$ . Si on suppose  $\phi^{(i)}(i) \neq 0$ , alors il suit  $i \in I(T, T')$  et finalement  $i \in \widehat{I}^{(i)}$ , par définition de  $I(T, T')$ .

La démonstration est complète.  $\square$

### 18.8.3. LEMME

Soit  $\phi \in k^{I(T, T')}$  tel que  $\phi(i) \neq 0$  pour tout  $i \in I(T, T')$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pour  $j \in \{1, \dots, i\}$  on note  $q_j^{(i)}$  le numéro de la colonne de  $\theta_i$  qui contient  $j$ . On a :

$$e_i[j](\phi) \in \ker u^{q_j^{(i)}} - \ker u^{q_j^{(i)}-1} \quad \forall j \in \{1, \dots, i\}.$$

*Démonstration.* On montre tout d'abord le fait (F) suivant (sous les hypothèses de l'énoncé) :

$$(F) : \quad \phi^{(i)}(j) \neq 0 \quad \forall j \in B_i.$$

On procède par récurrence sur  $i \geq 0$ . Supposons la propriété vraie jusqu'en  $i - 1$ .

Soit  $j \in B_i$ .

Supposons tout d'abord  $i \in L_1(T)$ . Si  $j \leq i - 1$ , alors on a  $j \in B_{i-1}$  (cf. observation 18.6.4) donc  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(j) \neq 0$ . Traitons le cas  $j = i$ . Si  $i \in B_i$  alors en particulier  $B_i \neq \emptyset$  et  $i \notin I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ . Il suit  $i \in I(T, T')$  et  $\phi^{(i)}(i) = \phi(i) \neq 0$ .

Supposons ensuite  $i \in L_2(T)$ . D'après l'observation 18.6.4, on a  $\nu(j) \in B_{i-1}$ . Par récurrence il suit  $\phi^{(i)}(j) = \phi^{(i-1)}(\nu(j)) \neq 0$ .

Le fait (F) est établi.

Pour alléger l'écriture, on pose  $e_i[j] = e_i[j](\phi)$ .

D'après la propriété 18.7.2, on a  $e_i[j] \in \ker u^{q_j^{(i)}}$ . Il reste à montrer  $e_i[j] \notin \ker u^{q_j^{(i)}-1}$ . On raisonne par induction en parcourant le tableau  $\theta_i$  de gauche à droite.

Si  $j$  est contenu dans la première colonne de  $\theta_i$ , alors on a immédiatement  $e_i[j] \notin \ker u^{q_j^{(i)}-1}$  car ce noyau est trivial. Traitons ensuite le cas où  $q_j^{(i)} > 1$  et où  $\nu(j), \gamma_i(j) \notin \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$  figurent dans la même colonne de  $\theta_i$ , qui est nécessairement la  $(q_j^{(i)} - 1)$ -ème. On a alors  $e_i[\nu(j)] = e[\nu(j)]$  et  $e_i[\gamma_i(j)] = e[\gamma_i(j)]$ . Il suit facilement  $e_i[j] \notin \ker u^{q_j^{(i)}-1}$ .

Supposons maintenant  $j$  tel que  $q^{(i)}(j) > 1$  et tel que  $\nu(j)$  et  $\gamma_i(j)$  ne figurent pas dans la même colonne de  $\theta_i$ . En particulier  $j$  est le seul numéro dans sa colonne de  $\theta_i$ . Par induction on suppose  $e^{(i)}[j'] \notin \ker u^{q_{j'}^{(i)}-1}$  pour  $q_{j'}^{(i)} < q_j^{(i)}$ .

Supposons d'abord.  $j \in A_i$ . Alors  $\nu(j)$  est un numéro de la  $(q^{(i)}(j) - 1)$ -ème colonne de  $\theta_i$ , contrairement à  $\gamma_i(j)$  par hypothèse. On a donc :

$$\tilde{u}e_i[\nu(j)] \notin \ker u^{q_j^{(i)}-1} \text{ et } \tilde{u}e_i[\gamma_i(j)] \in \ker u^{q_j^{(i)}-1}.$$

Par définition de  $e_i[j]$ , il suit  $e_i[j] \notin \ker u^{(i)}$ .

Supposons enfin  $j \in B_i$ . La  $(q^{(i)}(j) - 1)$ -ème colonne de  $\theta_i$  contient soit  $\nu(j)$ , soit  $\gamma_i(j)$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \tilde{u}e_i[\nu(j)] \notin \ker u^{q_j^{(i)}-1} \text{ et } \tilde{u}e_i[\gamma_i(j)] \in \ker u^{q_j^{(i)}-1} \\ \text{ou bien } \tilde{u}e_i[\nu(j)] \in \ker u^{q_j^{(i)}-1} \text{ et } \tilde{u}e_i[\gamma_i(j)] \notin \ker u^{q_j^{(i)}-1}. \end{aligned}$$

Par définition de  $e_i[j]$  et en utilisant le fait - déjà établi - que  $\phi^{(i)}(j) \neq 0$ , il suit  $e_i[j] \notin \ker u^{q_j^{(i)}-1}$ .

La démonstration est complète.  $\square$

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition 18.8.1.

#### 18.8.4. Démonstration de la proposition 18.8.1

Notons  $\mathcal{W} \subset \mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}(V_\infty)$  l'image de l'application algébrique  $\Phi$ . On montre successivement :

- (1) Le sous-ensemble  $\mathcal{W} \subset \mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  est localement fermé et l'application  $\Phi$  est un isomorphisme sur  $\mathcal{W}$ .
- (2) Le sous-ensemble  $\mathcal{W}$  est contenu dans la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ .
- (3) Il existe un ouvert  $\Omega$  de  $\mathcal{W}$  tel que  $\Omega \subset \mathcal{B}_u^T$ .

Les points (1), (2) et (3) impliquent que  $\mathcal{W}(T, T')$  est un ouvert de  $K^T$ .

(1) Soit  $i \in \{0, \dots, n\}$ . On note  $I^{(i)}(T, T') = I(T, T') \cap \{1, \dots, i\}$ . Rappelons qu'on note  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(i)}$  comme l'ensemble des drapeaux partiels  $\mathcal{F} = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_i)$  sur  $V_\infty$  avec  $\dim V_j = j$  et  $u_\infty(V_j) \subset V_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Puis on définit l'application

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)} : k^{I^{(i)}(T, T')} &\rightarrow \mathcal{B}_{u_\infty}^{(i)} \\ \phi &\mapsto (V_0(\phi), \dots, V_i(\phi)). \end{aligned}$$

L'application  $\Phi^{(i)}$  est algébrique. On note de plus  $\mathcal{W}^{(i)}$  l'image de l'application  $\Phi^{(i)}$ . On a bien sûr  $\Phi^{(n)} = \Phi$  et  $\mathcal{W}^{(n)} = \mathcal{W}$ .

On montre par récurrence sur  $i \geq 0$  que le sous-ensemble  $\mathcal{W}^{(i)} \subset \mathcal{B}_{u_\infty}^{(i)}$  est localement fermé et que l'application  $\Phi^{(i)}$  est un isomorphisme sur  $\mathcal{W}^{(i)}$ .

Supposons la propriété établie au rang  $i - 1 \geq 0$ . Soit

$$\begin{aligned} \Psi^{(i)} : \mathcal{W}^{(i-1)} &\rightarrow k^{I^{(i)}(T, T')} \\ \mathcal{F} &\mapsto \psi_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

l'isomorphisme inverse de  $\Phi^{(i)}$ . Si  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_i)$  est un drapeau partiel, on note  $\mathcal{F}_\perp = (V_0, \dots, V_{i-1})$  le sous-drapeau.

Notons  $i_1$  et  $i_2$  les derniers numéros de chaque ligne du tableau  $\theta_{i-1}$ . On suppose  $i \in L_p(T')$  pour  $p \in \{1, 2\}$ . D'où  $\nu(i) = i_p$ . Soit  $p' \in \{1, 2\}$  le numéro de l'autre ligne de  $T'$ . Le prolongement par zéro de  $\phi$  en une fonction définie sur  $\{1, \dots, n\}$  est encore noté  $\phi$ . Décrivons l'ensemble  $\mathcal{W}^{(i)}$ .

*Observation préliminaire.* Supposons tout d'abord  $i \in L_1(T)$ . On a alors :  $i_{p'} = \gamma_i(i)$  et  $\phi_i^{(i)} = \phi(i)$ . Il suit (en utilisant le lemme 18.7.4) :

$$\begin{aligned} e_i[i](\phi) &= \tilde{u}e_i[i_p](\phi) + \phi(i).\tilde{u}e_i[i_{p'}](\phi) \\ &\quad \tilde{u}e_{i-1}[i_p](\phi) + \phi(i).\tilde{u}e_{i-1}[i_{p'}](\phi). \end{aligned}$$

Si  $i \in L_1(T) - I(T, T')$ , alors on a  $\phi(i) = 0$ , d'où :

$$e_i[i](\phi) = \tilde{u}e_{i-1}[i_p](\phi).$$

Supposons ensuite  $i \in L_2(T)$ . D'après le lemme 18.7.4 on a

$$e_i[i](\phi) = \tilde{u}e_{i-1}[i_p](\phi).$$

On distingue deux cas.

(1.a) Supposons  $i \notin I(T, T')$ . D'où :  $I^{(i)}(T, T') = I^{(i-1)}(T, T')$ .

On note

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \left\{ \mathcal{F} = (W_0, \dots, W_i) : \mathcal{F}_\perp \in \mathcal{W}^{(i-1)} \text{ et } W_i = W_{i-1} \oplus k.(\tilde{u}e_{i-1}[i_p](\psi_{\mathcal{F}_\perp})) \right\}.$$

D'après l'observation préliminaire et le lemme 18.7.5, on a :

- d'une part l'inclusion  $\mathcal{W}^{(i)} \subset \widetilde{\mathcal{W}}$ ,
- d'autre part, pour tout  $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{W}}$ , l'égalité  $\mathcal{F} = \Phi^{(i)}(\psi_{\mathcal{F}_\perp})$ .

Il suit :  $\mathcal{W}^{(i)} = \widetilde{\mathcal{W}}$ . L'ensemble  $\mathcal{W}^{(i)}$  est donc localement fermé dans  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(i)}$  et les applications  $\Phi^{(i)}$  et

$$\Psi : \mathcal{W}^{(i)} \rightarrow k^{I^{(i-1)}(T, T')} = k^{I^{(i)}(T, T')}, \mathcal{F} \mapsto \psi_{\mathcal{F}_\uparrow}$$

sont des isomorphismes, inverse l'un de l'autre.

(1.b) Supposons  $i \in I(T, T')$ . D'où  $I^{(i)}(T, T') = I^{(i-1)}(T, T') \cup \{i\}$ .

On note

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}} = \left\{ \mathcal{F} = (W_0, \dots, W_i) : \mathcal{F}_\uparrow \in \mathcal{W}^{(i-1)}, W_i \neq W_{i-1} \oplus k \cdot (\widetilde{u}e_{i-1}[i_{p'}](\psi_{\mathcal{F}_\uparrow})) \right. \\ \left. \text{et } W_i \subset W_{i-1} \oplus \langle \widetilde{u}e_{i-1}[i_1](\psi_{\mathcal{F}_\uparrow}), \widetilde{u}e_{i-1}[i_2](\psi_{\mathcal{F}_\uparrow}) \rangle \right\}. \end{aligned}$$

D'après l'observation préliminaire et les lemmes 18.7.5 et 18.7.6, l'ensemble  $\widetilde{\mathcal{W}}$  est localement fermé dans  $\mathcal{B}_{u_\infty}^{(i)}$  et on a l'inclusion  $\mathcal{W}^{(i)} \subset \widetilde{\mathcal{W}}$ . Soit  $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{W}}$ . Posons  $\psi = \psi_{\mathcal{F}_\uparrow}$ . D'après le lemme 18.7.6 il existe  $\zeta \in k$  unique et dépendant algébriquement de  $\mathcal{F}$  tel que

$$\widetilde{u}e_{i-1}[i_p](\psi) + \zeta \cdot \widetilde{u}e_{i-1}[i_{p'}](\psi) \in W_i.$$

Soit  $\psi_{\mathcal{F}} : I^{(i)}(T, T') \rightarrow k$  l'application définie par  $\psi_{\mathcal{F}}(j) = \psi(j)$  pour  $j \leq i-1$  et  $\psi_{\mathcal{F}}(i) = \zeta$ . D'après l'observation préliminaire et le lemme 18.7.5, on a  $\mathcal{F} = \Phi^{(i)}(\psi_{\mathcal{F}})$ . Il suit :  $\mathcal{W}^{(i)} = \widetilde{\mathcal{W}}$ . Le sous-ensemble  $\mathcal{W}^{(i)} \subset \mathcal{B}_{u_\infty}^{(i)}$  est donc localement fermé et les applications  $\Phi^{(i)}$  et

$$\Psi : \mathcal{W}^{(i)} \rightarrow k^{I^{(i)}(T, T')}, \mathcal{F} \mapsto \psi_{\mathcal{F}}$$

sont des isomorphismes, inverse l'un de l'autre.

La démonstration de l'assertion (1) est complète.

L'assertion (2) découle du lemme 18.8.2.

(3) Soit  $\Omega \subset k^{I(T, T')}$  le sous-ensemble formé par les fonctions  $\phi : I(T, T') \rightarrow k$  vérifiant  $\phi(i) \neq 0$  pour tout  $i \in I(T, T')$ . Son image  $\Phi(\Omega)$  par  $\Phi$  forme alors un ouvert non-vide de  $\mathcal{W}$ . Rappelons que  $s_i$  désigne la longueur de la première ligne du sous-tableau  $T_{|i}$ . D'après le lemme 18.8.3 et l'axiome (2L-B), on a pour tout  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \Phi(\Omega)$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$V_i \subset \ker u^{s_i} \quad \text{et} \quad V_i \not\subset \ker u^{s_i-1}.$$

Il résulte facilement :  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u^T$ .

Cet argument conclut la preuve de l'assertion (3). La démonstration de la proposition est désormais complète.  $\square$

On conclut cette sous-section par une dernière observation, qui sera utile par la suite.

18.8.5. *Observation*

(a) Soit  $\phi \in k^{I(T, T')}$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Supposons  $j \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $\phi^{(i)}(j) \neq 0$ . Alors il existe  $j' \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\gamma_i(j) = \nu(j')$ .

(b) Soit  $i \in I(T, T')$  Il existe  $j' > i$  tel que  $\gamma_i(i) = \nu(j')$ .

*Démonstration.* (a) Supposons par l'absurde  $i' \in L_1(T)$  pour tout  $i' > i$ . Alors on a  $\phi^{(i')}(j) = \phi^{(i)}(j) \neq 0$ . Cela contredit le lemme 18.8.2.(a). Il existe donc  $i' > i$  tel que  $i' \in L_2(T)$ .

Supposons  $i'$  minimal pour cette propriété. On a donc encore  $\gamma_{i'-1}(j) = \gamma_i(j)$ . D'après l'observation 18.6.7 il existe  $j' \in \{1, \dots, i'\}$  tel que  $\nu(j') = \gamma_i(j)$ .

(b) On fixe  $\phi \in k^{I(T, T')}$  tel que  $\phi^{(i')} \neq 0$  pour tout  $i' \in I(T, T')$ . On suppose  $i \in I(T, T')$  donc en particulier  $i \in L_1(T)$ . Par définition on a  $\phi^{(i)}(i) = \phi(i) \neq 0$ . D'après le point (a) il existe  $j' \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\gamma_i(i) = \nu(j')$ . Observons que  $i$  est l'unique numéro de la dernière colonne de  $\theta_i$ . Ainsi  $\gamma_i(i)$  est le dernier numéro de la ligne de  $\theta_i$  qui ne contient pas  $i$ . Le numéro  $j'$  ne figure donc pas dans le tableau  $\theta_i$ , autrement dit on a  $j' > i$ .  $\square$

18.9. Étude de l'intersection  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$ 

L'ensemble  $\mathcal{W}(T, T')$  satisfait aux points (1) et (2) du lemme 18.2.2. Il reste à établir qu'il satisfait aux points (3) et (4) du lemme, alors le lemme 18.2.2 sera démontré. Commençons par quelques rappels et posons quelques notations.

18.9.1. *Rappels préliminaires à propos de la cellule de Schubert*

Rappelons que la cellule de Shimomura  $S_u(T')$  associée à  $T'$  s'obtient en intersectant la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  avec une cellule de Schubert. Le tableau  $T'$  est une numérotation des cases de  $Y$  et lui correspond la bijection  $\alpha_{T'} : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$  qui envoie  $i$  sur la case de  $Y$  portant le numéro  $i$  dans  $T'$ . La bijection  $\alpha_{T'}$  définit une cellule de Schubert  $S_{\alpha_{T'}} \subset \mathcal{B}$  (cf. §7.1.2). Par commodité on note  $S(T') = S_{\alpha_{T'}}$ . On a (cf. §7.1.5) :

$$S_u(T') = S(T') \cap \mathcal{B}_u.$$

Rappelons quelques caractéristiques de la cellule de Schubert  $S(T') \subset \mathcal{B}$ . Dans §7.1.1 on a défini un ordre  $\leq$  sur  $|Y|$ , l'ensemble des cases du diagramme  $Y$ . Lorsque, comme ici, le diagramme  $Y$  a deux lignes, les cases sont ordonnées ainsi :

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & \vdots & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline & \vdots & 7 & 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on pose

$$I_i = \{j \in \{i+1, \dots, n\} : \alpha_{T'}(j) > \alpha_{T'}(i)\}$$

$$\text{et } \bar{I}_i = \{j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_{T'}(j) > \alpha_{T'}(i)\}.$$

*Exemple.* Supposons

$$T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}$$

On a par exemple  $I_3 = I_4 = \emptyset$ ,  $\bar{I}_3 = \{1, 2\}$  et  $\bar{I}_4 = \{1, 2, 3\}$ .

On a  $I_5 = \{6\}$  et  $\bar{I}_5 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

On a d'autre part  $I_8 = \{9\}$  et  $\bar{I}_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ .

On caractérise les drapeaux contenus dans la cellule  $S(T')$  en termes de bases adaptées. Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}$ . On dit qu'une base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $V$  est adaptée à  $\mathcal{F}$  si le sous-espace  $V_i$  est engendré par les  $i$  premiers vecteurs de la base, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Propriété 1.* Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Le drapeau  $\mathcal{F}$  est contenu dans la cellule  $S(T')$ .

(b) Le drapeau  $\mathcal{F}$  admet une base adaptée  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  telle que :

$$\eta_i - e[i] \in \langle e[j] : j \in \bar{I}_i \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

(c) Le drapeau  $\mathcal{F}$  admet une base adaptée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  telle que :

$$\varepsilon_i - e[i] \in \langle e[j] : j \in I_i \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Observons que la base  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est unique. Plus précisément : pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le vecteur  $\varepsilon_i$  est unique pour les propriétés :

$$V_i = V_{i-1} \oplus (k \cdot \varepsilon_i) \quad \text{et} \quad \varepsilon_i - e[i] \in \langle e[j] : j \in I_i \rangle.$$

Il existe des scalaires  $\zeta_{i,j}(\mathcal{F})$  (pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in I_i$ ) tels que

$$\varepsilon_i - e[i] = \sum_{j \in I_i} \zeta_{i,j}(\mathcal{F}) e[j] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Les fonctions coordonnées  $\zeta_{i,j} : S(T') \rightarrow \mathbb{A}^1$  (pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in I_i$ ) ainsi obtenues sont algébriques et leur produit est un isomorphisme de la cellule  $S(T')$  sur un espace affine.

Soit  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  une base adaptée à  $\mathcal{F}$  satisfaisant la condition du point (b) de la propriété ci-dessus. La base  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  n'est pas unique. Il existe des scalaires  $\bar{\zeta}_{i,j}$  (pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in I_i$ ) tels que

$$\eta_i - e[i] = \sum_{j \in \bar{I}_i} \bar{\zeta}_{i,j} e[j] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Les coordonnées  $\zeta_{i,j}(\mathcal{F})$  s'obtiennent en fonction des scalaires  $\bar{\zeta}_{i,j}$  selon la règle suivante.



*Propriété 2.* Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in I_i$ . On a :

$$\zeta_{i,j}(\mathcal{F}) = \bar{\zeta}_{i,j} + P_{i,j}$$

où  $P_{i,j}$  est un polynôme en :

- $\bar{\zeta}_{i,i'}$  pour  $i' \in \{1, \dots, i-1\}$  tel que  $i' \in \bar{I}_i$  et  $j \in \bar{I}_{i'}$ ,
- $\bar{\zeta}_{i',j'}$  pour  $i' \in \{1, \dots, i-1\}$  et  $j' \in \bar{I}_{i'}$ .

*Démonstration.* Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit une combinaison linéaire :

$$\eta = e[i] + \sum_{j \in \bar{I}_i} \bar{\zeta}_j e[j].$$

Il suffit de montrer l'assertion suivante : "si  $\eta \in V_i$ , alors on a pour tout  $j \in \bar{I}_j$  :

$$\zeta_{i,j} = \bar{\zeta}_j + P_j$$

où  $P_j$  est un polynôme en :  $\bar{\zeta}_{i'}$  (pour  $i' \in \{1, \dots, i-1\} \cap \bar{I}_i$  tel que  $j \in \bar{I}_{i'}$ ) et  $\bar{\zeta}_{i',j'}$  (pour  $i' \in \{1, \dots, i-1\}$  et  $j' \in \bar{I}_{i'}$ )." On prend ensuite  $\eta = \eta_i$  et on obtient la propriété.

