Yakovenko –

А. Б. Гивенталь

ТЕОРЕМА ШТУРМА ДЛЯ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Изучается система линейных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют периоды гиперэллиптических интегралов. Показано, что эта система гамильтонова и указан геометрический смысл гамильтониана. Для вещественных гиперэллиптических кривых рода g доказано, что гамильтониан положительно определен, а сама система обладает свойством Штурма: движущиеся в силу системы лагранжевы плоскости нетрансверсальны неподвижным не более $2g$ раз.

В однопараметрическом семействе вещественных гиперэллиптических кривых рода g с уравнением

$$y^2 = x^{2g+1} + \lambda_1 x^{2g-1} + \ldots + \lambda_{2g-1} x + t \tag{1}$$

выберем непрерывное семейство овалов Γ_t и положим

$$I_k(t) = \oint_{\Gamma_t} x^{2g-k} \frac{dx}{y}, \quad k = 1, \ldots, 2g. \tag{2}$$

Вектор $I = (I_1, \ldots, I_{2g})$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений Гаусса–Манина

$$\dot{I} = A(t) I, \tag{3}$$

не зависящей от выбора овалов, так как дифференциальные 1-формы $x^{2g-k}dx/y$ образуют базис в когомологиях проколотой гиперэллиптической кривой.

Теорема 1. а) *Система уравнений Гаусса–Манина гамильтонова в подходящей симплектической структуре фазового пространства.*

Ключевые слова: гиперэллиптические кривые, уравнения Гаусса–Манина.

б) *На интервале изменения параметра t, где гиперэллиптические* кривые *имеют $g+1$ вещественных компонент, система Гаусса–Манина имеет знакоопределенный квадратичный гамильтониан и обладает свойством Штурма: любое движущееся в силу системы лагранжево пространство становится нетрансверсальным любому неподвижному лагранжеву пространству не более $2g$ раз.*

Приводимое ниже доказательство включает геометрическое описание симплектической структуры и гамильтониана (теорема 2), а во второй части (свойство Штурма) опирается на билинейные неравенства Римана.

Симплектическая структура. Положим $\lambda_{2g}=t$ и рассмотрим семейство (1) *комплексных* гиперэллиптических кривых

$$V_\lambda : y^2 = P_\lambda(x), \quad \lambda \in \mathbf{C}^{2g}.$$

Введем в пространстве параметров симплектическую структуру следующим образом (ср. [1]). *Отображение периодов* сопоставляет точке λ вне дискриминанта $\Delta \subset \mathbf{C}^{2g}$ класс когомологий $[ydx] \in H^1(V_\lambda, \mathbf{C})$. В расслоении когомологий определена плоская *связность Гаусса–Манина* – циклы можно переносить на соседние кривые по непрерывности. Это позволяет рассматривать отображение периодов как многозначное отображение

$$(\mathbf{C}^{2g} \setminus \Delta) \to H^1(V_{\lambda^0}, \mathbf{C})$$

в пространство когомологий отмеченной кривой V_{λ^0}. В [1] показано, что отображение периодов – локальный биголоморфизм. Мы переносим в $\mathbf{C}^{2g}\setminus\Delta$ симплектическую структуру пространства $H^1(V_{\lambda^0}, \mathbf{C})$, двойственную индексу пересечения циклов, и называем ее *формой пересечений*. Она корректно определена, т. к. индекс пересечения сохраняется при монодромии циклов, и голоморфно продолжается на дискриминант, как показано в [1], до симплектической структуры во всём пространстве $\mathbf{C}^{2g}$.

Дифференциал отображения периодов отождествляет касательное расслоение к $\mathbf{C}^{2g}\setminus\Delta$ с расслоением когомологий $H^1(V_\lambda, \mathbf{C})$. При таком отождествлении

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_k} \mapsto \nabla_k [ydx] = \left[x^{2g-k}\frac{dx}{2y}\right].$$

Поэтому система уравнений Гаусса–Манина описывает движение ковекторов на $\mathbf{C}^{2g}\setminus\Delta$ при их параллельном перенесении вдоль прямой, параллельной оси t с помощью связности Гаусса–Манина в гомологиях. Отсюда уже следует гамильтоновость системы (3). Действительно, при параллельном перенесении циклов их индекс пересечения сохраняется. Поэтому остается лишь проверить, что симплектическая структура – одна и та же во всех кокасательных пространствах к $\mathbf{C}^{2g}$ приложенных в точках одной прямой, параллельной оси t. Другими словами, что Ω – обратная матрица формы пересечений в координатах $(\lambda_1, ..., \lambda_{2g}=t)$ на $\mathbf{C}^{2g}$ Ее элементы – полиномы от λ.

П р е д л о ж е н и е 1. *Ω не зависит от t.*

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит в подсчете квазиоднородных степеней. Положим $\deg x = 1$. Тогда $\deg\lambda_k = k+1$, и тензор Пуассона $\Sigma\,\Omega_{kl}(\lambda)\,(\partial/\partial\lambda_k)\wedge(\partial/\partial\lambda_l)$ имеет степень $\deg = -2g-1$. Так как $\deg\lambda_k \leqslant 2g+1$, то $\deg\Omega_{kl} \leqslant 2g-2 < \deg t$

Итак первое утверждение теоремы 1 доказано.