On montre l'assertion par induction sur l'ensemble

$$I(\eta) = \{i' \in \bar{I}_i - I_i : \bar{\zeta}_{i'} \neq 0\}.$$

Si cet ensemble est vide, alors on a par unicité  $\eta = \varepsilon_i$  et  $\zeta_{i,j} = \bar{\zeta}_j$  pour tout  $j \in \bar{I}_i$ .

Supposons qu'il existe  $i' \in I(\eta)$  que l'on choisit tel que  $\alpha_{T'}(i')$ , la case du diagramme  $Y$  portant le numéro  $i$  dans  $T'$ , soit maximale (pour l'ordre introduit dans §7.1.1 et rappelé ci-dessus). Il suit :  $I(\eta) \subset \{i'\} \cup \bar{I}_{i'}$ . On a en particulier  $i' \leq i-1$  donc  $\eta_{i'} \in V_i$ . Le vecteur  $\eta - \bar{\zeta}_{i'} \cdot \eta_{i'}$  est encore contenu dans  $V_i$ . Ce vecteur a la forme suivante :

$$\eta - \bar{\zeta}_{i'} \cdot \eta_{i'} = e[i] - \bar{\zeta}_{i'} \cdot \eta_{i'} = \sum_{j \in \bar{I}_{i'}} (\bar{\zeta}_j - \bar{\zeta}_{i'} \bar{\zeta}_{i',j}) \cdot e[j] + \sum_{j \in \bar{I}_i - \bar{I}_{i'}} \bar{\zeta}_j \cdot e[j].$$

On a  $I(\eta - \bar{\zeta}_{i'} \cdot \eta_{i'}) \subset \bar{I}_{i'}$ . L'hypothèse d'induction s'applique et on obtient la propriété.  $\square$

### 18.9.2. L'ensemble $I(\theta_i)$

On définit un ensemble analogue à  $I(T')$  (cf. §18.1.1) relatif au tableau  $\theta_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Soit  $p \in \{1, 2\}$ . On note  $m_p(j)$  le nombre de numéros de la  $p$ -ème ligne de  $\theta_i$  situés dans les colonnes strictement à gauche de la colonne contenant  $j$ .

On note  $I^+(\theta_i)$  l'ensemble des numéros  $j \in \{1, \dots, i\}$  de la première ligne de  $\theta_i$  (donc de  $T'$ ) tels que  $m_1(j) \geq m_2(j)$ . On note  $I^-(\theta_i)$  l'ensemble des numéros  $j \in \{1, \dots, i\}$  de la seconde ligne de  $\theta_i$  (donc de  $T'$ ) tels que  $m_2(j) > m_1(j)$ . Enfin on pose

$$I(\theta_i) = I^+(\theta_i) \cup I^-(\theta_i).$$

Lorsque le tableau  $T'$  est  $T$ -constructible, comme on le suppose ici - on a  $\theta_n = T'$ . Les ensembles  $I(\theta_n)$  et  $I(T')$  coïncident.

*Exemple.* Supposons

$$\theta_i = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & & & & & 7 & 8 & 9 \\ \hline 3 & & 4 & 5 & 6 & & & & 10 \\ \hline \end{array}$$

On a  $I(\theta_i) = \{1, 2, 6, 9\}$ .

Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $q'_j$  le numéro de la colonne de  $T'$  qui contient  $j$ . On pose par convention  $q'_{\emptyset_1} = q'_{\emptyset_2} = 0$ .

La propriété suivante, qui découle directement des définitions, caractérise les éléments de l'ensemble  $I(\theta_i)$  d'une autre manière et établit une relation entre l'ensemble  $I(\theta_i)$  et l'ensemble  $I(T')$ .

*Propriété.* (1) Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . On a les équivalences suivantes :

$$\text{pour } j \in L_1(\theta_i) : j \in I(\theta_i) \Leftrightarrow q'_{\nu(j)} \geq q'_{\gamma_i(j)},$$

$$\text{pour } j \in L_2(\theta_i) : j \in I(\theta_i) \Leftrightarrow q'_{\nu(j)} > q'_{\gamma_i(j)}.$$

(2) Supposons  $i \in L_1(T)$ . On a  $i \in I(\theta_i) \Leftrightarrow i \in I(T')$ .

Observons que l'ensemble  $I(\theta_i)$  a également un lien avec l'ensemble  $\bar{I}_j$  introduit dans §18.9.1.

*Observation.* Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Supposons qu'il existe  $j' \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\gamma_i(j) = \nu(j')$ . On a l'équivalence

$$j \in I(\theta_i) \Leftrightarrow j' \in \bar{I}_j.$$

En effet cela découle facilement de la propriété précédente.

On montre le lemme suivant :

### 18.9.3. LEMME

Soit une fonction  $\phi : I(T, T') \rightarrow k$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Supposons :  $\phi_{i'} = 0$  pour tout  $i' \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $i' \notin I(T')$ .

(a) Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$ . Si  $j \notin I(\theta_i)$ , alors  $\phi^{(i)}(j) = 0$ .

(b) On a

$$e_i[j](\phi) - e[j] \in \langle e[j'] : j' \in \bar{I}_j \rangle \quad \forall j \in \{1, \dots, i\}.$$

À l'aide du lemme nous montrerons ensuite la proposition :

## 18.9.4. PROPOSITION

(a) Soit une fonction  $\phi : I(T, T') \rightarrow k$ . On a l'équivalence suivante :

$$\mathcal{F}(\phi) \in S_u(T') \Leftrightarrow \phi_i = 0 \quad \forall i \notin I(T').$$

(b) L'application  $k^{I^T(T')} \rightarrow S_u(T')$ ,  $\phi \mapsto \mathcal{F}(\phi)$  est une immersion fermée d'image  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$ .

D'après cette proposition et la proposition 18.8.1, l'ensemble  $\mathcal{W}(T, T')$  défini dans §18.8 satisfait aux conditions du lemme 18.2.2. Le lemme 18.2.2 est donc établi et cela achève la preuve du théorème 18.2.

Il ne reste plus qu'à prouver le lemme 18.9.3 et la proposition 18.9.4.

*Démonstration du lemme.* (a) On montre la propriété par récurrence sur  $i \geq 0$ . Supposons la propriété vraie au rang  $i-1 \geq 0$ . Soit  $j \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $\phi^{(i)}(j) \neq 0$ . Montrons qu'on a  $j \in I(\theta_i)$ .

Rappelons qu'on note  $q'_j$  le numéro de la colonne de  $T'$  contenant  $j$  et qu'on pose par convention  $q'_{\emptyset_1} = q'_{\emptyset_2} = 0$ .

(1) Supposons  $i \in L_1(T)$ .

Supposons d'abord  $j \leq i-1$ . On a alors  $\phi^{(i-1)}(j) = \phi^{(i)}(j) \neq 0$  donc  $j \in I(\theta_{i-1})$  par hypothèse de récurrence. D'autre part on a  $\gamma_i(j) = \gamma_{i-1}(j)$ . D'après la propriété 18.9.2.(1) il suit  $j \in I(\theta_i)$ . Traitons le cas  $j = i$ . On a par définition  $\phi^{(i)}(i) \neq 0$ . Il suit  $i \in I^T(T')$ . En particulier  $i \in I(T')$ . D'après la propriété 18.9.2.(2) on a  $i \in I(\theta_i)$ .

(2) Supposons  $i \in L_2(T)$ .

Comme on suppose  $\phi^{(i)}(j)$ , le numéro  $j$  n'est pas contenu dans une colonne pleine de  $\theta_i$ . Comme  $i \in L_2(T)$ , la première colonne de  $T|_i$  contient deux numéros. D'après (2L-B) la première colonne de  $\theta_i$  est pleine. Il suit :  $\nu(j), \gamma_i(j) \notin \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ .

On a par définition  $\phi^{(i-1)}(\nu(j)) = \phi^{(i)}(j) \neq 0$ . Il suit :  $\nu(j) \in I(\theta_{i-1})$ . On a clairement  $q'_j = q'_{\nu(j)} + 1$ . On a d'autre part (en utilisant §18.6.6.(2)) :

$$q'_{\gamma_i(j)} = q'_{\nu(\gamma_i(j))} + 1 = q'_{\gamma_{i-1}(\nu(j))} + 1.$$

D'après la propriété 18.9.2.(1) on obtient  $j \in I(\theta_i)$ .

Cet argument conclut le raisonnement par récurrence et la démonstration du point (a).

(b) On pose par convention  $\bar{I}_{\emptyset_1} = \bar{I}_{\emptyset_2} = \emptyset$ . Pour alléger l'écriture, on pose  $e_i[j] = e_i[j](\phi)$ .

*Observation.* Soit  $j' \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\nu(j') \in \{\emptyset_1, \emptyset_2, 1, \dots, i\}$ . On a clairement l'implication suivante :

$$e_i[\nu(j')] - e[\nu(j')] \in \langle e[j''] : j'' \in \bar{I}_{\nu(j')} \rangle \Rightarrow \tilde{u}e_i[\nu(j')] - e[j'] \in \langle e[j''] : j'' \in \bar{I}_{j'} \rangle.$$

On montre la propriété par induction en parcourant le tableau de gauche à droite. On initialise l'induction pour  $j \in \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$ . Dans le cas général supposons

$j \in \{1, \dots, i\}$ . On a par définition :

$$e_i[j] = \tilde{u}e_i[\nu(j)] + \phi^{(i)}(j) \cdot \tilde{u}e_i[\gamma_i(j)].$$

Par hypothèse de récurrence on a

$$e_i[\nu(j)] - e[\nu(j)] \in \langle e[j''] : j'' \in \bar{I}_{\nu(j)} \rangle \text{ et } e_i[\gamma_i(j)] - e[\gamma_i(j)] \in \langle e[j''] : j'' \in \bar{I}_{\gamma_i(j)} \rangle.$$

D'après l'observation on a :

$$\tilde{u}e_i[\nu(j)] - e[j] \in \langle e[j''] : j'' \in \bar{I}_j \rangle.$$

Si  $\phi^{(i)}(j) = 0$ , alors on obtient la propriété en  $j$ .

Supposons maintenant  $\phi^{(i)}(j) \neq 0$ . En combinant le point (a) du lemme aux observations 18.8.5.(a) et 18.9.2, on obtient qu'il existe  $j' \in \bar{I}_j$  tel que  $\gamma_i(j) = \nu(j')$ . On a clairement l'inclusion  $\bar{I}_{j'} \subset \bar{I}_j$ . D'après l'observation ci-dessus, on obtient

$$\tilde{u}e_i[\gamma_i(j)] - e[j'] \in \langle e[j''] : j'' \in \bar{I}_j \rangle.$$

Il suit :

$$e_i[j] - e[j] \in \langle e[j''] : j'' \in \bar{I}_j \rangle.$$

La propriété est donc vraie en  $j$ .

La démonstration est complète.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* En combinant l'observation 18.8.5.(b), la propriété 18.9.2.(2) et l'observation 18.9.2, on fait la remarque suivante :

*Observation préliminaire.* Soit  $i \in I(T, T')$ . On a  $\gamma_i(i) = \nu(j')$  avec  $j' > i$ . On a de plus :  $j' \in \bar{I}_i \Leftrightarrow i \in I(T')$ .

(a) D'après la propriété 18.9.1.1, si le drapeau  $\mathcal{F}(\phi)$  est contenu dans la cellule  $S(T')$ , alors pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a l'inclusion :

$$V_i(\phi) \subset \langle e[j] : j \in \{1, \dots, i\} \cup \bigcup_{i'=1}^i \bar{I}_{i'} \rangle.$$

Supposons qu'il existe  $i \in I(T, T') - I^T(T')$  tel que  $\phi(i) \neq 0$ . On choisit  $i$  minimal pour cette propriété. D'après l'observation préliminaire on a  $\gamma_i(i) = \nu(j')$  pour  $j' > i$  et  $j' \notin \bar{I}_i$ . D'où :  $i \in \bar{I}_{j'}$ .

On a  $\nu(i) \in \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$  ou bien  $\nu(i)$  est le dernier numéro d'une ligne de  $\theta_{i-1}$ . On a  $\gamma_i(i) \in \{\emptyset_1, \emptyset_2\}$  ou bien  $\gamma_i(i)$  est le dernier numéro de l'autre ligne de  $\theta_{i-1}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ , il suit :  $j \in \bar{I}_i$  (si  $j$  est dans la même ligne que  $i$ ) ou  $j \in \bar{I}_{j'}$  (si  $j$  est dans l'autre ligne). D'après ce qui précède, on obtient :  $j \in \bar{I}_{j'}$  pour tout  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ . Il suit :

$$\{1, \dots, i\} \cup \bigcup_{i'=1}^i \bar{I}_{i'} \subset \bar{I}_{j'}.$$

On a ensuite

$$e_i[i](\phi) = \tilde{u}e_i[\nu(i)](\phi) + \phi(i) \cdot \tilde{u}e_i[\gamma_i(i)](\phi)$$

avec  $\phi(i) \neq 0$ . Comme dans la démonstration du lemme précédent on a

$$\tilde{u}e_i[\nu(i)](\phi) - e[i] \in \langle e_j : j \in \bar{I}_i \rangle.$$

On a d'autre part :

$$\tilde{u}e_i[\gamma_i(i)](\phi) = \tilde{u}e_i[\nu(j')](\phi) = e[j'] + v$$

avec  $v \in \langle e_j : j \in \bar{I}_{j'} \rangle$ . Il résulte :  $e_i[i] \notin \langle e[j] : j \in \bar{I}_{j'} \rangle$ . D'où :

$$V_i(\phi) \not\subset \langle e[j] : j \in \bar{I}_{j'} \rangle.$$

Dès lors le drapeau  $\mathcal{F}(\phi)$  n'est pas contenu dans la cellule de Schubert  $S(T')$ .

Soit maintenant  $\phi \in k^{I^T(T')}$ . D'après le lemme 18.9.3.(b) et le lemme 18.7.5, la famille  $(e_1[1](\phi), \dots, e_n[n](\phi))$  est une base de  $V$  adaptée au drapeau  $\mathcal{F}(\phi)$  et qui vérifie :

$$e_i[i](\phi) - e[i] \in \langle e[j] : j \in \bar{I}_i \rangle.$$

D'après la propriété 18.9.1.1, on a  $\mathcal{F}(\phi) \in S(T')$ . D'où  $\mathcal{F}(\phi) \in S_u(T')$ .

On a montré le point (a).

(b) D'après le point (a) on obtient un morphisme de variété algébriques :

$$\Psi : k^{I^T(T')} \rightarrow S(T'), \quad \phi \mapsto \mathcal{F}(\phi)$$

dont l'image est l'intersection  $\mathcal{W}(T, T') \cap S_u(T')$ . D'après §18.9.1, pour  $\phi \in k^{I^T(T')}$ , le drapeau  $\mathcal{F}(\phi)$  admet une unique base adaptée  $(\varepsilon_1(\phi), \dots, \varepsilon_n(\phi))$  vérifiant

$$\varepsilon_i(\phi) - e[i] \in \langle e[j] : j \in I_i \rangle \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Il existe des scalaires (uniques)  $\zeta_{i,j}(\phi)$  (pour  $j \in I_i$ ) tels que

$$\varepsilon_i(\phi) - e[i] = \sum_{j \in I_i} \zeta_{i,j}(\phi) e[j].$$

Les fonctions  $\zeta_{i,j} : k^{I^T(T')} \rightarrow \mathbb{A}^1$  ainsi construites sont des morphismes de variétés algébriques et l'application  $\Psi$  est obtenu comme le produit des fonctions  $\zeta_{i,j}$ .

Fixons  $\phi \in k^{I^T(T')}$  et continuons de considérer la base  $(e_1[1](\phi), \dots, e_n[n](\phi))$ .

Il existe des scalaires  $\bar{\zeta}_{i,j}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \bar{I}_i$ ) tels que

$$e_i[i](\phi) - e[i] = \sum_{j \in \bar{I}_i} \bar{\zeta}_{i,j}(\phi) e[j] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Supposons  $i \in I^T(T')$ . D'après l'observation préliminaire, on a  $\gamma_i(i) = \nu(j_i)$  avec  $j_i \in I_i$ . On a l'égalité :

$$e_i[i](\phi) = \tilde{u}e_i[\nu(i)](\phi) + \phi(i) \cdot \tilde{u}e_i[\nu(j_i)](\phi).$$

D'après le lemme 18.9.3.(b) on a

$$e_i[\nu(j_i)](\phi) - e[\nu(j_i)] \in \langle e[j] : j \in \bar{I}_{\nu(j_i)} \rangle.$$

(Rappelons qu'on a posé  $\bar{I}_{\emptyset_1} = \bar{I}_{\emptyset_2} = \emptyset$ .) Il suit :

$$\tilde{u}e_i[\nu(j_i)](\phi) - e[j_i] \in \langle e[j] : j \in \bar{I}_{j_i} \rangle.$$

D'où on obtient :

$$\bar{\zeta}_{i,j_i}(\phi) - \phi(i) \in k[\phi(i'') : i'' < i]$$

et d'autre part

$$\bar{\zeta}_{i,i'}(\phi) \in k[\phi(i'') : i'' < i] \text{ si } i' \notin \bar{I}_{j_i} \cup \{j_i\}.$$

Pour  $i' < i$  et  $j' \in \bar{I}_{i'}$ , on a par ailleurs clairement :

$$\bar{\zeta}_{i',j'}(\phi) \in k[\phi(i'') : i'' < i].$$

D'après la propriété 18.9.1.2, il résulte :

$$\zeta_{i,j_i}(\phi) - \phi(i) \in k[\phi(i'') : i'' < i].$$

Les applications  $\phi \mapsto \zeta_{i,j_i}(\phi)$  sont polynômiales (car algébriques). D'après ce qui précède, le morphisme d'anneaux

$$\Psi^* : k[z_{i,j} : i \in \{1, \dots, n\}, j \in I_i] \rightarrow k[\phi(i) : i \in I^T(T')], z_{i,j} \mapsto \zeta_{i,j}(\phi)$$

induit par  $\Psi$  est surjectif. Il suit que l'application  $\Psi$  est une immersion fermée.

La démonstration est complète.  $\square$

## Chapitre 19 . CALCUL DE LA DIMENSION D'UNE INTERSECTION DE COMPOSANTES DANS LE CAS DEUX-LIGNES

Le diagramme  $Y = Y(u)$  est toujours supposé de type deux-lignes. Dans ce chapitre on se donne  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}(Y)$  des tableaux standards qui définissent des composantes  $K^{T_1}, \dots, K^{T_m} \subset \mathcal{B}_u$ . Le but de ce chapitre est de calculer la dimension de l'intersection de ces composantes.

D'après le lemme 12.1.2 et le théorème 14.2, l'intersection  $K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  est non-vide si et seulement si il existe un tableau standard qui est  $(T_1, \dots, T_m)$ -constructible, i.e.  $T_l$ -constructible pour tout  $l \in \{1, \dots, m\}$ .

Le calcul de la dimension de l'intersection  $K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  provient alors des trois faits suivants :

(1) On a l'égalité :

$$\dim K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m} = \text{Max}_T \dim S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$$

où le maximum est pris pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  parcourant l'ensemble des tableaux standards  $(T_1, \dots, T_m)$ -constructibles.

(2) Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard  $(T_1, \dots, T_m)$ -constructible. L'intersection  $S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  est isomorphe à un espace affine  $\mathbb{A}^d$ .

(3) La dimension de  $S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  est solution d'un problème d'algèbre linéaire élémentaire.

On établit ces trois faits, mais non l'un après l'autre. Tout d'abord sous l'hypothèse de (2) (dont la démonstration interviendra plus tard) on établit la proposition suivante, dont (1) découle facilement.

### 19.1. PROPOSITION

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  un tableau lignes-standard  $(T_1, \dots, T_m)$  constructible. Soit  $T = {}^S T'$  la rectification standard de  $T'$ . Les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  et  $\mathcal{F}_T$  sont contenus dans  $K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  et on a :

$$\dim S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m} \leq \dim S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}.$$

*Démonstration.* On a  $\mathcal{F}_{T'} \in K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  d'après §14.2. D'après la proposition 5.4.1, le drapeau  $\mathcal{F}_T$  est contenu dans la fermeture de l'orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$  pour l'action du centralisateur de  $u$ . Il suit  $\mathcal{F}_T \in K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$ . D'autre part, par semi-continuité de la dimension de l'espace tangent, on a :

$$\dim T_{\mathcal{F}_{T'}}(K^T \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}) \leq \dim T_{\mathcal{F}_T}(K^T \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m})$$

où  $K^T$  est la composante irréductible associée à  $T$ . Comme  $S_u(T') \subset K^T$  (cf. §7.1.6) et comme d'autre part il découle de §12.1.3 que  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans toutes les composantes irréductibles de  $S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$ , on obtient :

$$\dim S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m} \leq \dim T_{\mathcal{F}_{T'}}(K^T \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}).$$

Comme  $S_u(T)$  est ouvert dans  $K^T$  (cf. remarque 7.2.2) et comme on suppose l'intersection  $S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  isomorphe à un espace affine, on obtient l'égalité

$$\dim S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m} = \dim T_{\mathcal{F}_T}(K^T \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}).$$

La démonstration est complète.  $\square$

Présentons maintenant le problème d'algèbre linéaire élémentaire, dont on verra ensuite qu'il est lié au calcul de la dimension  $\dim S_u(T) \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$ , comme annoncé au début de ce chapitre.

## 19.2. Calcul de la dimension d'une intersection finie de sous-espaces vectoriels définis par des familles d'ensembles localement inductives

### 19.2.1. Position du problème. Définition du nombre $\delta(X; \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$

Les données du problème sont :

- $X$  un ensemble fini,
- $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$  des familles de sous-ensembles de  $X$

(où on appelle *famille de sous-ensembles de  $X$*  un sous-ensemble  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ .)

On considère le  $k$ -espace vectoriel  $V(X)$  généré par  $X$  et une base  $(e_x)_{x \in X}$ . Pour un sous-ensemble  $A \subset X$ , on note

$$e_A = \sum_{x \in A} e_x.$$

Pour  $l \in \{1, \dots, m\}$ , on pose

$$V(\mathcal{A}_l) = \langle e_A : A \in \mathcal{A}_l \rangle.$$

Le problème consiste à calculer le nombre :

$$\delta(X; \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m) = \dim \bigcap_{l=1}^m V(\mathcal{A}_l).$$

On s'intéresse plus particulièrement au cas où les familles  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \subset \mathcal{P}(X)$  sont localement inductives.

*Famille localement inductive.* Une famille  $\mathcal{A}$  de sous-ensembles de  $X$  est dite *localement inductive* lorsque, pour tous  $A, A' \in \mathcal{A}$ , on a l'équivalence suivante :

$$A \cap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow A \subset A' \text{ ou } A' \subset A.$$



*Résolution du problème dans le cas où les familles  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$  sont localement inductives.*

On note  $X^+ = X \cup \{\infty\}$ . Soit  $\mathcal{A}$  une famille localement inductive de sous-ensembles de  $X$ . On pose  $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \cup \{X^+\}$ . De cette manière, pour  $x \in X^+$ , il existe un ensemble  $A(x) \in \mathcal{A}^+$  minimal tel que  $x \in A(x)$ . Si on note  $\mathcal{A}^+(x)$  la sous-famille formée par les ensembles  $A \in \mathcal{A}^+$  contenant  $x$ , alors l'ensemble  $A(x)$  est donné par la formule :

$$A(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}^+(x)} A.$$

On définit une relation d'équivalence sur  $X^+$  en posant :

$$x \sim_{\mathcal{A}} x' \text{ si } A(x) = A(x').$$

Soient  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$  des familles localement inductive de sous-ensembles de  $X$ . Chaque famille définit une relation d'équivalence  $\sim_{\mathcal{A}_i}$  sur l'ensemble  $X^+$ . Soit  $\sim$  la relation d'équivalence engendrée par les relations  $\sim_{\mathcal{A}_i}$  : on écrit  $x \sim x'$  s'il existe une suite  $x = x_0, x_1, \dots, x_r = x'$  et des indices  $l_1, \dots, l_r \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $x_{p-1} \sim_{l_p} x_p$  pour tout  $p \in \{1, \dots, m\}$ .

On montre :

#### 19.2.2. PROPOSITION

*Si les familles  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \subset \mathcal{P}(X)$  sont localement inductives, on a l'égalité :*

$$\delta(X; \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m) = \#(X^+ / \sim) - 1.$$

*où  $\sim$  est la réunion des relations d'équivalences sur  $X^+ = X \cup \{\infty\}$  induites par les familles  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ .*

On utilise le lemme :

#### LEMME

*Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  une famille localement inductive. Le sous-espace  $V(\mathcal{A}) \subset V(X)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires  $\sum_{x \in X} \zeta_x \cdot e_x$  caractérisées par les équations, pour tous  $x, x' \in X$  :*

$$\begin{cases} \zeta_x = \zeta_{x'} & \text{si } x \sim_{\mathcal{A}} x', \\ \zeta_x = 0 & \text{si } x \sim_{\mathcal{A}} \infty. \end{cases}$$

*Démonstration du lemme.* On établit séparément les deux inclusions. Supposons  $\sum_{x \in X} \zeta_x \cdot e_x \in V(\mathcal{A})$  et vérifions que les équations formulées ci-dessus sont satisfaites. Il existe des scalaires  $\xi_A$  ( $A \in \mathcal{A}$ ) tels qu'on ait l'égalité :

$$\sum_{x \in X} \zeta_x \cdot e_x = \sum_{A \in \mathcal{A}} \xi_A \cdot e_A.$$

Si  $x \sim_{\mathcal{A}} \infty$ , il résulte  $\zeta_x = 0$ . On pose  $\zeta_{X^+} = 0$  par convention. On a pour tout  $x$  :

$$\zeta_x = \sum_{A \in \mathcal{A}^+(x)} \xi_A.$$

Supposons  $x \sim_{\mathcal{A}} y$ . On a clairement l'égalité  $\mathcal{A}^+(x) = \mathcal{A}^+(y)$ . D'où :  $\zeta_x = \zeta_y$ .

Inversement, supposons que les scalaires  $\zeta_x$  ( $x \in X$ ) satisfont aux équations écrites ci-dessus. Pour  $x \in X^+$  on note  $C_{\mathcal{A}}(x) \subset X$  la classe d'équivalence de  $x$  pour la relation  $\sim_{\mathcal{A}}$ . Soit  $X'$  un ensemble de représentants des classes d'équivalences autres que  $C_{\mathcal{A}}(\infty)$ . D'où :

$$X^+ = C_{\mathcal{A}}(\infty) \sqcup \bigsqcup_{x \in X'} C_{\mathcal{A}}(x).$$

On a :

$$\sum_{x \in X} \zeta_x \cdot e_x = \sum_{x \in X'} \zeta_x \cdot \sum_{y \in C_{\mathcal{A}}(\infty)} e_y = \sum_{x \in X'} \zeta_x \cdot e_{C_{\mathcal{A}}(x)}.$$

Il suffit de montrer :  $e_{C_{\mathcal{A}}(x)} \in V(\mathcal{A})$  pour tout  $x \in X - C_{\mathcal{A}}(\infty)$ .

On a clairement l'inclusion  $C_{\mathcal{A}}(x) \subset A(x)$ . Pour  $y \in A(x) - C_{\mathcal{A}}(x)$ , on a  $A(y) \subset A(x) - C_{\mathcal{A}}(x)$ . Pour  $y \in A(x) - C_{\mathcal{A}}(x)$  il existe  $A'(y) \in \mathcal{A}$  maximal tel que  $y \in A(y) \subset A(x) - C_{\mathcal{A}}(x)$ . Soit  $Y' \subset A(x) - C_{\mathcal{A}}(x)$  tel que les ensembles  $A'(y)$  ( $y \in Y'$ ) sont deux-à-deux distincts. Par inductivité locale, les ensembles  $A'(y)$  sont disjoints deux-à-deux et on obtient

$$A(x) = C_{\mathcal{A}}(x) \sqcup \bigsqcup_{y \in Y'} A'(y).$$

D'où :

$$e_{C_{\mathcal{A}}(x)} = e_{A(x)} - \sum_{y \in Y'} e_{A'(y)} \in V(\mathcal{A}).$$

La démonstration est complète.  $\square$

*Démonstration de la proposition.* D'après le lemme, l'intersection  $\bigcap_{l=1}^m V(\mathcal{A}_l)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires  $\sum_{x \in X} \zeta_x \cdot e_x$  caractérisées par les équations (pour tous  $x, y \in X$ ) :

$$\begin{cases} \zeta_x = \zeta_y & \text{si } x \sim y, \\ \zeta_x = 0 & \text{si } x \sim \infty. \end{cases}$$

La formule de l'énoncé découle facilement de cette propriété.  $\square$

Attention! Désormais les tableaux standards constructibles que l'on considère sont notés  $T'$  (la lettre  $T$  intervenant pour désigner un autre tableau standard, quelconque, non forcément  $(T_1, \dots, T_l)$ -constructible).

Voyons que le calcul de la dimension

$$\dim S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$$

se ramène au problème précédent.

### 19.3. Définition du nombre $d(T'; T_1, \dots, T_m)$

Soit  $T' \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard.

#### 19.3.1. Définition de l'ensemble $I(T')^\epsilon$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $s'_i$  et  $\check{s}'_i$  les longueurs respectives des lignes du sous-tableau  $T'_i$  d'entrées  $1, \dots, i$ . Rappelons qu'on note  $L_p(T')$  l'ensemble des numéros figurant dans la  $p$ -ème ligne de  $T'$  (pour  $p \in \{1, 2\}$ ). Pour un entier  $\epsilon \geq 1$  on définit l'ensemble

$$I(T')^\epsilon = \{i \in L_1(T') : s_i - \check{s}_i \geq \epsilon\}.$$

L'ensemble  $I(T')^\epsilon$  est un ensemble fini d'entiers et est muni de l'ordre naturel entre entiers.

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard, tel que le tableau  $T'$  soit  $T$ -constructible. On associe au couple  $(T, T')$  une famille localement inductive de sous-ensembles de  $I(T')^\epsilon$ .

#### 19.3.2. Famille $\mathcal{A}^\epsilon(T, T') = \{A_j^\epsilon(T, T') : j \in I^T(T')^\epsilon\}$ de sous-ensembles de $I(T')^\epsilon$

L'ensemble  $I^T(T')$  a été défini dans la section 18.1.4. Soit  $\epsilon \geq 1$ . On note :

$$I^T(T')^\epsilon = \{j \in I^T(T') : s'_j - \check{s}'_j = \epsilon\}.$$

Soit  $i \in I^T(T')^\epsilon$ . On définit  $A_j^\epsilon(T, T')$  comme l'ensemble des numéros  $i \in I(T')^\epsilon$  vérifiant  $i \geq j$ , tels que :

$$\#L_1(T') \cap \{j, \dots, j'\} > \#L_2(T') \cap \{j, \dots, j'\} \quad \forall j' \in \{j, \dots, i\}.$$

On note  $\mathcal{A}^\epsilon(T, T')$  la famille des ensembles  $A_j^\epsilon(T, T') \subset I(T')^\epsilon$  (pour  $j \in I^T(T')^\epsilon$ ).

*Propriété.* Soit  $\epsilon \geq 1$ .

(a) Soit  $j \in I^T(T')^\epsilon$ . L'ensemble  $A_j^\epsilon(T, T')$  est un intervalle de  $I(T')^\epsilon$  et on a  $j = \inf A_j^\epsilon(T, T')$ .

(b) La famille  $\mathcal{A}^\epsilon(T, T')$  est une famille localement inductive de sous-ensembles de  $I(T')^\epsilon$ .

*Démonstration.* Le point (a) découle des définitions. Montrons le point (b). Soient  $j, j' \in I^T(T')^\epsilon$  tels que  $A_j^\epsilon(T, T') \cap A_{j'}^\epsilon(T, T') \neq \emptyset$ . Supposons  $j < j'$ . Montrons l'inclusion  $A_{j'}^\epsilon(T, T') \subset A_j^\epsilon(T, T')$ .

D'après le point (a), on a  $j' \in A_j^\epsilon(T, T')$ . Soit maintenant  $i' \in A_{j'}^\epsilon(T, T')$ . Comme  $j' \in A_j^\epsilon(T, T')$ , on a immédiatement

$$\#L_1(T') \cap \{j, \dots, h\} > \#L_2(T') \cap \{j, \dots, h\} \quad \forall h \in \{j, \dots, j' - 1\}.$$

Supposons  $h \in \{j', \dots, i'\}$  et établissons la même inégalité. On a en effet :

$$\begin{aligned} \#L_1(T') \cap \{j, \dots, h\} &= \#L_1(T') \cap \{j, \dots, j' - 1\} + \#L_1(T') \cap \{j', \dots, h\} \\ &> \#L_2(T') \cap \{j, \dots, j' - 1\} + \#L_2(T') \cap \{j', \dots, h\} \\ &= \#L_2(T') \cap \{j, \dots, h\}. \end{aligned}$$

On a montré :  $i' \in A_j^\epsilon(T, T')$ . D'où l'inclusion  $A_{j'}^\epsilon(T, T') \subset A_j^\epsilon(T, T')$ .  $\square$

*Remarque.* La réunion des familles  $\mathcal{A}^\epsilon(T, T')$  pour tout  $\epsilon$  n'est plus forcément localement inductive. En effet on peut trouver  $\epsilon = \epsilon'$ ,  $j \in I^T(T')^\epsilon$  et  $j' \in I^T(T')^{\epsilon'}$  tels que les ensembles  $A_j^\epsilon(T, T')$  et  $A_{j'}^{\epsilon'}(T, T')$  se rencontrent sans être imbriqués.

### 19.3.3. Définition des nombres $d^\epsilon(T'; T_1, \dots, T_m)$ et $d(T'; T_1, \dots, T_m)$

Soient  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}(Y)$  des tableaux standards tels que le tableau  $T'$  soit  $T_l$ -constructible pour tout  $l \in \{1, \dots, m\}$ .

Pour tout entier  $\epsilon \geq 1$ , en suivant les notations de §19.2, on pose :

$$d^\epsilon(T'; T_1, \dots, T_m) = \delta(I(T')^\epsilon; \mathcal{A}^\epsilon(T_1, T'), \dots, \mathcal{A}^\epsilon(T_m, T')).$$

Enfin, on pose :

$$d(T'; T_1, \dots, T_m) = \sum_{\epsilon \geq 1} d^\epsilon(T'; T_1, \dots, T_m).$$

### 19.3.4. Exemple

Soient  $T_1, T_2, T_3$  les tableaux suivants :

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 11 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 9 & 11 \\ \hline 3 & 6 & 7 & 8 & 10 & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 11 \\ \hline 3 & 4 & 8 & 9 & 10 & \\ \hline \end{array}$$

Le tableau

$$T' = T^{\min} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \\ \hline \end{array}$$

est  $T_l$ -constructible pour tout  $l \in \{1, 2, 3\}$ . L'intersection  $K^{T_1} \cap K^{T_2} \cap K^{T_3}$  est donc non-vide.

Soit  $X = \{1, 3, 5, 7, 11\}$ . On a  $I(T')^\epsilon = X$  pour tout  $\epsilon \geq 1$ . Soit  $X^+ = X \cup \{\infty\}$ .

Soit  $l \in \{1, 2, 3\}$ . On a  $I^{T_l}(T')^\epsilon = \emptyset$  pour  $\epsilon \neq 1$  et  $I^{T_l}(T')^1 = I^{T_l}(T')$ . Il suit :  $d^\epsilon(T'; T_1, \dots, T_m) = 0$  si  $\epsilon \neq 1$  et donc  $d(T'; T_1, \dots, T_m) = d^1(T'; T_1, \dots, T_m)$ .

On note  $\mathcal{A}_l = \{A_j^1(T_l, T') : j \in I^{T_l}(T')\}$ . Suivant les notations de §19.2, soit  $\sim_{\mathcal{A}_l}$  la relation d'équivalence induite par  $\mathcal{A}_l$  sur l'ensemble  $X^+$  et soit  $\sim$  la relation d'équivalence obtenue comme réunion de  $\sim_{\mathcal{A}_1}, \sim_{\mathcal{A}_2}$  et  $\sim_{\mathcal{A}_3}$ .

On trouve  $I^{T_1}(T') = \{1, 3\}$  et  $\mathcal{A}_1 = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{9\}\}$ . Les classes d'équivalence de la relation  $\sim_{\mathcal{A}_1}$  sont donc les sous-ensembles  $\{1\}, \{3, 5, 7\}, \{9\}, \{11, \infty\}$ .

On trouve  $I^{T_2}(T') = \{1, 5, 9\}$  et  $\mathcal{A}_2 = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{5\}, \{9\}\}$ . Les classes de la relation d'équivalence  $\sim_{\mathcal{A}_2}$  sont  $\{1, 3, 7\}, \{5\}, \{9\}, \{11, \infty\}$ .

On a  $I^{T_3}(T') = \{1, 5, 7\}$  et  $\mathcal{A}_3 = \{\{1, 3\}, \{5, 7, 9\}, \{7\}\}$ . Les classes de la relation d'équivalence  $\sim_{\mathcal{A}_3}$  sont  $\{1, 3\}, \{5, 9\}, \{7\}, \{11, \infty\}$ .

Finalement la relation  $\sim$  induit une partition de l'ensemble  $X^+$  en deux classes d'équivalence :

$$X^+ = \{1, 3, 5, 7, 9\} \sqcup \{11, \infty\}.$$

D'après la proposition 19.2.2, il suit :

$$d(T'; T_1, \dots, T_m) = 1.$$

Le nombre  $d(T'; T_1, \dots, T_m)$  ainsi défini est la dimension de l'intersection  $S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$ , comme l'énonce la proposition suivante :

#### 19.4. PROPOSITION

Soient  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}(Y)$ . Soit  $T' \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard  $(T_1, \dots, T_m)$ -constructible. L'intersection  $S_u(T') \cap K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m}$  est non-vide et est isomorphe à l'espace affine de dimension  $d(T'; T_1, \dots, T_m)$ .

Des propositions 19.4 et 19.1 il résulte finalement le théorème suivant :

#### 19.5. THÉORÈME

Soit  $Y = Y(u)$  de type deux-lignes. Soient  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}(Y)$  des tableaux standards définissant des composantes irréductibles  $K^{T_1}, \dots, K^{T_m}$  de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ . Si l'intersection  $K^{T_1}, \dots, K^{T_m}$  est non-vide, alors sa dimension est donnée par la formule

$$\dim K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m} = \text{Max}_{T'} d(T'; T_1, \dots, T_m)$$

où le maximum est pris pour  $T'$  parcourant l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y$  qui sont  $T_l$ -constructibles pour tout  $l \in \{1, \dots, m\}$ .

##### 19.5.1. Exemple

Soient  $T', T_1, T_2, T_3$  les tableaux de l'exemple précédent. Le tableau  $T'$  est l'unique tableau standard constructible relativement à  $T_1, T_2$  et  $T_3$ . D'après le théorème et l'exemple 19.3.4, on obtient

$$\dim K^{T_1} \cap K^{T_2} \cap K^{T_3} = 1.$$

Il reste à démontrer la proposition 19.4. C'est l'objet du reste de ce chapitre.

#### 19.6. Démonstration de la proposition 19.4

L'intersection de la cellule  $S_u(T')$  avec la composante irréductible  $K^T$  est un sous-ensemble de  $S_u(T')$  que nous allons décrire en plusieurs étapes.

##### 19.6.1. Cellule de Schubert $\widehat{S}(T') \subset \mathcal{B}^{(n)}$

Rappelons qu'on note  $s$  et  $\check{s}$  les longueurs des lignes de  $T'$ . On a fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$ , une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$  (cf. §4.5.2). Si  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $x_i \in |Y|$  la case de  $Y$  qui porte le numéro  $i$  dans  $T'$  et on pose  $e[i] = e_{x_i}$ .

Soit  $V_\infty$  l'espace vectoriel introduit dans §18.6.2, de dimension infinie, de base formée par les deux familles infinies de vecteurs  $(v_q)_{q \geq 1}$  et  $(\check{v}_q)_{q \geq 1}$ . L'espace  $V$  s'identifie au sous-espace :

$$V = \langle v_q : 1 \leq q \leq s \rangle \oplus \langle \check{v}_q : 1 \leq q \leq \check{s} \rangle.$$

Si  $i \in \{1, \dots, n\}$  est le  $q$ -ème numéro de la première ligne de  $T'$ , alors on a  $e[i] = v_q$ . Si  $i$  est le  $q$ -ème numéro de la seconde ligne de  $T'$ , alors on a  $e[i] = \check{v}_q$ .

L'endomorphisme  $u : V \rightarrow V$  s'étend en un endomorphisme  $u_\infty : V_\infty \rightarrow V_\infty$  dont l'action sur la base est décrite par la figure suivante :

$$\begin{array}{c} 0 \leftarrow v_1 \leftarrow \cdots \leftarrow v_{q-1} \leftarrow v_q \leftarrow \cdots \\ 0 \leftarrow \check{v}_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \check{v}_{q-1} \leftarrow \check{v}_q \leftarrow \cdots \end{array}$$

On note  $\mathcal{B}^{(n)}$  l'ensemble des drapeaux partiels  $\mathcal{F} = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n)$  dans  $V_\infty$  avec  $\dim V_i = i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . L'ensemble  $\mathcal{B}^{(n)}$  forme une variété projective (de dimension infinie).

Rappelons qu'on note  $s'_i$  et  $\check{s}'_i$  les longueurs respectives des deux lignes du tableau  $T'$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Comme le tableau  $T'$  est supposé standard, on a  $s'_i \geq \check{s}'_i$  pour tout  $i$  et si de surcroît  $i \in L_1(T')$ , alors on a  $s'_i > \check{s}'_i$ .

Pour  $i \in L_1(T')$  observons qu'on a  $e[i] = v_{s'_i}$ . Pour  $\epsilon \in \{1, \dots, s'_i\}$ , on note

$$\check{v}^\epsilon[i] = \check{v}_{s'_i - \epsilon + 1}.$$

Pour  $\epsilon > s'_i$ , on pose par convention  $\check{v}^\epsilon[i] = 0$ .

On note  $\widehat{S}(T')$  l'ensemble des drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}^{(n)}$  admettant une base adaptée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  telle que

$$\begin{array}{l} \varepsilon_i = e[i] \quad \text{si } i \in L_2(T') \\ \text{et } \varepsilon_i - e[i] \in \langle \check{v}^\epsilon[i] : 1 \leq \epsilon \leq s'_i - \check{s}'_i \rangle \quad \text{si } i \in L_1(T'). \end{array}$$

Il existe alors d'uniques scalaires  $\zeta_{i,\epsilon}(\mathcal{F})$  ( $i \in L_1(T')$ ,  $\epsilon \in \{1, \dots, s'_i - \check{s}'_i\}$ ) tels que

$$\varepsilon_i - e[i] = \sum_{\epsilon=1}^{s'_i - \check{s}'_i} \zeta_{i,\epsilon}(\mathcal{F}) \check{v}^\epsilon[i] \quad \forall i \in L_1(T').$$

L'ensemble  $\widehat{S}(T')$  est une sous-variété localement fermée de  $\mathcal{B}^{(n)}$ , de dimension finie. Le produit des fonctions  $\mathcal{F} \mapsto \zeta_{i,\epsilon}$  est un isomorphisme de variétés algébriques de  $\widehat{S}(T')$  vers l'espace affine approprié.

La cellule  $\widehat{S}(T')$  ainsi construite est liée à la cellule de Schubert  $S(T') \subset \mathcal{B}(V)$  associée à  $T'$  (cf. §18.9.1). La variété drapeau s'identifie à la sous-variété fermée des drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}^{(n)}$  tels que  $V_n = V$ . On a alors l'égalité :

$$S(T') = \widehat{S}(T') \cap \mathcal{B}(V).$$

Citons également la propriété (facile) suivante.

*Propriété.* Soit  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}^{(n)}$ . Le drapeau  $\mathcal{F}$  est contenu dans la cellule  $\widehat{S}(T')$  s'il admet une base adaptée  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  vérifiant  $\eta_i = e[i]$  pour  $i \in L_2(T')$  et pour tout  $i \in L_1(T')$  :

$$\eta_i - e[i] = \sum_{\epsilon=1}^{s'_i} \bar{\zeta}_{i,\epsilon} \check{v}^\epsilon[i].$$

pour certains scalaires  $\bar{\zeta}_{i,\epsilon}$ . On a alors  $\zeta_{i,\epsilon}(\mathcal{F}) = \bar{\zeta}_{i,\epsilon}$  pour tout  $\epsilon \in \{1, \dots, s'_i - \check{s}'_i\}$ .

Si  $T \in \mathcal{T}(Y)$  est un tableau standard, alors la composante  $K^T \subset \mathcal{B}_u(V)$  s'identifie naturellement à une sous-variété fermée de  $\mathcal{B}^{(n)}$ . On a clairement les égalités

$$K^T \cap \widehat{S}(T') = K^T \cap S(T') = K^T \cap S_u(T').$$

D'après §18.9.4, le morphisme  $\Phi : k^{I(T, T')} \rightarrow \mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$  se restreint en une immersion fermée  $\Psi : k^{I^T(T')} \rightarrow S(T') \subset \widehat{S}(T')$ . D'après §18.9.4 et §18.2.3, l'intersection  $K^T \cap \widehat{S}(T')$  coïncide précisément avec l'image de  $\Psi$ .

Dans ce qui suit, on caractérise l'intersection  $K^T \cap \widehat{S}(T')$  en décrivant l'image de  $\Psi$  dans la cellule  $\widehat{S}(T')$ .

### 19.6.2. L'ensemble $I(T')^\epsilon$ et les sous-cellules $\widehat{S}(T')^\epsilon$

Les vecteurs  $\check{v}^\epsilon[i]$  (pour  $i \in L_1(T')$  et  $1 \leq \epsilon \leq s'_i - \check{s}'_i$ ) forment une base de la cellule  $\widehat{S}(T')$ , lorsque celle-ci est assimilée à un espace vectoriel. Les fonctions coordonnées  $\zeta_{i, \epsilon}$  sont alors des formes linéaires sur  $\widehat{S}(T')$  et forment la base duale de  $(\check{v}^\epsilon[i])$ .

Pour tout entier  $\epsilon \geq 1$  on définit le sous-espace vectoriel (donc la sous-cellule)  $\widehat{S}(T')^\epsilon \subset \widehat{S}(T')$  :

$$\widehat{S}(T')^\epsilon = \langle \check{v}^\epsilon[i] : 1 \leq i \leq n \rangle.$$

D'où :

$$\widehat{S}(T') = \bigoplus_{\epsilon \geq 1} \widehat{S}(T')^\epsilon.$$

Rappelons qu'on note  $I(T')^\epsilon = \{i \in L_1(T') : s'_i - \check{s}'_i \geq \epsilon\}$  (cf. §19.3). Les vecteurs  $\check{v}^\epsilon[i]$  (pour  $i \in I(T')^\epsilon$ ) forment une base du sous-espace  $\widehat{S}(T')^\epsilon$  et on a

$$\widehat{S}(T')^\epsilon = \text{Spec } k[\zeta_{i, \epsilon} : i \in I(T')^\epsilon].$$

### 19.6.3. L'ensemble $I^T(T')^\epsilon$ et les morphismes $\Phi^\epsilon$

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard. Rappelons que l'ensemble  $I^T(T') \subset L_1(T)$  a été défini dans §18.1.4. Comme  $T'$  est supposé standard, on a clairement l'inclusion  $I^T(T') \subset L_1(T')$ .

Pour un entier  $\epsilon \geq 1$ , on note (cf. §19.3)

$$I^T(T')^\epsilon = \{i \in I^T(T') : s'_i - \check{s}'_i = \epsilon\}.$$

On a donc :

$$I^T(T') = \bigsqcup_{\epsilon \geq 1} I^T(T')^\epsilon.$$

Soit

$$\Psi : k^{I^T(T')} \rightarrow S(T'), \quad \phi \mapsto \mathcal{F}(\phi)$$

l'immersion fermée de la proposition 18.9.4. Par commodité on voit  $\Psi$  comme une immersion fermée de  $k^{I^T(T')}$  vers  $\widehat{S}(T')$ .

Rappelons que  $k^{I^T(T')}$  désigne l'ensemble des fonctions  $\phi : I^T(T') \rightarrow k$ , qui est une variété algébrique naturellement isomorphe à l'espace affine  $\mathbb{A}^{\#I^T(T')}$ . Une fonction  $\phi : I^T(T')^\epsilon \rightarrow k$  s'étend par zéro en une fonction  $\phi : I^T(T') \rightarrow k$ . De cette manière l'ensemble  $k^{I^T(T')^\epsilon}$  s'identifie naturellement à une sous-variété fermée de

$k^{I^T(T')}$ . On note  $\Psi^\epsilon : k^{I^T(T')^\epsilon} \rightarrow \widehat{S}(T')$  la restriction de  $\Psi$  à cette sous-variété fermée. L'application  $\Psi^\epsilon$  est une immersion fermée.

D'autre part la variété  $k^{I^T(T')}$  s'obtient comme le produit des sous-variétés  $k^{I^T(T')^\epsilon}$  et le morphisme  $\Psi$  est le produit des morphismes  $\Psi^\epsilon$ .

On montre :

#### 19.6.4. PROPOSITION

(a) L'application  $\Psi : k^{I^T(T')} \rightarrow \widehat{S}(T')$  est un morphisme d'espaces vectoriels (pour les structures naturelles).

(b) Pour tout entier  $\epsilon \geq 1$ , l'image de  $\Phi^\epsilon$  est contenue dans la sous-cellule  $\widehat{S}(T')^\epsilon$  et coïncide avec le sous-espace engendré par les vecteurs

$$\sum_{i \in A_j^\epsilon(T, T')} \check{v}^\epsilon[i]$$

pour  $j \in I^T(T')^\epsilon$ .

D'après le point (a) de la proposition, l'image de  $\Psi$  est obtenu comme somme directe des images de  $\Psi^\epsilon$ .

La proposition 19.4 résulte alors facilement du point (b) de la proposition. Il suffit donc de montrer ce dernier résultat.

### 19.7. Démonstration de la proposition 19.6.4

#### 19.7.1. Définition des ensembles $J_{h,\epsilon}^{(i)} \subset I^T(T')^\epsilon$

Soient  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $h \in L_1(T')$ . Soit un entier  $\epsilon \geq 1$ . On note  $J_{h,\epsilon}^{(i)}$  l'ensemble des numéros  $j \in I^T(T')^\epsilon$  vérifiant  $j \leq i$  et tels que :

$$\begin{aligned} \#L_1(T') \cap \{h, \dots, h'\} &> \#L_2(T) \cap \{h, \dots, h'\} \quad \forall h' \in \{h, \dots, j-1\}, \\ \text{et } \#L_1(T') \cap \{h, \dots, j\} &> \#L_2(T) \cap \{h, \dots, i\}. \end{aligned}$$

Par définition, l'ensemble  $J_{i,\epsilon}^{(i)} \subset I^T(T')^\epsilon$  possède le lien suivant avec le sous-ensemble  $A_j^\epsilon(T, T') \subset I(T')^\epsilon$  introduit précédemment.

*Propriété 1.* Soient  $i \in I(T')^\epsilon$  et  $j \in I^T(T')^\epsilon$ . On a l'équivalence

$$j \in J_{i,\epsilon}^{(i)} \Leftrightarrow i \in A_j^\epsilon(T, T').$$

Par convention on pose  $J_{\emptyset_1,\epsilon}^{(i)} = J_{\emptyset_2,\epsilon}^{(i)} = \emptyset$  pour tous  $i \geq 0$  et  $\epsilon$ .

Les ensembles  $J_{h,\epsilon}^{(i)}$  possèdent les propriétés inductives suivantes.



## 19.7.2. LEMME

Soit  $\epsilon \geq 1$  et soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

(1) Supposons  $i \in L_1(T)$ . Pour tout  $h \in L_1(T')$  tel que  $h \leq i - 1$ , on a

$$J_{h,\epsilon}^{(i)} = J_{h,\epsilon}^{(i-1)}.$$

On a de plus :

$$J_{i,\epsilon}^{(i)} \cap \{1, \dots, i - 1\} = J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$$

et  $i \in J_{i,\epsilon}^{(i)} \Leftrightarrow i \in I^T(T')^\epsilon$ .

(2) Supposons  $i \in L_2(T)$ . Pour tout  $h \in L_1(T')$  vérifiant  $h \leq i$ , on a

$$J_{h,\epsilon}^{(i)} = J_{\nu(h),\epsilon}^{(i-1)}.$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $i$  avec initialisation immédiate si  $i = 0$ . Supposons la propriété vraie jusqu'en  $i - 1$ .

(1) On suppose  $i \in L_1(T)$ . Soit  $h \leq i - 1$ .

L'égalité  $J_{h,\epsilon}^{(i)} = J_{h,\epsilon}^{(i-1)}$  découle de l'égalité :

$$\#L_2(T) \cap \{j, \dots, i\} = \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i - 1\}.$$

Traitons le cas  $h = i$ .

L'équivalence  $i \in J_{i,\epsilon}^{(i)} \Leftrightarrow i \in I^T(T')^\epsilon$  découle de la définition de  $J_{i,\epsilon}^{(i)}$ . Il reste à montrer l'égalité  $J_{i,\epsilon}^{(i)} \cap \{1, \dots, i - 1\} = J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$ .

Si  $i$  est le premier numéro de la première ligne de  $T'$  - autrement dit si  $\nu(i) = \emptyset_1$ , comme  $T'$  est un tableau standard, alors on a  $i = 1$ . L'égalité  $J_{1,\epsilon}^{(1)} \cap \{1, \dots, 1 - 1\} = J_{\nu(1),\epsilon}^{(1-1)}$  est immédiate.

Supposons désormais  $\nu(i) \in \{1, \dots, i - 1\}$ .

On montre d'abord l'inclusion  $J_{i,\epsilon}^{(i)} \cap \{1, \dots, i - 1\} \subset J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$ .

Soit  $j \in J_{i,\epsilon}^{(i)}$  vérifiant  $j \leq i - 1$ . En particulier  $j \in I^T(T')$ , donc  $j \in L_1(T')$ . Il suit  $j \leq \nu(i)$ . On a immédiatement

$$\#L_1(T') \cap \{j, \dots, j'\} > \#L_2(T) \cap \{j, \dots, j'\} \quad \forall j' \in \{j, \dots, \nu(i) - 1\}.$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \#L_1(T') \cap \{j, \dots, \nu(i)\} &= \#L_1(T') \cap \{j, \dots, i\} - 1 \\ &> \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i - 1\}. \end{aligned}$$

D'où :  $j \in J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$ .

On montre ensuite l'inclusion  $J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)} \subset J_{i,\epsilon}^{(i)} \cap \{1, \dots, i - 1\}$ .

Soit  $j \in J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$ . On a immédiatement

$$\#L_1(T') \cap \{j, \dots, j'\} > \#L_2(T) \cap \{j, \dots, j'\} \quad \forall j' \in \{j, \dots, \nu(i)\}.$$

Soit  $j' \in \{\nu(i) + 1, \dots, i\}$ . On obtient

$$\begin{aligned} \#L_1(T') \cap \{j, \dots, j'\} &= \#L_1(T') \cap \{j, \dots, \nu(i)\} \\ &> \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i - 1\} \\ &= \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i\}. \end{aligned}$$

Il suit facilement :  $j \in J_{i,\epsilon}^{(i)}$ . Cet argument conclut la démonstration du point (1).

(2) On suppose  $i \in L_2(T)$ .

Montrons l'inclusion  $J_{h,\epsilon}^{(i)} \subset J_{\nu(h),\epsilon}^{(i-1)}$ .

Observons d'abord qu'on a  $h \notin J_{h,\epsilon}^{(i)}$  car  $\#\{h, h\} \cap L_1(T') = 1 \leq \#\{h, i\} \cap L_2(T)$ .

Soit  $j \in J_{h,\epsilon}^{(i)}$ . Comme  $j < h$  et comme  $j \in L_1(T')$ , on obtient  $j \leq \nu(h)$ . On a a fortiori

$$\#L_1(T') \cap \{j, \dots, j'\} > \#L_2(T) \cap \{j, \dots, j'\} \quad \forall j' \in \{j, \dots, \nu(h)\}.$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \#L_1(T') \cap \{j, \dots, \nu(h)\} &= \#L_1(T') \cap \{j, \dots, h\} - 1 \\ &> \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i\} - 1 \\ &= \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i - 1\}. \end{aligned}$$

Il suit  $j \in J_{\nu(h),\epsilon}^{(i-1)}$ .

Montrons ensuite l'inclusion  $J_{\nu(h),\epsilon}^{(i-1)} \subset J_{h,\epsilon}^{(i)}$ .

Soit  $j \in J_{\nu(h),\epsilon}^{(i-1)}$ . On a immédiatement  $j \leq h$  et

$$\#L_1(T') \cap \{j, \dots, j'\} > \#L_2(T) \cap \{j, \dots, j'\} \quad \forall j' \in \{j, \dots, \nu(j)\}.$$

Pour  $j' \in \{\nu(h) + 1, \dots, h - 1\}$ , on a les relations

$$\begin{aligned} \#L_1(T') \cap \{j, \dots, j'\} &= \#L_1(T') \cap \{j, \dots, \nu(h)\} \\ &> \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i - 1\} \\ &\geq \#L_2(T) \cap \{j, \dots, j'\}. \end{aligned}$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned} \#L_1(T') \cap \{j, \dots, h\} &= \#L_1(T') \cap \{j, \dots, \nu(h)\} + 1 \\ &> \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i - 1\} + 1 \\ &= \#L_2(T) \cap \{j, \dots, i\}. \end{aligned}$$

La démonstration est complète.  $\square$

Soit maintenant  $\phi \in k^{IT(T')}$ . Considérons le drapeau  $\mathcal{F}(\phi) = (V_0(\phi), \dots, V_n(\phi))$  et les vecteurs  $e_i[j](\phi)$ . Rappelons que les vecteurs  $e_i[i]$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) forment une base adaptée au drapeau  $\mathcal{F}(\phi)$ . (cf. §18.7).

D'après la proposition 18.9.4, le drapeau  $\mathcal{F}(\phi)$  est contenu dans la cellule  $\widehat{S}(T')$ . Il existe d'unique scalaires  $\zeta_{i,\epsilon}(\phi)$  (pour  $i \in L_1(T')$  et  $1 \leq \epsilon \leq s'_i - \check{s}'_i$ ) tels que les vecteurs

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= e[i] \quad \text{pour } i \in L_2(T') \\ \text{et } \varepsilon_i &= e[i] + \sum_{\epsilon=1}^{s'_i - \check{s}'_i} \check{v}^\epsilon[i] \quad \text{pour } i \in L_1(T') \end{aligned}$$

forment une base adaptée du drapeau. Les applications  $\phi \mapsto \zeta_{i,\epsilon}(\phi)$  ainsi définies sont algébriques et le morphisme de variétés  $\Psi : k^{T'(T')} \rightarrow \widehat{S}(T')$  est le produit de ces applications.

Nous allons décrire les applications  $\phi \mapsto \zeta_{i,\epsilon}(\phi)$ . Commençons par faire l'observation suivante.

### 19.7.3. Observation

Soient  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $h \in \{1, \dots, i\}$ . Supposons  $h \in L_2(T')$ . Alors on a

$$e_i[h](\phi) = e[h].$$

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $i$  avec initialisation immédiate si  $i = 0$ . Supposons la propriété vraie jusqu'en  $i - 1 \geq 0$ .

(1) Supposons d'abord  $i \in L_1(T)$ . Si  $h \leq i - 1$ , alors on a

$$e_i[h](\phi) = e_{i-1}[h](\phi) = e[h].$$

Traitons le cas  $h = i$ . En particulier on suppose  $i \in L_2(T')$ , donc on a  $\phi(i) = 0$ . Par définition (cf. §18.7.2) :

$$e_i[i](\phi) = \tilde{u}e_i[\nu(i)](\phi) + \phi(i) \cdot \tilde{u}e_i[\gamma_i(i)] = \tilde{u}e_{i-1}[\nu(i)](\phi).$$

Par récurrence, il suit  $e_i[i](\phi) = \tilde{u}e[\nu(i)] = e[i]$ .

(2) Supposons ensuite  $i \in L_2(T)$ . On obtient d'après le lemme 18.7.4 et en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$e_i[h](\phi) = \tilde{u}e_{i-1}[\nu(h)](\phi) = \tilde{u}e[\nu(h)] = e[h].$$

La démonstration est complète.  $\square$

On montre ensuite le lemme :

### 19.7.4. LEMME

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Soit  $h \in \{1, \dots, i\}$ . Supposons  $h \in L_1(T')$ . On a l'égalité

$$e_i[h](\phi) = \sum_{\epsilon \geq 1} \bar{\zeta}_{h,\epsilon}^{(i)} \check{v}^\epsilon[h]$$

où le scalaire  $\bar{\zeta}_{h,\epsilon}^{(i)}$  est donné par la formule

$$\bar{\zeta}^{(i)}_{h,\epsilon} = \sum_{j \in J_{h,\epsilon}^{(i)}} \phi(j).$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $i \geq 0$  avec initialisation triviale si  $i = 0$ . Supposons la propriété vraie jusqu'en  $i - 1 \geq 0$ . Soit  $h \in \{1, \dots, i\}$  tel que  $h \in L_1(T')$ . On utilise les lemmes 18.7.4 et 19.7.2.

(1) Supposons d'abord  $i \in L_1(T)$ . Si  $h < i$ , alors on obtient :

$$e_i[h](\phi) = e_{i-1}[h](\phi) = \sum_{\epsilon \geq 1} \bar{\zeta}_{h,\epsilon}^{(i-1)} \cdot \check{v}^\epsilon[h].$$

On a d'autre part pour tout  $\epsilon \geq 1$  :  $J_{h,\epsilon}^{(i)} = J_{h,\epsilon}^{(i-1)}$ . Il suit :  $\bar{\zeta}_{h,\epsilon}^{(i)} = \bar{\zeta}_{h,\epsilon}^{(i-1)}$ . D'où l'égalité souhaitée.

Traitons ensuite le cas  $h = i$ . On a par définition

$$e_i[i](\phi) = \tilde{u}e_i[\nu(i)](\phi) + \phi(i) \cdot \tilde{u}e_i[\gamma_i(i)](\phi).$$

Le premier terme de la somme se calcule par hypothèse de récurrence :

$$\tilde{u}e_i[\nu(i)](\phi) = \tilde{u}e_{i-1}[\nu(i)](\phi) = \sum_{\epsilon \geq 1} \bar{\zeta}_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)} \cdot \check{v}^\epsilon[i].$$

On a  $\gamma_i(i) \in L_2(T') \cap \{\emptyset_2\}$ . D'après l'observation 19.7.3, on obtient  $e_i[\gamma_i(i)](\phi) = e[\gamma_i(i)]$ . Rappelons que  $s'_i$  et  $\check{s}'_i$  désignent les longueurs des lignes du sous-tableau  $T'_i$ . On a  $\gamma_i(i) = \emptyset_2$  ou bien  $\gamma_i(i)$  est le  $\check{s}'_i$ -ème numéro de la seconde ligne de  $T'$ .

Il suit :  $\tilde{u}e_i[\gamma_i(i)] = \check{v}^{s'_i - \check{s}'_i}[i]$

Supposons  $i \notin I^T(T')$ . On a alors  $\phi(i) = 0$ . Il suit :

$$e_i[i](\phi) = \sum_{\epsilon \geq 1} \bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)} \cdot \check{v}^\epsilon[i]$$

avec  $\bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)} = \bar{\zeta}_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$  pour tout  $\epsilon \geq 1$ . On a d'autre part  $J_{i,\epsilon}^{(i)} = J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$  pour tout  $\epsilon \geq 1$  d'après le lemme 19.7.2. Par l'hypothèse de récurrence, pour tout  $\epsilon \geq 1$ , le scalaire  $\bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)}$  satisfait à la formule de l'énoncé.

Supposons  $i \in I^T(T')$ . On a dans ce cas :

$$e_i[i](\phi) = \sum_{\epsilon \geq 1} \bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)} \cdot \check{v}^\epsilon[i] + \phi(i) \cdot \check{v}^{\epsilon_i}[i]$$

où on a posé  $\epsilon_i = s'_i - \check{s}'_i$ . Il suit :

$$e_i[i](\phi) = \sum_{\epsilon \geq 1} \bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)} \cdot \check{v}^\epsilon[i]$$

avec  $\bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)} = \bar{\zeta}_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)}$  pour  $\epsilon = \epsilon_i$  et  $\bar{\zeta}_{i,\epsilon_i}^{(i)} = \bar{\zeta}_{\nu(i),\epsilon_i}^{(i-1)} + \phi(i)$ .

Le lemme 19.7.2 donne par ailleurs :

$$J_{i,\epsilon}^{(i)} = J_{\nu(i),\epsilon}^{(i-1)} \text{ pour } \epsilon = \epsilon_i \text{ et } J_{i,\epsilon_i}^{(i)} = J_{\nu(i),\epsilon_i}^{(i-1)} \cup \{i\}.$$

Il résulte que, pour tout  $\epsilon \geq 1$ , le scalaire  $\bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)}$  satisfait à la formule de l'énoncé.

(2) Supposons  $i \in L_2(T)$ . D'après le lemme 18.7.4 et l'hypothèse d'induction, on a

$$e_i[h](\phi) = \tilde{u}e_{i-1}[\nu(h)](\phi) = \sum_{\epsilon \geq 1} \bar{\zeta}_{\nu(h),\epsilon}^{(i-1)} \cdot \check{v}^\epsilon[h].$$

Le lemme 19.7.2 donne d'autre part l'égalité  $J_{h,\epsilon}^{(i)} = J_{\nu(h),\epsilon}^{(i-1)}$ . Pour tout  $\epsilon \geq 1$ , le scalaire  $\bar{\zeta}_{i,\epsilon}^{(i)}$  satisfait donc à la formule de l'énoncé.

La démonstration est complète.  $\square$

On peut maintenant prouver la proposition 19.6.4.

19.7.5. *Démonstration de la proposition 19.6.4*

D'après le lemme précédent et la propriété 19.6.1, on obtient :

$$\zeta_{i,\epsilon}(\phi) = \sum_{j \in J_{i,\epsilon}^{(i)}} \phi(j).$$

En particulier le morphisme de variétés algébriques  $\Psi : k^{I^T(T')}$   $\rightarrow$ , qui équivaut au produit des applications  $\phi \mapsto \zeta_{i,\epsilon}(\phi)$ , est linéaire en  $\phi(j)$  ( $j \in I^T(T')$ ). Le point (a) de la proposition en découle.

Fixons  $\epsilon \geq 1$ . Supposons  $\phi \in k^{I^T(T')}$  tel que  $\phi(j) = 0$  pour tout  $j \notin I^T(T')^\epsilon$ . L'élément  $\phi$  correspond à un élément de l'ensemble  $k^{I^T(T')^\epsilon}$  pour l'inclusion naturelle  $k^{I^T(T')^\epsilon} \subset k^{I^T(T')}$ . Si  $\epsilon' \neq \epsilon$ , alors on a  $\phi(j) = 0$  pour tout  $j \in J_{i,\epsilon'}^{(i)}$ , donc  $\zeta_{i,\epsilon'}(\phi) = 0$ . Comme la sous-cellule  $\widehat{S}(T')^\epsilon$  est exactement l'ensemble des zéros des coordonnées  $\zeta_{i,\epsilon'}$  pour  $\epsilon' \neq \epsilon$ , il résulte que l'image de la restriction  $\Psi^\epsilon : k^{I^T(T')^\epsilon} \rightarrow \widehat{S}(T')^\epsilon$  est contenue dans la sous-cellule  $\widehat{S}(T')^\epsilon$ .

Pour  $j \in I^T(T')$ , on note  $\delta_j \in k^{I^T(T')^\epsilon}$  la fonction définie par  $\delta_j(j') = 0$  si  $j \neq j'$  et  $\delta_j(j) = 1$ . Les éléments  $\delta_j$  ( $j \in I^T(T')^\epsilon$ ) forment une base de l'espace vectoriel  $k^{I^T(T')^\epsilon}$ . L'image du morphisme  $\Psi^\epsilon$  est le sous-espace vectoriel de  $\widehat{S}(T')^\epsilon = \langle \check{v}^\epsilon[i] : i \in I(T')^\epsilon \rangle$  engendré par les images des fonctions  $\delta_j$ . Pour  $j \in I^T(T')^\epsilon$ , on a (en utilisant la propriété 19.7.1) :

$$\Psi^\epsilon(\delta_j) = \sum_{i \in I(T')^\epsilon} \sum_{j' \in J_{i,\epsilon}^{(i)}} \delta_j(j') \cdot \check{v}^\epsilon[i] = \sum_{i \in A_j^\epsilon(T,T')} \check{v}^\epsilon[i].$$

La démonstration est complète.  $\square$



*Cinquième partie*

**Composantes des fibres de Springer**  
**dans le cas deux-colonnes.**  
**Critère de singularité**

Dans le cas deux-colonnes, nous montrons que toute composante irréductible de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  s'obtient comme réunion des orbites des points fixes du tore contenus dans la composante, pour l'action du sous-groupe centralisateur de  $u$ . Nous en déduisons une description des composantes. Puis nous établissons une condition suffisante pour qu'une composante irréductible soit singulière.

Cette dernière partie contient quatre chapitres.

Chapitre. 20. ORBITES DE  $\mathcal{B}_u$  SOUS L'ACTION DU CENTRALISATEUR DE  $u$

Chapitre. 21. DIMENSION D'UNE INTERSECTION FINIE DE COMPOSANTES

Chapitre. 22. ÉQUATIONS DES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$

Chapitre. 23. UN CRITÈRE DE SINGULARITÉ

Dans le chapitre 15, nous avons entrepris l'étude des composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  dans le cas où le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. Rappelons tout d'abord ce que nous avons appris au chapitre 15. Une base de Jordan adaptée au diagramme  $Y$  au sens de §4.5.2 est supposée fixée. Soit  $H$  le tore des automorphismes de  $V$  diagonaux dans cette base. Les tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  définissent des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  qui sont les points fixes du tore contenus dans  $\mathcal{B}_u$ . Un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  définit une composante irréductible  $K^T$  de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ . Nous avons caractérisé de deux manières les points fixes contenus dans la composante  $K^T$  (cf. théorème 15.2). Nous avons notamment défini une notion de  $T$ -constructibilité (cf. §15.1) telle que le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$  si et seulement si le tableau  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  est  $T$ -constructible (cf. théorème 15.2).

Poursuivons l'étude des composantes de  $\mathcal{B}_u$  dans le cas deux-colonnes. Contrairement aux cas crochet et deux-lignes étudiés dans la partie précédente, certaines composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  peuvent être singulières. Néanmoins le cas deux-colonnes comporte des spécificités qui en rendent l'étude plus aisée.

L'une d'elles est que, si  $T^{\min}$  désigne le tableau de §4.2.3, alors le drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  est contenu dans toutes les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$  (cf. §5.4.4). En particulier l'intersection d'un nombre fini de composantes est toujours non-vide.

Une autre propriété remarquable a trait aux orbites sous l'action du sous-groupe centralisateur de  $u$ . Dans le chapitre 20 nous montrons que les orbites des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  (pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) sous l'action du groupe  $Z(u)$  des automorphismes qui commutent avec  $u$  recouvrent la variété  $\mathcal{B}_u$ .

L'action de  $Z(u)$  laisse stables les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$ . Chaque composante  $K^T$  ( $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard) est donc obtenue comme la réunion des  $Z(u)$ -orbites des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$ , pour  $T'$  parcourant l'ensemble des tableaux lignes-standards  $T$ -constructibles. On déduit facilement une description de l'intersection d'un nombre fini de composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$ . Puis en calculant la dimension de la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$  on déduit la dimension de cette intersection. Cela est fait dans le chapitre 21.

Dans le chapitre 22, nous déduisons d'autre part des équations permettant de caractériser les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$ .

Enfin dans le chapitre 23 nous proposons un critère de singularité pour les composantes de  $\mathcal{B}_u$  dans le cas deux-colonnes. Nous établissons une condition suffisante de singularité pour la composante  $K^T$ . On définit un ensemble  $\mathcal{A}(Y) \subset \mathcal{T}'(Y)$  composé de tableaux adjacents à  $T^{\min}$ . On montre que, si l'ensemble  $\mathcal{A}(Y)$  contient un nombre trop important de tableaux  $T$ -constructibles, alors la composante  $K^T$  est singulière.

*Références bibliographiques.* Dans [16] N.G.J. Pagnon et A. Melnikov étudient les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_u$  dans le cas deux-colonnes, sous l'angle des variétés orbitales : On fixe un sous-groupe de Borel  $B \subset GL(V)$  dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{b} \subset \text{End}(V)$  contient  $u$ . Soit  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$  la sous-algèbre nilpotente. Soit  $\mathcal{O}_u \subset \text{End}(V)$  l'orbite de  $u$  sous l'action par conjugaison de  $GL(V)$ . Les *variétés orbitales* relatives à  $u$  sont les composantes irréductibles de l'intersection  $\mathcal{O}_u \cap \mathfrak{n}$ . Soit  $G' = \{g \in GL(V) : gug^{-1} \in \mathfrak{n}\}$ . On a les deux isomorphismes :

$$\mathcal{O}_u \cap \mathfrak{n} \cong G'/Z(u) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_u \cong G'/B.$$

Les deux fibrés  $G' \rightarrow \mathcal{O}_u \cap \mathfrak{n}$  et  $G' \rightarrow \mathcal{B}_u$  font correspondre les variétés orbitales et les composantes de  $\mathcal{B}_u$  (cf. [15]).

Dans [14] A. Melnikov montre que, dans le cas deux-colonnes, les variétés orbitales sont réunions finies de  $B$ -orbites. Ce théorème est cousin du résultat évoqué ci-dessus, selon lequel toute  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{B}_u$  contient un point fixe du tore.

Notre critère de singularité est inspiré du théorème de caractérisation des variétés de Schubert singulières de V. Lakshmibai [10].



Chapitre 20 . ORBITES DE  $\mathcal{B}_u$   
 SOUS L'ACTION DU SOUS-GROUPE CENTRALISATEUR DE  $u$   
 DANS LE CAS DEUX-COLONNES

*Rappels.*

On note  $Z(u)$  le groupe des automorphismes de  $V$  qui commutent avec  $u$ . L'action naturelle de  $Z(u)$  sur la variété drapeau  $\mathcal{B}$  laisse stable la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$  et toutes ses composantes. Une composante est donc réunion disjointe de  $Z(u)$ -orbites.

En général les  $Z(u)$ -orbites des points fixes du tore (i.e. des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$ ,  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) ne recouvrent pas entièrement la variété  $\mathcal{B}_u$  (cf. remarque 5.2.3).

Dans le cas deux-colonnes, cependant, nous montrons :

**20.1. PROPOSITION**

*Supposons que le diagramme  $Y = Y(u)$  a (au plus) deux colonnes. Tout drapeau  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u$  est contenu dans la  $Z(u)$ -orbite d'un drapeau de la forme  $\mathcal{F}_{T'}$  (pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard).*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Il existe  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard tel que  $\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u^T$ . Pour  $q \in \{1, 2\}$  on note  $C_q(T)$  l'ensemble des entrées de la seconde colonne de  $T$ .

Soit  $T' \in \mathcal{T}'(T)$  lignes-standard. On note  $\nu_{T'} : C_2(T) \rightarrow C_1(T)$  la fonction qui associe à  $j \in C_2(T) = C_2(T')$  le numéro qui figure à sa gauche dans  $T'$ . D'après le proposition 5.2.1 le drapeau  $\mathcal{F}$  figure dans la  $Z(u)$ -orbite de  $\mathcal{F}_{T'}$  s'il existe des vecteurs  $f[1], \dots, f[n] \in V$  tels que

- pour  $j \in \{0, \dots, n\}$  les vecteurs  $f[1], \dots, f[j]$  forment une base de  $V_j$ ,
- on a  $u(f[j]) = 0$  si  $j \in C_1(T)$  et  $u(f[j]) = f_{\nu_{T'}(j)}$  si  $j \in C_2(T)$ .

Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$  on montre par récurrence qu'il existe une famille de vecteurs  $(f_i[1], \dots, f_i[i])$  et une application  $\nu_i : C_2(T) \cap \{1, \dots, i\} \rightarrow C_1(T) \cap \{1, \dots, i\}$  avec les propriétés suivantes :

- pour  $j \in \{0, \dots, i\}$  les vecteurs  $f_i[1], \dots, f_i[j]$  forment une base de  $V_j$ ,
- si  $j \in C_1(T) \cap \{1, \dots, i\}$ , alors on a  $u(f_i[j]) = 0$ ,
- si  $j \in C_2(T) \cap \{1, \dots, i\}$ , alors on a  $\nu_i(j) < j$  et  $u(f_i[j]) = f_{\nu_i(j)}$ .

Supposons cette construction achevée jusqu'au rang  $n$ . Alors il existe un (unique) tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'_z(T)$  tel que  $\nu_{T'} = \nu_i$  et d'après ce qui précède les drapeaux  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_{T'}$  sont égaux modulo l'action de  $Z(u)$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Supposons la construction achevée au rang  $i - 1$ .

Supposons d'abord  $i \in C_1(T)$ . Il existe donc  $f \in \ker u$  tel que  $V_i = V_{i-1} \oplus k.f$ . On pose  $f_i[i] = f$  et  $f_i[j] = f_{i-1}[j]$  pour  $j \in \{1, \dots, i - 1\}$ . On pose  $\nu_i = \nu_{i-1}$ . La construction est ainsi complète au rang  $i$ .

Supposons ensuite  $i \in C_2(T)$ . Par définition de l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  on obtient  $\text{rang } u|_{V_i} = \text{rang } u|_{V_{i-1}} + 1$ . D'où :  $\dim u(V_i) > \dim u(V_{i-1})$ . On se donne  $f \in V$  tel que  $V_i = V_{i-1} \oplus k.f$ . D'après ce qui précède on a  $u(f) \notin u(V_{i-1})$ .

D'après l'égalité  $\dim V_i \cap \ker u = \#C_1(T|_i) = \#C_1(T|_{i-1})$ , les vecteurs  $f_{i-1}[j]$  (pour  $j \in C_1(T|_i) = C_1(T) \cap \{1, \dots, i-1\}$ ) forment une base de  $V_i \cap \ker u$ . Comme on a  $V_i \cap \ker u \supset u(V_i)$ , il suit  $u(f) \in \langle f_{i-1}[j] : j \in C_1(T|_i) \rangle$ . Il existe donc des scalaires  $\zeta_j \in k$  (pour  $j \in C_1(T|_i)$ ) tels que

$$u(f) = \sum_{j \in C_1(T|_i)} \zeta_j \cdot f_{i-1}[j].$$

On note  $J = C_1(T|_i) - \{\nu_{i-1}(i') : i' \in C_2(T|_{i-1})\}$ . Il suit :

$$u(f) = \sum_{j \in J} \zeta_j \cdot f_{i-1}[j] + \sum_{i' \in C_2(T|_{i-1})} \zeta_{\nu_{i-1}(i')} \cdot u(f_{i-1}[i']).$$

La deuxième somme est contenue dans le sous-espace  $u(V_{i-1})$ . La première somme est donc non-nulle. Soit  $j_0 \in J$  le numéro maximal tel que  $\zeta_{j_0} \neq 0$ . On pose

$$f_i[j_0] = \sum_{j \in J} \zeta_j \cdot f_{i-1}[j].$$

On a  $f_i[j_0] - \zeta_{j_0} \cdot f_{i-1}[j_0] \in V_{j_0-1}$  donc  $V_{j_0-1} + k \cdot f_i[j_0] = V_{j_0-1} + k \cdot f_{i-1}[j_0] = V_{j_0}$ . On pose

$$f_i[i] = \sum_{j \in J} \zeta_j \cdot f_{i-1}[j] = f - \sum_{i' \in C_2(T|_{i-1})} \zeta_{\nu_{i-1}(i')} \cdot u(f_{i-1}[i']).$$

On a ainsi  $u(f_i[i]) = f_i[j_0]$ . Pour  $j \in \{1, \dots, i\} - \{j_0, i\}$  on pose  $f_i[j] = f_{i-1}[j]$ . Enfin on prolonge la fonction  $\nu_{i-1}$  en une fonction  $\nu_i : C_2(T) \cap \{1, \dots, i\} \rightarrow C_1(T) \cap \{1, \dots, i\}$  en posant  $\nu_i(i) = j_0$ . La construction est achevée au rang  $i$ . La démonstration de la proposition est désormais complète.  $\square$

## 20.2. Système de représentants des $Z(u)$ -orbites des points fixes

### 20.2.1. Rappel et notations

Rappelons (cf. §5.3.1)) qu'on note  $\mathcal{T}'_z(Y)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  tels que pour tout  $q \geq 1$  les derniers numéros des lignes de longueur  $q$  de  $T'$  sont dans l'ordre croissant de haut en bas. Pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, on note  $\mathcal{T}'_z(T) = \mathcal{T}'(T) \cap \mathcal{T}'_z(Y)$  (cf. §4.4).

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On note  $\mathcal{T}'(K^T)$  l'ensemble des tableaux  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  qui sont  $T$ -constructibles (cf. §15.1). On pose  $\mathcal{T}'_z(K^T) = \mathcal{T}'_z(Y) \cap \mathcal{T}'(K^T)$

D'après les résultat du chapitre 5, le théorème 15.2 et la proposition 20.1, on a

### 20.2.2. COROLLAIRE

*Supposons que  $Y$  a deux colonnes. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$ . On a les égalités :*

$$\mathcal{B}_u = \bigsqcup_{T' \in \mathcal{T}'_z(Y)} Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} \quad \mathcal{B}_u^T = \bigsqcup_{T' \in \mathcal{T}'_z(T)} Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} \quad \text{et} \quad K^T = \bigsqcup_{T' \in \mathcal{T}'_z(K^T)} Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'}.$$

## Chapitre 21 . CALCUL DE LA DIMENSION D'UNE INTERSECTION DE COMPOSANTES DANS LE CAS DEUX-COLONNES

On suppose que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. Soient  $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}(Y)$  des tableaux standards qui définissent des composantes  $K^{T_1}, \dots, K^{T_m} \subset \mathcal{B}_u$ . D'après §5.4.4, l'intersection entre ces composantes est non-vide. D'après le corollaire 20.2.2, on a l'égalité :

$$K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m} = \bigsqcup_{T' \in \bigcap_{i=1}^m \mathcal{T}'_z(K^{T_i})} Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'}$$

où les ensembles  $\mathcal{T}'_z(K^{T_i})$  ont été définis dans §20.2. Il suit :

$$\dim K^{T_1} \cap \dots \cap K^{T_m} = \text{Max} \{ \dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} : T' \in \mathcal{T}'_z(K^{T_1}) \cap \dots \cap \mathcal{T}'_z(K^{T_m}) \}.$$

Ainsi pour calculer la dimension d'une intersection finie de composantes, il suffit de connaître les dimensions des  $Z(u)$ -orbites des drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  (pour  $T' \in \mathcal{T}'_z(Y)$ ). Nous allons présenter une manière de calculer ces dernières.

### Dimension de la $Z(u)$ -orbite du drapeau $\mathcal{F}_{T'}$ pour $T' \in \mathcal{T}'_z(Y)$ .

Le tableau  $T'$  s'écrit sous la forme :

$$T' = \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline a_{\check{r}} & b_{\check{r}} \\ \hline \vdots & \\ \hline a_r & \\ \hline \end{array}$$

avec  $b_1 < \dots < b_{\check{r}}$  et  $a_{\check{r}+1} < \dots < a_r$ . Pour  $p \in \{1, \dots, \check{r}\}$ , on note

$$A'_p = \{a_{p+1}, \dots, a_r\} \quad \text{et} \quad \gamma(p) = \#\{a \in A'_p : a_p < a < b_p\}.$$

Enfin on pose

$$\gamma(T') = \sum_{p=1}^{\check{r}} \gamma(p).$$

Le but de ce chapitre est de montrer le résultat suivant :

#### 21.1. PROPOSITION

*Soit  $T' \in \mathcal{T}'_z(Y)$  lignes-standard de la forme précédente. La dimension de la  $Z(u)$ -orbite du drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$  est donnée par la formule*

$$\dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} = \dim \mathcal{B}_u - \gamma(T').$$



## 21.2. Orbites maximales

Chaque sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$  (pour  $T \in \mathcal{T}(Y)$ ) est irréductible et stabilisé par  $Z(u)$ , donc il contient une unique  $Z(u)$ -orbite dense. Cette orbite a dimension maximale car  $\dim \mathcal{B}_u^T = \dim \mathcal{B}_u$ . Inversement toute orbite de dimension maximale est dense dans un sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T$ .

Fixons  $T \in \mathcal{T}(Y)$  un tableau standard et déterminons l'orbite dense contenue dans  $\mathcal{B}_u^T$ .

Soit  $T'_T$  le tableau lignes-standard introduit dans §10.4.2. Par construction le tableau  $T'_T$  est contenu dans l'ensemble  $\mathcal{T}'_z(T)$  et il est l'unique tableau de cet ensemble tel que  $\gamma(T'_T) = 0$ .

On montre :

### 21.2.1. LEMME

*Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. La  $Z(u)$ -orbite du drapeau  $\mathcal{F}_{T'_T}$  est l'unique orbite dense du sous-ensemble  $\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u$ .*

*Démonstration.* L'orbite dense de l'ensemble  $\mathcal{B}_u^T$  est commune à la composante  $K^T$ . Il existe  $T' \in \mathcal{T}'_z(Y)$  lignes-standard tel que  $Z(u).\mathcal{F}_{T'}$  soit cette orbite dense. Soient  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . La fonction  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \mapsto Y(u|_{V_j/V_i})$  est constante sur l'orbite  $Z(u).\mathcal{F}_{T'}$ , où elle égale à  $Y_{j/i}(T')$  (cf. §5.1.3 et §9.6.7). D'après §10.2.2, il suit  $Y_{j/i}(T') = Y_{j/i}^T$ . En utilisant §10.4.4, on déduit  $Y_{j/i}(T') = Y_{j/i}(T'_T)$  pour tous  $i, j$ . D'après le lemme 21.2.2, il résulte  $T' = T'_T$ .  $\square$

Le lemme suivant a été invoqué dans la démonstration.

### 21.2.2. LEMME

*Soit  $Y$  un diagramme de Young de forme quelconque. Soient  $T', T'' \in \mathcal{T}'(Y)$ . On a l'égalité  $Y_{j/i}(T') = Y_{j/i}(T'')$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$  si et seulement si les tableaux  $T'$  et  $T''$  sont égaux à permutation des lignes près.*

*Démonstration.* L'implication ( $\Leftarrow$ ) découle de la définition de  $Y_{j/i}(T')$  et  $Y_{j/i}(T'')$ . Montrons l'autre implication. Supposons que les tableaux  $T'$  et  $T''$  ne s'obtiennent pas l'un d'après l'autre en permutant les lignes. Il existe donc un numéro  $j \in \{2, \dots, n\}$  qui admet un numéro  $i'$  à sa gauche dans un des deux tableaux, et figure dans la première colonne de l'autre tableau ou bien y admet un numéro voisin à gauche distinct de  $i'$ . Disons par exemple que  $i'$  est voisin à gauche de  $j$  dans  $T'$  et que  $j$  admet un numéro  $i'' < i'$  à sa gauche dans  $T''$  ou bien figure dans la première colonne de  $T''$  auquel cas on pose  $i'' = 0$ . Dans tous les cas le sous-tableau  $T'_{|j/i''}$  a une ligne de moins que le sous-tableau  $T''_{|j/i''}$ . Les diagrammes  $Y_{j/i''}(T')$  et  $Y_{j/i''}(T'')$  sont donc distincts.

La démonstration est complète.  $\square$

### 21.3. Calcul direct de la dimension des $Z(u)$ -orbites

Fixons un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  (non forcément dans l'ensemble  $\mathcal{T}'_z(Y)$ ). On calcule la dimension de l'orbite  $Z(u).\mathcal{F}_{T'}$ .

Soit  $\text{Fix}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'}) \subset Z(u)$  le sous-groupe des automorphismes de  $Z(u)$  qui fixent le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$ . Les groupes  $Z(u)$  et  $\text{Fix}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'})$  sont des sous-groupes fermés du groupe algébrique  $GL(V)$ . On a l'égalité

$$\dim Z(u).\mathcal{F}_{T'} = \dim Z(u) - \dim \text{Fix}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'}).$$

On note  $\mathcal{Z}(u) \subset \text{End}(V)$  le sous-espace vectoriel des endomorphismes qui commutent avec  $u$ . On note  $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}) \subset \mathcal{Z}(u)$  le sous-espace formée par les endomorphismes qui stabilisent le drapeau  $\mathcal{F}_{T'}$ . On pose  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$ . Chaque morphisme  $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$  vérifie donc  $\varphi(V_i) \subset V_i$  pour tout  $i$ . L'espace  $\mathcal{Z}(u)$  (resp.  $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ ) hérite de sa structure d'espace vectoriel une structure de variété algébrique irréductible dont le groupe  $Z(u)$  (resp.  $\text{Fix}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ ) est une sous-variété ouverte. Il suit :

$$\dim Z(u) = \dim \mathcal{Z}(u) \quad \text{et} \quad \dim \text{Fix}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'}) = \dim \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}).$$

Déterminons les dimensions de l'espace  $\mathcal{Z}(u)$  et du sous-espace  $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ .

#### 21.3.1. Description de l'espace $\mathcal{Z}(u)$

Soient  $r$  et  $\tilde{r}$  les hauteurs respectives des colonnes de  $Y$ . Rappelons qu'on a fixé  $(e_x)_{x \in |Y|}$ , une base de Jordan de  $u$  de forme  $Y$  (cf. §4.5.2). On divise l'ensemble des cases de  $Y$  en trois parties : on note

- $Z'_1$  l'ensemble des cases de la seconde colonne de  $Y$ ,
- $Z_1$  l'ensemble formé par les  $\tilde{r}$  premières cases de la première colonne,
- $Z_2$  l'ensemble des  $r - \tilde{r}$  dernières cases de la première colonne.

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline Z_1 & Z'_1 \\ \hline Z_2 & \\ \hline \end{array}$$

On pose

$$W_1 = \langle e_x : x \in Z_1 \rangle = \text{Im } u \quad W'_1 = \langle e_x : x \in Z'_1 \rangle \quad \text{et} \quad W_2 = \langle e_x : x \in Z_2 \rangle.$$

• *Inclusion linéaire*  $\Psi_1 : \mathcal{L}(W'_1, V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_1(u) \subset \mathcal{Z}(u)$ . Une application linéaire  $\psi : W'_1 \rightarrow V$  s'étend de manière unique en un endomorphisme  $\bar{\psi} : V \rightarrow V$  qui commute avec  $u$  :

- Soient  $(x, x') \in Z_1 \times Z'_1$  un couple de cases adjacentes formant une ligne de  $Y$  de longueur 2. On a  $e_x = u(e_{x'})$  par définition de la base. On pose  $\bar{\psi}(e_x) = u(\psi(e_{x'}))$ .
- Soit  $x \in Z_2$ , on pose  $\bar{\psi}(x) = 0$ .

On construit ainsi une application linéaire  $\Psi_1 : \mathcal{L}(W'_1, V) \rightarrow \mathcal{Z}(u)$ ,  $\psi \mapsto \bar{\psi}$ , qui est injective et a pour image le sous-espace

$$\mathcal{Z}_1(u) = \{ \psi \in \mathcal{Z}(u) : W_2 \subset \ker \psi \}.$$

Cette application  $\Psi_1$  est donc un isomorphisme de  $\mathcal{L}(W'_1, V)$  sur  $\mathcal{Z}_1(u)$ , d'inverse l'application de restriction  $\varphi \in \mathcal{Z}_1(u) \mapsto \varphi|_{W'_1}$ .

• *Inclusion linéaire*  $\Psi_2 : \mathcal{L}(W_2, \ker u) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_2(u) \subset \mathcal{Z}(u)$ . On note  $\pi_2 : V \rightarrow W_2$  la projection parallèlement à  $W_1 \oplus W'_1$ . On définit l'application linéaire  $\Psi_2 : \mathcal{L}(W_2, \ker u) \rightarrow \mathcal{Z}(u)$ ,  $\psi \mapsto \psi \circ \pi_2$ .

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{Z}(u)$ , on a  $\varphi(\ker u) \subset \ker u$  et  $W_2 \subset \ker u$ , d'où :  $\varphi(W_2) \subset \ker u$ . L'application  $\Phi_2 : \mathcal{Z}(u) \rightarrow \mathcal{L}(W_2, \ker u)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi|_{W_2}$  est donc bien définie. La restriction de  $\Phi_2$  au sous-espace

$$\mathcal{Z}_2(u) = \{\varphi \in \mathcal{Z}(u) : W_1 \oplus W'_1 \subset \ker \varphi\}$$

est inverse de  $\Psi_2$ . Ainsi  $\Psi_2$  réalise un isomorphisme de  $\mathcal{L}(W_2, \ker u)$  sur  $\mathcal{Z}_2(u)$ .

• *Dimension de  $\mathcal{Z}(u)$* . On a  $\mathcal{Z}(u) = \mathcal{Z}_1(u) \oplus \mathcal{Z}_2(u)$ . Par conséquent on obtient un isomorphisme

$$\Psi_1 \oplus \Psi_2 : \mathcal{L}(W'_1, V) \oplus \mathcal{L}(W_2, \ker u) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(u).$$

Il suit :

$$\dim \mathcal{Z}(u) = (r + \check{r})\check{r} + r.(r - \check{r}) = r^2 + \check{r}^2.$$

*Remarque.* On retrouve ce résultat en utilisant la formule  $\dim \mathcal{Z}(u) = 2\dim \mathcal{B}_u + n$  établie par N. Spaltenstein (cf. [22], §5.6).

### 21.3.2. Description du sous-espace $\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}) \subset \mathcal{Z}(u)$

Rappelons qu'on a fixé un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $x_i \in |Y|$  la case de  $Y$  portant le numéro  $i$  dans  $T'$  puis on pose  $e[i] = e_{x_i}$ . Soit  $\mathcal{F}_{T'} = (V_0, \dots, V_n)$ . On a pour tout  $i : V_i = \langle e[1], \dots, e[i] \rangle$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{Z}(u)$ . On a  $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$  si et seulement si  $\varphi(e[i]) \in \langle e[j] : 1 \leq j \leq i \rangle$  pour tout  $i$ .

La division en trois parties de l'ensemble des cases du diagramme  $Y$  induit une partition similaire de l'ensemble des entrées du tableau  $T'$ .

- $E'$  l'ensemble des numéros de la seconde colonne de  $Y$ ,
- $E$  l'ensemble formé par les numéros des  $\check{r}$  premières cases de la première colonne,
- $F$  l'ensemble des  $r - \check{r}$  numéros restants de la première colonne.

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline E & E' \\ \hline F & \\ \hline \end{array}$$

On a une fonction  $\nu : E' \rightarrow E$  qui envoie  $i \in E'$  sur son numéro voisin à gauche dans  $T'$ . Cette fonction est bijective d'inverse notée  $\nu^{-1}$ .

On a d'autre part (suivant les notations du paragraphe précédent) :

$$W_1 = \text{Im } u = \langle e[i] : i \in E \rangle \quad W'_1 = \langle e[i] : i \in E' \rangle \quad \text{et} \quad W_2 = \langle e[i] : i \in F \rangle.$$

Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$  on pose

$$E_i = E \cap \{1, \dots, i\} \quad E'_i = E' \cap \{1, \dots, i\} \quad \text{et} \quad F_i = F \cap \{1, \dots, i\}.$$

D'où :

$$W_1 \cap V_i = \langle e[i] : i \in E_i \rangle \quad W'_1 \cap V_i = \langle e[i] : i \in E'_i \rangle \quad \text{et} \quad W_2 \cap V_i = \langle e[i] : i \in F_i \rangle.$$

On a clairement l'égalité

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}) = \mathcal{Z}_1(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}) \oplus \mathcal{Z}_2(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}).$$

Décrivons chacun des deux termes du second membre de cette égalité.

• *Description de l'intersection  $\mathcal{Z}_2(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ .* Soit  $\Psi_2 : \mathcal{L}(W_2, \ker u) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_2(u)$  l'isomorphisme du paragraphe précédent. Soit  $\psi \in \mathcal{L}(W_2, \ker u)$ . On a  $\Psi_2(\psi) \in \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$  si et seulement si  $\psi(e[i]) \in \langle e[j] : j \in E_i \cup F_i \rangle$ . L'application

$$\Psi_2^{-1}(\mathcal{Z}_2(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})) \rightarrow \prod_{i \in F} \ker u \cap V_i, \quad \psi \mapsto (\psi(e[i]))_{i \in F}$$

est donc un isomorphisme. Par conséquent on a l'égalité

$$\dim \mathcal{Z}_2(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}) = \sum_{i \in F} (\#E_i + \#F_i).$$

• *Description de l'intersection  $\mathcal{Z}_1(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ .* Soit  $\Psi_1 : \mathcal{L}(W'_1, V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_2(u)$  l'isomorphisme de la section précédente. Soit  $\psi \in \mathcal{L}(W'_1, V)$ . On note  $\bar{\psi} = \Psi_2(\psi)$  son image. On a donc

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(e[i]) &= \psi(e[i]) && \text{si } i \in E', \\ \bar{\psi}(e[\nu(i)]) &= u \circ \psi(e[i]) && \text{si } i \in E', \\ \text{et } \bar{\psi}(e[i]) &= 0 && \text{si } i \in F. \end{aligned}$$

Pour  $i \in E'$ , on note

$$\widehat{E}'_i = \{j \in E'_i : \nu(j) \leq \nu(i)\}.$$

On a  $\bar{\psi} \in \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$  si et seulement si on a pour tout  $i \in E'$  :

$$\bar{\psi}(e[i]) \in \langle e[j] : 1 \leq j \leq i \rangle \quad \text{et} \quad \bar{\psi}(e[\nu(i)]) \in \langle e[\nu(j)] : j \in E'_i \rangle.$$

Ces deux propriétés sont équivalentes à la seule propriété suivante :

$$\psi(e[i]) \in \langle e[j] : j \in E_i \cup F_i \cup \widehat{E}'_i \rangle.$$

On pose  $\widehat{V}_i = \langle e[j] : j \in E_i \cup F_i \cup \widehat{E}'_i \rangle$ . L'application linéaire

$$\Psi_1^{-1}(\mathcal{Z}_1(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})) \rightarrow \prod_{i \in E'} \widehat{V}_i, \quad \psi \mapsto (\psi(e[i]))_{i \in E'}$$

est donc un isomorphisme. Il suit :

$$\dim \mathcal{Z}_1(u) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'}) = \sum_{i \in E'} (\#E_i + \#F_i + \#\widehat{E}'_i).$$



Expression de la dimension de  $\mathcal{S}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ . On pose

$$\begin{aligned}\Delta(E, F) &= \{(i, j) \in E \times F : i > j\}, \\ \Delta(E, E') &= \{(i, j) \in E \times E' : i > j\}, \\ \text{et } \Delta(F, E') &= \{(i, j) \in F \times E' : i > j\}.\end{aligned}$$

On note d'autre part  $\text{inv}(E)$  le cardinal de l'ensemble des couples  $(i, j) \in E \times E$  vérifiant  $i < j$  et  $\nu^{-1}(i) > \nu^{-1}(j)$ . D'après ce qui précède on a :

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{Z}_1(u) \cap \mathcal{S}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'}) &= \sum_{i \in E'} i - \text{inv}(E) \\ \text{et } \dim \mathcal{Z}_2(u) \cap \mathcal{S}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'}) &= \sum_{i \in F} i - \Delta(F, E').\end{aligned}$$

Il résulte :

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{S}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T'}) &= \sum_{i \in E' \cup F} i - \Delta(F, E') - \text{inv}(E) \\ &= \sum_{i=\check{r}+1}^n i - \Delta(E, F) - \Delta(E, E') - \Delta(F, E') - \text{inv}(E).\end{aligned}$$

En particulier

$$\dim \mathcal{S}_{Z(u)}(\mathcal{F}_{T^{\min}}) = \sum_{i=\check{r}+1}^n i = \frac{r(r-1)}{2} + r\check{r}.$$

### 21.3.3. Expression de la dimension de la $Z(u)$ -orbite de $\mathcal{F}_{T'}$

En combinant les résultats des calculs précédents on trouve la dimension des  $Z(u)$ -orbites de  $\mathcal{B}_u$ . Tout d'abord la dimension de l'orbite du tableau particulier  $T^{\min}$  est donnée par la formule :

$$\dim Z(u).\mathcal{F}_{T^{\min}} = r^2 + \check{r}^2 - \frac{r(r-1)}{2} - r\check{r}.$$

Enfin pour  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  quelconque on obtient

$$\dim Z(u).\mathcal{F}_{T'} = \dim Z(u).\mathcal{F}_{T^{\min}} + \Delta(E, F) + \Delta(E, E') + \Delta(F, E') + \text{inv}(E)$$

où les nombres  $\Delta(E, F)$ ,  $\Delta(E, E')$ ,  $\Delta(F, E')$  et  $\text{inv}(E)$ , relatifs à  $T'$ , ont été introduits ci-dessus.

*Remarque.* En particulier la dimension de l'orbite de  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  est minimale.

On est maintenant en mesure de montrer la proposition 21.1.

## 21.4. Démonstration de la proposition 21.1

On montre la proposition par récurrence descendante sur  $\gamma(T') \geq 0$ . La section 21.2 fournit une initialisation à ce raisonnement par récurrence.

Fixons un tableau lignes-standard  $T' \in \mathcal{T}'_z(T)$  tel que  $\gamma(T') > 0$ . Comme précédemment on écrit

$$T' = \begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & b_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline a_{\tilde{r}} & b_{\tilde{r}} \\ \hline \vdots & \\ \hline a_r & \\ \hline \end{array}$$

avec  $b_1 < \dots < b_{\tilde{r}}$  et  $a_{\tilde{r}+1} < \dots < a_r$ . Rappelons qu'on a posé :

$$A'_p = \{a_{p+1}, \dots, a_r\} \quad \gamma(p) = \#\{a \in A'_p : a_p < a < b_p\} \quad \text{pour } p \in \{1, \dots, \tilde{r}\}$$

$$\text{et } \gamma(T') = \sum_{p=1}^{\tilde{r}} \gamma(p).$$

Il existe  $p \in \{1, \dots, \tilde{r}\}$  minimal tel que  $\gamma(p) > 0$ . Il existe donc  $\tilde{i} \in A'_p$  minimal tel que  $a_p < \tilde{i}$  et on a  $a_p < \tilde{i} < b_p$ . On note  $i = a_p$ . Soit  $\tilde{T}' \in \mathcal{T}'_z(Y)$  le tableau obtenu d'après  $T'$  en échangeant les numéros  $i$  et  $\tilde{i}$ . On a facilement  $\gamma(\tilde{T}') = \gamma(T') - 1$ . Par hypothèse de récurrence, il suit

$$\dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{\tilde{T}'} = \dim \mathcal{B}_u - \gamma(\tilde{T}').$$

Comme dans §21.3.2, on considère les ensembles  $E, E', F$  relatifs à  $T'$  :

$$E = \{a_1, \dots, a_{\tilde{r}}\} \quad E' = \{b_1, \dots, b_{\tilde{r}}\} \quad \text{et} \quad F = \{a_{\tilde{r}+1}, \dots, a_r\}.$$

Soient  $\tilde{E}, \tilde{E}', \tilde{F}$  les ensembles analogues définis relativement au tableau  $\tilde{T}'$ . D'après §21.3.3 (et avec les notations de §21.3.2) on a

$$\dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} = \dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T^{\min}} + \Delta(E, F) + \Delta(E, E') + \Delta(F, E') + \text{inv}(E)$$

$$\text{et } \dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{\tilde{T}'} = \dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{\tilde{T}^{\min}} + \Delta(\tilde{E}, \tilde{F}) + \Delta(\tilde{E}, \tilde{E}') + \Delta(\tilde{F}, \tilde{E}') + \text{inv}(\tilde{E}).$$

Comparons ces dimensions. On distingue deux cas.

(1) Supposons  $\tilde{i} \in E$ . Alors on a  $E = \tilde{E}$ ,  $E' = \tilde{E}'$  et  $F = \tilde{F}$ . Il suit

$$\Delta(E, E') = \Delta(\tilde{E}, \tilde{E}') \quad \Delta(E, F) = \Delta(\tilde{E}, \tilde{F}) \quad \text{et} \quad \Delta(F, E') = \Delta(\tilde{F}, \tilde{E}')$$

et d'autre part  $\text{inv}(E) = \text{inv}(\tilde{E}) - 1$ . Il suit  $\dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} = \dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{\tilde{T}'} - 1$ .

(2) Supposons  $\tilde{i} \in F$ . On a alors

$$\Delta(E, E') = \Delta(\tilde{E}, \tilde{E}') \quad \Delta(F, E') = \Delta(\tilde{F}, \tilde{E}') \quad \text{et} \quad \text{inv}(E) = \text{inv}(\tilde{E})$$

et d'autre part  $\Delta(E, F) = \Delta(\tilde{E}, \tilde{F}) - 1$ . D'où :  $\dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} = \dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{\tilde{T}'} - 1$ .

Dans tous les cas on trouve  $\dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} = \dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{\tilde{T}'} - 1$ . Il en découle :

$$\dim Z(u) \cdot \mathcal{F}_{T'} = \dim \mathcal{B}_u - \gamma(\tilde{T}') - 1 = \dim \mathcal{B}_u - \gamma(T').$$

Cela achève le raisonnement par récurrence et la preuve de la proposition.  $\square$

## Chapitre 22 . ÉQUATIONS DES COMPOSANTES DE $\mathcal{B}_u$ DANS LE CAS DEUX-COLONNES

On suppose toujours que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. Un tableau standard  $T \in \mathcal{T}(Y)$  définit une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . On applique les résultats des chapitres 14 et 20 à la recherche d'équations caractérisant les drapeaux contenus dans la composante  $K^T$ .

Soit  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . Rappelons que  $Y_{j/i}^T$  désigne le diagramme de Young défini comme la forme du tableau de Young  ${}^Y T_{j/i}$  obtenu par jeu de Taquin d'après le sous-tableau gauche  $T_{j/i}$ . Nous connaissons une condition nécessaire d'appartenance du drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$  à la composante  $K^T$ , qui est la suivante :

$$\mathcal{F} \in \mathcal{B}_u \Rightarrow Y(u_{|V_j/V_i}) \preceq Y_{j/i}^T \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j$$

où  $\preceq$  est la relation de dominance. Cette implication est vraie quelle que soit la forme de  $Y$ .

Dans le cas deux-colonnes, cette condition caractérise les drapeaux contenus dans la composante  $K^T$  :

### 22.1. PROPOSITION

*Supposons que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, définissant une composante  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . On a l'équivalence :*

$$\mathcal{F} \in K^T \Leftrightarrow Y(u_{|V_j/V_i}) \preceq Y_{j/i}^T \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . D'après la proposition 20.1, le drapeau  $\mathcal{F}$  figure dans la  $Z(u)$ -orbite d'un drapeau de la forme  $\mathcal{F}_{T'}$ , avec  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard. On a l'équivalence

$$\mathcal{F} \in K^T \Leftrightarrow \mathcal{F}_{T'} \in K^T.$$

Pour  $0 \leq i < j \leq n$  on a  $Y(u_{|V_j/V_i}) = Y_{j/i}(T')$  d'après §9.6.7. D'autre part le théorème 15.2 fournit l'équivalence :

$$\mathcal{F}_{T'} \in K^T \Leftrightarrow Y_{j/i}(T') \preceq Y_{j/i}^T \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j.$$

La proposition en découle.  $\square$

Exprimons d'une autre manière la condition de la proposition, en utilisant le fait que, pour comparer deux diagrammes de Young à deux colonnes selon la relation de dominance, il suffit de comparer les hauteurs de leurs secondes colonnes.

Soit  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . Soient  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i < j$ . La hauteur de la seconde colonne du diagramme  $Y(u_{|V_j/V_i})$  coïncide avec le rang de l'endomorphisme  $u_{|V_j/V_i} : V_j/V_i \rightarrow V_j/V_i$ .

On note  $\check{r}_{j/i}^T$  la hauteur de la seconde colonne du diagramme  $Y_{j/i}^T$ . (Cette hauteur est par ailleurs caractérisée par le lemme 10.4.1.)

On obtient l'équivalence

$$\mathcal{F} \in K^T \Leftrightarrow \text{rang } u|_{V_j/V_i} \leq \check{r}_{j/i}^T \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j.$$

D'après §9.6.2, ce critère d'appartenance à la composante  $K^T$  s'exprime encore de la manière suivante :

## 22.2. PROPOSITION

Supposons que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, définissant une composante  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Soit un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B}_u$ . On a l'équivalence :

$$\mathcal{F} \in K^T \Leftrightarrow \dim(V_i + u(V_j)) \leq \check{r}_{j/i}^T + i \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j.$$

### 22.2.1. Observation

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. Il est possible de minimiser le nombre d'équations nécessaires pour caractériser les drapeaux contenus dans la composante  $K^T$ . Par exemple les équations correspondant aux couples  $(i, j)$  tels que  $i = j - 1$  sont superflues : on a en effet  $u(V_j) \subset V_i$ . Voyons quels autres couples  $(i, j)$  peuvent être négligés.

Rappelons que le tableau lignes-standard  $T'_T$  possède la propriété suivante :

$$Y_{j/i}^T = Y_{j/i}(T'_T) \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j.$$

Ainsi le nombre  $\check{r}_{j/i}^T$  peut être "lu" sur le tableau  $T'_T$  comme le nombre de lignes de longueur 2 de  $T'_T$  dont les deux numéros sont contenus dans l'ensemble  $\{i+1, \dots, j\}$ .

Pour  $q \in \{1, 2\}$  on note  $C_q(T)$  l'ensemble des entrées de la  $q$ -ème colonne de  $T$ , qui coïncide avec l'ensemble des entrées de la  $q$ -ème colonne de  $T'_T$ . Pour  $i \in C_2(T)$  on note  $\nu_{T'_T}(i)$  le numéro voisin à gauche de  $i$  dans  $T'_T$ .

Soient  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i + 1 < j$ .

• Supposons  $j \in C_2(T)$  et  $\nu_{T'_T}(j) > i$ . Alors on a  $\check{r}_{j/i}^T = \check{r}_{j-1/i}^T + 1$ . On a d'autre part  $\dim(V_i + u(V_j)) \leq \dim(V_i + u(V_{j-1})) + 1$ .

D'où l'implication :  $\dim(V_i + u(V_{j-1})) \leq \check{r}_{j-1/i}^T + i \Rightarrow \dim(V_i + u(V_j)) \leq \check{r}_{j/i}^T + i$ .

• Supposons  $i + 1 = \nu_{T'_T}(j')$  avec  $j' \in C_2(T) \cap \{1, \dots, j\}$ . On a  $\check{r}_{j/i}^T = \check{r}_{j/i+1}^T + 1$ . On a d'autre part  $\dim(V_i + u(V_j)) \leq \dim(V_{i+1} + u(V_j))$ .

D'où :  $\dim(V_{i+1} + u(V_j)) \leq \check{r}_{j/i+1}^T + i + 1 \Rightarrow \dim(V_i + u(V_j)) \leq \check{r}_{j/i}^T + i$ .

Ainsi le drapeau  $\mathcal{F}$  est contenu dans la composante  $K^T$  si et seulement si on a la relation  $\dim(V_i + u(V_j)) \leq \check{r}_{j/i}^T + i$  pour tous  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  vérifiant  $i + 1 < j$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} j \in C_1(T) \text{ ou } (j \in C_2(T) \text{ et } \nu_{T'_T}(j) \leq i) \\ i + 1 \notin \{\nu_{T'_T}(j') : j' \in C_2(T) \cap \{1, \dots, j\}\}. \end{array} \right.$$

### 22.3. Équations cartésiennes au voisinage d'un point fixe

On fixe  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  lignes-standard et on travaille au voisinage du drapeau  $\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $x_i \in |Y|$  la case de  $Y$  portant le numéro  $i$  dans le tableau  $T'$ . Soit  $e[i] = e_{x_i}$  le vecteur de base correspondant à  $x_i$ . Soit  $\Omega_{T'} \subset \mathcal{B}$  l'ensemble des drapeaux  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n)$  vérifiant

$$V_i \not\subset V_{i-1} \oplus \langle e[i+1], \dots, e[n] \rangle.$$

Pour un tel drapeau, il existe une unique base  $e[1](\mathcal{F}), \dots, e[n](\mathcal{F})$  telle que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on ait  $V_i = \langle e[1](\mathcal{F}), \dots, e[i](\mathcal{F}) \rangle$  et

$$e[i](\mathcal{F}) - e[i] \in \langle e[i+1], \dots, e[n] \rangle.$$

Il existe des scalaires  $\zeta_{i,j}(\mathcal{F})$  ( $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{i+1, \dots, n\}$ ) tels que

$$e[i](\mathcal{F}) = e[i] + \sum_{j=i+1}^n \zeta_{i,j}(\mathcal{F}) e[j] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

L'ensemble  $\Omega_{T'}$  est un voisinage ouvert de  $\mathcal{F}_{T'}$  dans  $\mathcal{B}$ , les applications  $\zeta_{i,j} : \Omega_{T'} \rightarrow \mathbb{A}^1$  ( $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{i+1, \dots, n\}$ ) ainsi obtenues sont algébriques et leur produit est un isomorphisme de variétés de  $\Omega_{T'}$  sur l'espace affine  $\mathbb{A}^{n(n+1)/2}$ .

Les ouverts  $\Omega_{T'}$  ( $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ ) recouvrent la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ . Les ouverts  $\Omega_{T'}$  correspondant aux tableaux lignes-standards  $T$ -constructibles recouvrent la composante  $K^T$ .

Un drapeau  $\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \Omega_{T'}$  est contenu dans la composante  $K^T$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} u(V_i) &\subset V_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ \text{et } \dim(V_i + u(V_j)) &\leq \check{r}_{j/i}^T + i \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}, i < j. \end{aligned}$$

Ces conditions s'expriment facilement par des équations cartésiennes en les coordonnées  $\zeta_{i,j}(\mathcal{F})$ .

Avec ces équations nous trouvons un moyen de juger de la singularité de la composante  $K^T$ , par exemple. Pour cela il suffit de considérer les équations au voisinage du drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  (cf. proposition 5.4.5.(b)). Bien que l'observation 22.2.1 permette de limiter leur nombre, les équations demeurent très nombreuses ce qui rend le calcul difficile.

Le chapitre suivant s'intéresse précisément aux questions de singularité des composantes de  $\mathcal{B}_u$ . Nous verrons tout d'abord qu'il est nécessaire et suffisant d'étudier la singularité en un seul point, le drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$ . Nous chercherons ensuite des critères de singularité plus déductifs que celui que nous venons de suggérer.

**Chapitre 23 . UN CRITÈRE DE SINGULARITÉ  
POUR LES COMPOSANTES DE  $\mathcal{B}_u$   
DANS LE CAS DEUX-COLONNES**

Supposons toujours  $Y = Y(u)$  de type deux-colonnes.

Au début de ce chapitre, nous rappelons quelques caractéristiques des variétés de Schubert. Puis nous rappelons le théorème de V. Lakshmibai, qui donne une condition nécessaire et suffisante de singularité pour une variété de Schubert, liée aux points fixes du tore que celle-ci contient.

Nous établissons ensuite une condition suffisante de singularité de même nature pour les composantes de  $\mathcal{B}_u$ . Cette condition est-elle nécessaire et suffisante? Nous avons entrepris l'étude de cette question et il nous apparaît qu'une réponse affirmative n'est pas à exclure.

### 23.1. Étude de la singularité des variétés de Schubert

On pourra consulter [10] pour plus de précisions.

#### 23.1.1. Rappel de la définition des variétés de Schubert

Revenons au cadre du chapitre 5 : l'espace  $V$  est simplement muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Soit une permutation  $\sigma \in \Sigma_n$ . On note  $\mathcal{F}(\sigma) \in \mathcal{B}$  le drapeau défini par

$$\mathcal{F}(\sigma) = (V_0, \dots, V_n) \quad \text{avec} \quad V_i = \langle e_{\sigma_1}, \dots, e_{\sigma_i} \rangle \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Ce drapeau est fixé par le tore des automorphismes diagonaux dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  et tout point fixe du tore s'obtient ainsi.

Soit  $B \subset GL(V)$  le sous-groupe des automorphismes triangulaires inférieurs dans la base :

$$B = \{g \in GL(V) : ge_i \in \langle e_j : j \geq i \rangle\}.$$

La cellule de Schubert  $S(\sigma) \subset \mathcal{B}$  est la  $B$ -orbite du drapeau  $\mathcal{F}(\sigma)$ . La *variété de Schubert*  $X(\sigma)$  est la fermeture de la cellule  $S(\sigma)$ . On a

$$X(\sigma) = \bigsqcup_{\sigma' \geq \sigma} S(\sigma')$$

où  $\sigma'$  parcourt l'ensemble des éléments de  $\Sigma_n$  vérifiant  $\sigma' \geq \sigma$ , où  $\geq$  est l'ordre de Bruhat (cf. proposition 6.4).

#### 23.1.2. Un point fixe maximal $\mathcal{F}(\sigma_0)$

La permutation  $\sigma_0 \in \Sigma_n$ , définie par  $\sigma_0 : i \mapsto n + 1 - i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , est l'unique élément maximal de  $\Sigma_n$  pour l'ordre de Bruhat. Il suit que le drapeau  $\mathcal{F}(\sigma_0)$  est contenu dans toute variété de Schubert.

23.1.3. *Non-singularité de la variété  $X(\sigma)$  conditionnée par la non-singularité du point fixe  $\mathcal{F}(\sigma_0)$*

Fixons  $\sigma \in \Sigma_n$  et observons que la non-singularité de la variété  $X(\sigma)$  est conditionnée par la non-singularité du point fixe  $\mathcal{F}(\sigma_0)$ . En effet le drapeau  $\mathcal{F}(\sigma_0)$  est contenu dans la fermeture de toute  $B$ -orbite. Ainsi, si la variété  $X(\sigma)$  admet un point singulier, alors le drapeau  $\mathcal{F}(\sigma_0)$  est contenu dans la fermeture de la  $B$ -orbite de ce dernier. Comme l'ensemble des points singuliers de  $X(\sigma)$  est fermé et stable par l'action de  $B$ , il résulte que  $\mathcal{F}(\sigma_0)$  est un point singulier de  $X(\sigma)$ .

23.1.4. *Une minoration de  $\dim \mathbb{T}_{\mathcal{F}(\sigma_0)}X(\sigma)$*

Soit  $A \subset \Sigma_n$  l'ensemble des transpositions. À  $\tau \in A$  on fait correspondre le sous-groupe  $B(\tau) \subset B$  formé par les éléments  $g \in B$  tels que  $g(e_i) \in \langle e_i, e_{\tau(i)} \rangle$  pour tout  $i$ . Le sous-groupe unipotent de  $B(\tau)$  est un groupe à un paramètre  $U(\tau) = (g_t^{(\tau)})_{t \in k}$ .

On pose

$$A(\sigma) = \{\tau \in A : \tau\sigma_0 \geq \sigma\}.$$

Pour tout  $\tau \in A(\sigma)$  la courbe  $(g_t^{(\tau)}\mathcal{F}(\tau\sigma_0))_{t \in k}$  est contenue dans  $X(\sigma)$  et se prolonge en une courbe projective de point à l'infini  $\mathcal{F}(\sigma_0)$ . Ainsi à chaque élément  $\tau \in A(\sigma)$  on associe une courbe  $\gamma_\tau$  qui relie les points fixes  $\mathcal{F}(\tau\sigma_0)$  et  $\mathcal{F}(\sigma_0)$  dans la variété  $X(\sigma)$ . Chaque courbe définit un vecteur tangent en  $\mathcal{F}(\sigma_0)$ . On montre que les vecteurs tangents obtenus sont linéairement indépendants. Il résulte l'inégalité :

$$\dim \mathbb{T}_{\mathcal{F}(\sigma_0)}X(\sigma) \geq \#A(\sigma).$$

23.1.5. *Un critère de singularité pour la variété  $X(\sigma)$*

Rappelons que la dimension de la variété de Schubert  $X(\sigma)$  est liée à la longueur de Bruhat  $l_B(\sigma)$  par la formule  $\dim X(\sigma) = \dim \mathcal{B} - l_B(\sigma)$  (selon nos conventions. Cf. §6.4). On déduit le critère suivant :

*Supposons  $\#A(\sigma) + l_B(\sigma) > n(n-1)/2$ . Alors la variété de Schubert  $X(\sigma)$  est singulière.*

V. Lakshmibai [10] a montré que ce critère est une condition nécessaire et suffisante de singularité :

23.1.6. THÉORÈME

*Soit  $\sigma \in \Sigma_n$ .*

(a) *On a l'égalité*

$$\dim \mathbb{T}_{\mathcal{F}(\sigma_0)}X(\sigma) = \#A(\sigma).$$

(b) *La variété  $X(\sigma)$  est singulière si et seulement si  $\#A(\sigma) + l_B(\sigma) > n(n-1)/2$ .*

Comme pour les variétés de Schubert, la non-singularité d'une composante  $K^T$  de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_u$ , dans le cas deux-colonnes, est conditionnée par la non-singularité d'un seul point : le drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  (cf. proposition 5.4.5.(b)). D'autre part nous avons vu dans la démonstration de la proposition 5.4.5 que tout drapeau  $\mathcal{F} \in K^T$  est relié au drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  par une suite de courbes projectives. Nous allons en déduire un critère de singularité analogue au critère de §23.1.5.

**23.2. Un critère de singularité pour les composantes de  $\mathcal{B}_u$  dans le cas deux-colonnes**

23.2.1. *Définition des ensembles  $\mathcal{A}(Y)$  et  $\mathcal{A}(K^T)$*

On note  $r$  la hauteur de la première colonne de  $Y$ . Soit  $\mathcal{A}(Y)$  l'ensemble des tableaux lignes-standards  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  qui s'obtiennent d'après  $T^{\min}$  en échangeant deux numéros  $i, j$  vérifiant  $i \leq r$  et  $j > i$ .

Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard. On note  $\mathcal{A}(K^T)$  l'ensemble des tableaux  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  qui sont  $T$ -constructibles.

*Exemple.* Soient

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}$$

Les éléments de l'ensemble  $\mathcal{A}(Y)$  sont les dix tableaux suivants :

2	5	3	5	4	5	1	5	1	5	1	5	1	3	1	5	1	4	1	5
1	6	2	6	2	6	3	6	4	6	2	6	2	6	2	3	2	6	2	4
3		1		3		2		3		4		5		6		3		3	
4		4		1		4		2		3		4		4		5		6	

Tous ces tableaux sont  $T$ -constructibles, ainsi l'on a  $\mathcal{A}(K^T) = \mathcal{A}(Y)$ .

L'ensemble  $\mathcal{A}(K^T)$  joue le rôle de  $A(\sigma)$  dans §23.1.5. On obtient le critère suivant :

23.2.2. PROPOSITION

*On suppose que le diagramme  $Y = Y(u)$  a deux colonnes. Soit  $r$  la hauteur de la première colonne de  $Y$ . Soit  $T \in \mathcal{T}(Y)$  standard, définissant une composante irréductible  $K^T \subset \mathcal{B}_u$ . Supposons*

$$\#\mathcal{A}(K^T) > \frac{r(r-1)}{2}.$$

*Alors la composante  $K^T$  est singulière.*

*Exemple.* Dans l'exemple précédent, on obtient que la composante  $K^T$  est singulière.



*Démonstration de la proposition.* Soit  $(e_x)_{x \in |Y|}$  la base de Jordan de  $u$  indexée sur l'ensemble des cases de  $Y$  déjà fixée (cf. §4.5.2). Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  on note  $x_i \in |Y|$  la case de  $Y$  portant le numéro  $i$  dans  $T^{\min}$  puis on pose  $e[i] = e_{x_i}$ . Ainsi la base  $(e[1], \dots, e[n])$  est adaptée au drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$ .

Le drapeau  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  admet dans la variété drapeau  $\mathcal{B}$  le voisinage ouvert  $\Omega$  suivant :

$$\Omega = \{\mathcal{F} = (V_0, \dots, V_n) \in \mathcal{B} : V_i \not\subset V_{i-1} \oplus \langle e[i+1], \dots, e[n] \rangle \ \forall i\}.$$

Un drapeau  $\mathcal{F} \in \Omega$  admet une unique base adaptée  $(e[1](\mathcal{F}), \dots, e[n](\mathcal{F}))$  de la forme

$$e[i](\mathcal{F}) = e[i] + \sum_{j=i+1}^n \zeta_{i,j}(\mathcal{F}) \cdot e[j] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Les fonctions  $\zeta_{i,j} : \Omega$  ainsi obtenue sont algébriques et leur produit est un isomorphisme de  $\Omega$  dans l'espace affine  $\mathbb{A}^{n(n-1)/2}$ . Soit  $V_\Omega$  la structure d'espace vectoriel induite sur  $\Omega$ . Les fonctions  $\zeta_{i,j}$  induisent une base de l'espace dual de  $V_\Omega$ . On note  $X_{i,j}$  la base duale de  $V_\Omega$ . L'espace tangent à la composante  $K^T$  en  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  s'identifie naturellement à un sous-espace de  $V_\Omega$  noté  $T_\Omega$ . Déterminons certains vecteurs de ce sous-espace  $T_\Omega$ .

On note  $\check{r}$  la hauteur de la seconde colonne de  $Y$ . Pour  $p \in \{1, \dots, \check{r}\}$  on note  $i_p = p$  et  $i'_p = p + r$ . Ainsi  $i_p$  et  $i'_p$  sont les deux numéros de la  $p$ -ème ligne de  $T^{\min}$ . Pour  $p, q \in \{1, \dots, \check{r}\}$  tels que  $p < q$ , montrons que le vecteur  $X_{i_p, i_q} + X_{i'_p, i'_q}$  est contenu dans l'espace  $T_\Omega$ .

Pour  $t \in k$ , soit  $h_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme défini par

$$\begin{aligned} h_t : e[i] &\mapsto e[i] \quad \text{si } i \notin \{i_p, i'_p\}, \\ h_t : e[i_p] &\mapsto e[i_p] + t \cdot e[i_q] \quad \text{et} \quad h_t : e[i'_p] \mapsto e[i'_p] + t \cdot e[i'_q]. \end{aligned}$$

On a  $h_t \in Z(u)$  pour tout  $t$ . L'ensemble  $(h_t \mathcal{F}_{T^{\min}})_{t \in k}$  est une courbe contenue dans  $K^T$ . Au vecteur tangent à cette courbe en  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  correspond un vecteur de l'espace  $T_\Omega$ , précisément le vecteur  $X_{i_p, i_q} + X_{i'_p, i'_q}$ .

Soit  $T' \in \mathcal{A}(K^T)$ . Le tableau  $T'$  est caractérisé par un couple  $(i, j)$  tel que  $T'$  s'obtienne d'après  $T^{\min}$  en échangeant  $i$  et  $j$ . On a  $1 \leq i < j \leq n$  et  $i \leq r$ . Montrons que le vecteur  $X_{i,j}$  est alors contenu dans l'espace  $T_\Omega$ .

On distingue deux cas.

- (1) Supposons  $j \geq \check{r} + 1$ . Autrement dit  $j$  n'admet pas de numéro à sa droite dans  $T^{\min}$ . Pour  $t \in k$  on note  $w_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme défini par

$$w_t : e[l] \mapsto e[l] \text{ si } l \neq j \quad \text{et} \quad w_t : e[j] \mapsto e[j] + t \cdot e[i].$$

- (2) Supposons  $j \leq \check{r}$ . Alors  $j$  admet un numéro à sa droite dans  $T^{\min}$ , que l'on note  $j'$ . Comme  $i < j$  le numéro  $i$  admet un numéro  $i'$  à sa droite dans  $T^{\min}$ . Pour  $t \in k$  soit  $w_t : V \rightarrow V$  l'automorphisme défini par

$$\begin{aligned} w_t : e[l] &\mapsto e[l] \text{ si } l \notin \{j, j'\} \\ w_t : e[j] &\mapsto e[j] + t \cdot e[i] \quad \text{et} \quad w_t : e[j'] \mapsto e[j'] + t \cdot e[i']. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a  $w_t \in Z(u)$  pour tout  $t$ . L'ensemble  $(w_t \mathcal{F}_{T'})_{t \in k}$  est une courbe contenue dans  $K^T$ . On a  $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t \mathcal{F}_{T'} = \mathcal{F}_{T^{\min}}$ . On obtient une courbe projective reliant les drapeaux  $\mathcal{F}_{T'}$  et  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  dans la composante  $K^T$ . Cette courbe admet en  $\mathcal{F}_{T^{\min}}$  un vecteur tangent qui s'identifie dans  $V_\Omega$  au vecteur  $X_{i,j}$ . Il suit :  $X_{i,j} \in V_\Omega$ .

Finalement chaque couple  $(p, q)$  vérifiant  $1 \leq p < q \leq \check{r}$  et chaque tableau  $T' \in \mathcal{A}(K^T)$  définit un vecteur de l'espace  $T_\Omega$ . Tous ces vecteurs forment une famille libre. Il suit :

$$\dim T_{\mathcal{F}_{T^{\min}}} K^T = \dim T_\Omega \geq \#\mathcal{A}(K^T) + \frac{\check{r}(\check{r} - 1)}{2}.$$

On a d'autre part

$$\dim K^T = \frac{r(r - 1)}{2} + \frac{\check{r}(\check{r} - 1)}{2}.$$

La proposition en résulte.  $\square$

23.2.3. *Exemples*

Le critère précédent est facilement implémentable sous la forme d'un programme informatique. Ce programme permet de trouver un certain nombre de composantes irréductibles singulières. Ainsi les composantes des fibres de Springer associées aux tableaux standards suivants sont singulières.

1	3	1	2	1	3	1	2
2	5	3	4	2	5	3	4
4	7	5	6	4	7	5	6
6		7		6	8	7	8
1	4	1	3	1	3		
2	6	2	6	2	5		
3		4		4			
5		5		6			
7		7		7			
1	4	1	3	1	3	1	4
2	6	2	6	2	5	2	5
3	8	4	8	3	7	3	7
5		5		6		5	
7		7		8		6	
7		7		8		8	

## Index

- base de Jordan, §4.5.2
- base de Jordan de forme  $Y$ , §4.5.2
- Borel (sous-groupe de  $-$ ), §1.6.3
- cellules de Schubert, §6.1
- cellules de Shimomura, §7.1.5
- cohomologie des variétés, §1.4
- décomposition cellulaire, §1.2.6
- diagramme de Young, §4.1
- diagramme gauche, §10.1.1
- dimension d'une variété, §1.2.5
- dominance :
  - entre diagrammes, §4.1.3
  - entre tableaux, §4.2.3
- drapeaux, §2.2
- drapeaux complets, §2.3
- espace affine, §1.1.1
- espace projectif, §1.3.1
- espace tangent, §1.5.1
- fibre de Springer, §3
- filtrante (partition  $-$ ), §1.2.6
- graphe de forme  $Y$ , §5.3.2
- groupe algébrique, §1.6
- groupe à un paramètre, §1.6.4
- immersion fermée, §1.1.7
- immersion ouverte, §1.2.2
- irréductible (variété  $-$ ), §1.2.4  
(composante  $-$ ), §1.2.4
- lisse (variété  $-$ ), §1.5.2
- longueur de Bruhat, §6.3
- localement fermée (partie  $-$ ), §1.2.6
- nombre de Betti, §11
- non-singulier (point  $-$ ), §1.5.2
- non-singulière (variété  $-$ ), §1.5.2
- ordre de Bruhat, §6.2
- parabolique (sous-groupe  $-$ ), §1.6.3  
(orbite  $-$ ), §2.3.2
- rectification d'un
  - tableau gauche, §10.1.3
  - tableau lignes-standard, §4.4
- résolution de Springer, §3.2
- singulier (point  $-$ ), §1.5.2
- singulière (variété  $-$ ), §1.5.2
- tableau gauche, §10.1.2
- tableau lignes-standard, §4.3
- tableau standard, §4.2
- tableaux  $T$ -constructibles :
  - cas deux-lignes, §14.1
  - cas deux-colonnes, §15.1
  - cas crochet, §16.1
- tore, §1.6.3
- tore de rang 1 régulier, §4.6.1
- variété affine, §1.1.3
- variété algébrique, §1.2
- variété grassmannienne, §2.1
- variété projective, §1.3
- variété de Schubert, §23.1.1
- variété drapeau, §2.3
- Zariski (topologie de  $-$ ), §1.1.2

## Index des notations

### Notations principales.

$k$  est un corps algébriquement clos

$V$  est un espace vectoriel de dimension  $n \geq 0$  sur  $k$

$u : V \rightarrow V$  est un endomorphisme nilpotent

$GL(V)$  est le groupe des automorphismes de  $V$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(V)$  est la variété drapeau, §2.3

$\Sigma_n$  est le groupe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$

$\mathbb{A}^n$  est l'espace affine, §1.1.1

$\mathcal{B}_u = \mathcal{B}_u(V)$  est la fibre de Springer, §3

$Z(u)$  est le sous-groupe des éléments  $g \in GL(V)$  qui commutent avec  $u$ , §5

$Y(u)$  est le diagramme de Young associé à  $u$ , §4.5

$\mathcal{Y}_n$  est l'ensemble des diagrammes de Young à  $n$  cases, §4.1

$\mathcal{T}(Y)$  est l'ensemble des tableaux standards de forme  $Y$ , §4.2

$\mathcal{T}'(Y)$  est l'ensemble des tableaux lignes-standards de forme  $Y$ , §4.3

$T^{\min} \in \mathcal{T}(Y)$  est l'élément minimal pour la relation de dominance, §4.2.3

Soient  $T \in \mathcal{T}(Y)$  et  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$ .

${}^S T'$  est la rectification standard de  $T'$ , §4.4

$\mathcal{T}'(T)$  est l'ensemble des tableaux  $T' \in \mathcal{T}'(Y)$  tels que  ${}^S T' = T$ , §4.4

$T_{|i}, T'_{|i}$  sont les sous-tableaux de  $T, T'$  formés par les indices  $1, \dots, i$

$T_{|j/i}, T'_{|j/i}$  sont les sous-tableaux de  $T, T'$  formés par les indices  $i+1, \dots, j$

$Y_{j/i}^T$  est le diagramme de Young induit par  $T_{|j/i}$ , §10.2.1

$Y_{j/i}(T')$  est le diagramme de Young induit par  $T'_{|j/i}$ , §9.6.6

$|Y|$  est l'ensemble des cases de  $Y$ , §4.1

$\Sigma_{|Y|}$  est l'ensemble des bijections  $\alpha : \{1, \dots, n\} \rightarrow |Y|$

$\alpha_{T'} \in \Sigma_{|Y|}$  l'élément induit par  $T'$ , §4.6

$(e_x)_{x \in |Y|}$  est une base de Jordan de forme  $Y$ , §4.5.2

$H \subset GL(V)$  est le tore des automorphismes diagonaux dans cette base

$\mathcal{B}_u^T \subset \mathcal{B}_u^T(V)$  est l'ensemble localement fermé associé à  $T$ , §4.7

$K^T$  est la composante irréductible de  $\mathcal{B}_u$  obtenue comme fermeture de  $\mathcal{B}_u^T$ , §4.7.2

$\mathcal{F}_{T'} \in \mathcal{B}_u$  est le point fixe de  $H$  associé à  $T'$ , §4.6

$S_u(T') \subset \mathcal{B}_u$  est la cellule de Shimomura contenant  $\mathcal{F}_{T'}$ , §7.1.5

### Notations de la première partie.

$\mathbb{X}(S)$ , §1.1.2

$\mathbb{I}(X)$ , §1.1.3

$k[X]$ , §1.1.3

$\mathbb{D}_X(f)$ , §1.1.9

$\mathbb{D}_X(I)$ , §1.1.10

$\mathbb{P}^n$ , §1.3.1

$H^n(X, M)$ , §1.4

$H_c^n(X, M)$ , §1.4

$T_x X$ , §1.5.1

Grass $_l(V)$ , §2.1	$R_S$ , §3.2	$\mathcal{T}'_z(Y), \mathcal{T}'_z(T)$ , §5.3.1
$\text{Drap}_{l_1, \dots, l_s}(V)$ , §2.2	$\sim_z$ , §5.3	$\Gamma(Y)$ , §5.3.2

### Notations de la deuxième partie.

$\mathcal{F}(\sigma)$ , §6.1	$\text{Inv}(T')$ , §8.3.1	${}^Y\Gamma$ , §10.1.3
$(i_1 : i_2 : \dots : i_p)$ , §6.1	$R_n$ , §9.1.1	${}^Y T_{ j/i}$ , §10.2.1
$l_B$ , §6.3	$\rho^*$ , §9.1.3	$T^\rho$ , §10.3.1
$S_\alpha$ , §7.1.2	$(\widehat{\rho}_1, \dots, \widehat{\rho}_n)$ , §9.3.1	${}^\rho T$ , §10.3.4
$\mathcal{F}_\alpha$ , §7.1.2	$\rho \star T'$ , §9.3.1	$T'_T$ , §10.4.2
$T'_\sigma$ , §8.1.2	$\mathcal{B}_{u, T}^\rho$ , §9.1.2	$b_m$ , §11
$\mathcal{T}'_i(T)$ , §8.2.1	$K_T^\rho$ , §9.2.1	$b_m^T$ , §11.1
$q_i, \widehat{p}_i, p_i^T, p_i^{T'}$ , §8.2.2	$C_u^\rho(T')$ , §9.4	$\tilde{b}_m(Y)$ , §11.3
$\tau_{i, \kappa}$ , §8.2.3	$\Xi_m$ , §10.1.1	

### Notations des troisième et quatrième parties.

$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_i, \dots$  sont les tableaux successifs de l'algorithme de construction de  $T'$

Si  $\theta$  est un tableau,

$L_p(\theta)$  est l'ensemble des entrées de la  $p$ -ème ligne de  $\theta$

$C_q(\theta)$  est l'ensemble des entrées de la  $q$ -ème colonne de  $\theta$

$n_q(\theta)$  est le cardinal de  $C_q(\theta)$

$p_i$  est le numéro de la ligne contenant l'entrée  $i$

*Notations de la troisième partie.*

$\prec_{T'}$ , §15.1.2	$I_i$ , §15.1	$q_i^T$ , §16.1
$\overline{N}$ , §15.1	$J_i$ , §15.1	$\gamma_i$ , §16.1
$f_i(p)$ , §15.1	$I'_i$ , §15.3.3	

*Notations des chapitres 18 et 19.*

$s$  et  $\check{s}$  sont les longueurs des lignes de  $Y$

$s_i, \check{s}_i, s'_i, \check{s}'_i$ , §18.1	$\overline{V}_\infty$ , §18.6.3	$\overline{I}_i$ , §18.9.1
$\widehat{s}_i$ , §18.1.2	$\tilde{u}$ , §18.6.3	$I(\theta_i)$ , §18.9.2
$I(T')$ , §18.1.1	$\emptyset_1, \emptyset_2$ , §18.6.4	$\delta(X; \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$ , §19.2
$I_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ , §18.1.2	$e[\emptyset_1], \emptyset_2$ , §18.6.4	$I(T')^\epsilon$ , §19.3.1
$\widehat{I}_{\widehat{\text{mf}}}(T, T')$ , §18.1.2	$\overline{[1; n]}$ , §18.6.4	$I^T(T')^\epsilon$ , §19.3.2
$I(T, T')$ , §18.1.3	$\nu$ , §18.6.4	$\mathcal{A}^\epsilon(T, T')$ , §19.3.2
$I^T(T')$ , §18.1.4	$\gamma_i$ , §18.6.5	$A_j^\epsilon(T, T')$ , §19.3.2
$d^T(T')$ , §18.1.4	$\phi^{(i)}$ , §18.7.1	$d^\epsilon(T'; T_1, \dots, T_m)$ , §19.3.3
$A_i, B_i$ , §18.4.1	$e_i[j](\phi)$ , §18.7.2	$d(T'; T_1, \dots, T_m)$ , §19.3.3
$\theta_i[A], \theta_i[B]$ , §18.4.1	$V_i(\phi)$ , §18.7.5	$\mathcal{B}^{(n)}$ , §19.6.1
$s^{(i)}, \check{s}^{(i)}$ , §18.4.2	$\mathcal{F}(\phi)$ , §18.7.5	$\widehat{S}(T')$ , §19.6.1
$e[i]$ , §18.6.1	$k^{I(T, T')}$ , §18.8	$\widehat{S}(T')^\epsilon$ , §19.6.2
$V_\infty, u_\infty$ , §18.6.2	$\mathcal{W}(T, T')$ , §18.8	$J_{h, \epsilon}^{(i)}$ , §19.7.1
$\mathcal{B}_{u_\infty}^{(n)}$ , §18.6.2	$I_i$ , §18.9.1	

**Notations de la cinquième partie.**

$\mathcal{T}'(K^T)$ , §20.2	$S_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ , §21.3	$A(\sigma)$ , §23.1.4
$\gamma(T')$ , §21	$\check{r}_{j/i}^T$ , §22	$l_B(\sigma)$ , §6.3
$T'_T$ , §10.4.2	$X(\sigma)$ , §23.1.1	$\mathcal{A}(Y)$ , §23.2.1
$\text{Fix}_{\mathcal{Z}(u)}(\mathcal{F}_{T'})$ , §21.3	$\sigma_0$ , §23.1.2	$\mathcal{A}(K^T)$ , §23.2.1
$\mathcal{Z}(u)$ , §21.3		

## Références bibliographiques

- [1] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] W. Borho, R. MacPherson, *Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981) 707–710.
- [3] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2) 98 (1973) 480–497.
- [4] W. Fulton, *Young Tableaux, with applications to representation theory and geometry*, Cambridge University Press, 1997.
- [5] F.Y.C. Fung, *On the topology of components of some Springer fibers and their relation to Kazhdan-Lusztig theory*, Adv. Math. 178 (2003) 244–276.
- [6] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [7] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [8] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. 53 (1979) 165–184.
- [9] D. Kazhdan, G. Lusztig, *A topological approach to Springer's representations*, Adv. Math. 38 (1980) 222–228.
- [10] V. Lakshmibai, *On tangent spaces to Schubert varieties*, J. Algebra 230 (2000) 222–244.
- [11] P. Lorist, *The geometry of  $\mathcal{B}_x$* , Proc. Nederl. Akad. Wetensch. 89 (1986) 423–442.
- [12] G. Lusztig, *Green polynomials and singularities of unipotent classes*, Adv. in Math. 42 (1981) 169–178.
- [13] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Univ. Press, New York, 1995.
- [14] A. Melnikov, *B-orbits in solutions to the equation  $X^2 = 0$  in triangular matrices*, J. of Algebra, 223 (2000) 101–108.
- [15] A. Melnikov, N.G.J. Pagnon, *On intersections of orbital varieties and components of Springer fiber*, J. Algebra, 298 (2006) 1–14.
- [16] A. Melnikov, N.G.J. Pagnon, *Intersections of components of a Springer fiber for the hook and two column cases*, Arxiv, math.RT/0607673.
- [17] N.G.J. Pagnon, N. Ressayre, *Adjacency of Young tableaux and the Springer fibers*, Selecta Math 12 (2006) 517–540.

- [18] D. Perrin, *Géométrie algébrique, une introduction*, InterEditions, Paris; CNRS Éditions, Paris, 1995.
- [19] N. Shimomura, *The fixed point subvarieties of unipotent transformations on the flag varieties*. J. Math. Soc. Japan 37 (1985) 537–556.
- [20] P. Slodowy, *Four lectures on simple groups and singularities*, Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, vol. 11, 1980.
- [21] P. Slodowy, *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics 815, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [22] N. Spaltenstein, *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, Lecture Notes in Mathematics 946, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.
- [23] T.A. Springer, *The unipotent variety of a semisimple group*, Proc. of the Bombay Colloqu. in Algebraic Geometry, ed. S. Abhyankar, London, Oxford univ. Press, 1969, 373-391.
- [24] T.A. Springer, *Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups*, Invent. Math. 36 (1976) 173–207.
- [25] T.A. Springer, *A construction of representations of Weyl groups*, Invent. Math. 44 (1978) 279–293.
- [26] T.A. Springer, *Linear algebraic groups. Second edition*, Progress in Mathematics 9, Boston, 1998.
- [27] R. Steinberg, *On the desingularization of the unipotent variety*, Invent. Math. 36 (1976) 209–224.
- [28] M. van Leeuwen, *Flag varieties and interpretations of Young tableau algorithms*, J. Algebra 224 (2000) 397–426.
- [29] J.A. Vargas, *Fixed points under the action of unipotent elements of  $SL(n)$  in the flag variety*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 24 (1979) 1-14.



## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	p. 5
<b>I. Rappels de géométrie algébrique élémentaire.</b>	
<b>Définition des fibres de Springer</b> .....	p. 13
Chapitre 1. Variétés algébriques.....	p. 15
Chapitre 2. Variétés grassmanniennes et variétés de drapeaux.....	p. 24
Chapitre 3. Définition de la fibre de Springer $\mathcal{B}_u$ .....	p. 27
Chapitre 4. Lien entre les diagrammes de Young et la géométrie de $\mathcal{B}_u$ .....	p. 29
Chapitre 5. Action du sous-groupe centralisateur de $u$ .....	p. 36
<b>II. Décompositions cellulaires des fibres de Springer</b> .....	p. 44
Chapitre 6. Cellules de Schubert de la variété drapeau.....	p. 47
Chapitre 7. Cellules de Schubert intersectées avec $\mathcal{B}_u$ . Théorème de Shimomura.....	p. 51
Chapitre 8. Inversions sur les tableaux lignes-standards.....	p. 57
Chapitre 9. Une famille de paramétrisations des composantes de $\mathcal{B}_u$ . Une famille de décompositions cellulaires adaptées .....	p. 64
Chapitre 10. Lien entre les différentes paramétrisations.....	p. 77
Chapitre 11. Calcul des nombres de Betti de $\mathcal{B}_u$ et de certaines composantes irréductibles.....	p. 88
<b>III. Points fixes dans les composantes des fibres de Springer</b>	
<b>dans les cas crochet, deux-lignes et deux-colonnes</b> .....	p. 95
Chapitre 12. Observations préliminaires. Un premier critère .....	p. 97
Chapitre 13. Points fixes des composantes de $\mathcal{B}_u$ dans le cas crochet .....	p. 100
Chapitre 14. Points fixes des composantes de $\mathcal{B}_u$ dans le cas deux-lignes ..	p. 102
Chapitre 15. Points fixes des composantes de $\mathcal{B}_u$ dans le cas deux-colonnes	p. 107
Chapitre 16. Retour sur le cas crochet : un critère algorithmique.....	p. 135

<b>IV. Cellules de Schubert intersectées avec les composantes des fibres de Springer dans les cas crochet et deux-lignes .</b>	p. 141
Chapitre 17. Cellules de Schubert intersectées avec les composantes de $\mathcal{B}_u$ dans le cas crochet. Dimension d'une intersection de composantes .....	p. 143
Chapitre 18. Cellules de Schubert intersectées avec les composantes de $\mathcal{B}_u$ dans le cas deux-lignes .....	p. 150
Chapitre 19. Calcul de la dimension d'une intersection de composantes dans le cas deux-lignes .....	p. 183
<b>V. Composantes des fibres de Springer dans le cas deux-colonnes. Critère de singularité .....</b>	p. 199
Chapitre 20. Orbites de $\mathcal{B}_u$ sous l'action du centralisateur de $u$ .....	p. 201
Chapitre 21. Calcul de la dimension d'une intersection de composantes	p. 203
Chapitre 22. Équations des composantes de $\mathcal{B}_u$ .....	p. 211
Chapitre 23. Un critère de singularité .....	p. 214
<b>Index .....</b>	p. 219
<b>Index des notations .....</b>	p. 220
<b>Bibliographie .....</b>	p. 223
<b>Table des matières .....</b>	p. 225