Гамильтониан. Рассмотрим семейство комплексных корней многочленов $P_\lambda(x)=x^{2g+1}+\lambda_1 x^{2g-1}+\ldots+\lambda_{2g}$:

$$\mathcal{Z}_\lambda:\ P_\lambda(x)=0,\ \ \lambda\in \mathbf{C}^{2g}$$

и повторим для него предыдущие конструкции, начиная с отображения периодов

$$(\mathbf{C}^{2g}\setminus\Delta)\ni\lambda\mapsto[x]\in\widetilde{H}^0(\mathcal{Z}_\lambda,\mathbf{C}).$$

Это отображение периодов обратно к отображению Виета – проекции $\widetilde{H}^0(\mathcal{Z}_{\lambda^0},\mathbf{C})$ в пространство C^{2g} орбит по действию группы перестановок корней. Форма пересечения на $C^{2g}\setminus\Delta$ в этом случае симметрична и совпадает с прямым образом инвариантного скалярного произведения. Записанная как псевдориманова метрика $\sum S_{kl}(\lambda)(\partial/\partial\lambda_k)(\partial/\partial\lambda_l)$ на кокасательном расслоении к $\mathbf{C}^{2g}\setminus\Delta$, форма пересечения аналитически продолжается на дискриминант Δ и вырождается в точности на Δ. Связность Гаусса–Манина, перенесенная на (ко)касательное расслоение к $C^{2g}\setminus\Delta$ с помощью отображения периодов (мы будем называть ее *симметрической связностью* в отличие от рассмотренной ранее *симплектической*), совпадает с подходящей связностью этой псевдоримановой метрики. Матрицу $S=(S_{kl})$ можно интерпретировать в терминах операции *сворачивания* симметрических многочленов [2]: $S_{kl}(\lambda)$ есть выражение через элементарные симметрические функции $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{2g})$ скалярного произведения градиентов $(\nabla\lambda_k,\nabla\lambda_l)$. Подсчет квазиоднородных степеней (как в предложении 1) убеждает, что S зависит от t неоднородно-линейно.

Теорема 2. *Система уравнений Гаусса–Манина* (3) *эквивалентна*

$$S\dot{I}=(\mathrm{const})\,\Omega I. \tag{4}$$

Замечание. Ненулевая постоянная в (4) не зависит от λ и определяется нормировкой отображения периодов (const) $[ydx]$ или симплектической структуры. Будем далее нормировать Ω таким образом, чтобы const = 1.

Следствие 1. *Квадратичный гамильтониан системы Гаусса–Манина* имеет матрицу

$$H=\Omega^* S^{-1}\Omega.$$

Следствие 2. *В вещественной области изменения параметра λ, где многочлен P_λ имеет $2g+1$ различных вещественных корней, гамильтониан положительно определен.*

Действительно, индекс пересечения в $\widetilde{H}_0(\mathcal{Z}_\lambda,\mathbf{R})$ положительно определен. [illegible] касающиеся дискриминанта. Уравнение (4) описывает симплектическую связность Гаусса–Манина. Аналогичное уравнение для симметрической связности имеет, как будет доказано ниже, похожий вид:

$$S\dot{J}=(\Omega-\frac{1}{2}\dot{S})J. \tag{5}$$

Одновременно появление в (4, 5) симметрической и симплектической форм пересечений S, Ω объясняется тем, что оба уравнения могут быть выведены единым вычислением – дифференцированием отображений периодов $[ydx]$ и $[x]$ вдоль базиса векторных полей, касающихся дискриминанта. В качестве такого базиса можно взять, с одной стороны, поля $\Sigma S_{kl}\, \partial/\partial\lambda_l$. Это связано с тем, что градиенты элементарных симметрических функций $\nabla\lambda_k$, $k=1, \ldots, 2g$, образуют базис $C[\lambda]$ модуля симметрических векторных полей в $H^0(\mathscr{Z}_\lambda, C)$ (см. [2, 1]). Другой базис можно получить следующей процедурой. Поделим полином $x^{k-1}P_\lambda(x)$ на P'_λ

$$x^{k-1}P_\lambda(x) = h^k(x, \lambda)P'_\lambda(x) + \Sigma\Lambda_l^k(\lambda)x^{2g-l}.$$

Тогда $W^k = \Sigma\Lambda_l^k\, \partial/\partial\lambda_l$, $k=1, \ldots, 2g$, – искомый базис. Более того, $h^k\partial/\partial x + W^k$ – инфинитезимальный автоморфизм семейства $\mathscr{Z}_\lambda$, а

$$\frac{1}{2}x^{k-1}y\frac{\partial}{\partial y} + h^k\frac{\partial}{\partial x} + W^k$$

– инфинитезимальный автоморфизм семейства V_λ (см. [1, 2]). Такое поднятие полей до автоморфизмов семейства позволяет дифференцировать отображение периодов двумя способами – формально и явно – и получить дифференциальное уравнение (3).

Пример: *эллиптические кривые.* Положим $F = x^3+\lambda x+t-y^2$. Тогда

$$F = \left[\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{3}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2\lambda}{3}\frac{\partial}{\partial\lambda} + t\frac{\partial}{\partial t}\right]F,$$

$$xF = \left[\frac{xy}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2\lambda}{9}\right)\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{2\lambda^2}{9}\frac{\partial}{\partial t}\right]F.$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}[ydx] = [xdx/2y] = \dfrac{\partial}{\partial t}[xydx]$, то

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{3} & t \\ t & -\frac{2\lambda^2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xydx \\ ydx \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \frac{y}{2}dx - \frac{x}{3}dy \\ \frac{xy}{2}dx - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2\lambda}{9}\right)dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{7}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xydx \\ ydx \end{bmatrix}$$

Дифференцируя один раз по t, получаем

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{3} & t \\ t & -\frac{2\lambda^2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{xdx}{y} \\ \frac{dx}{y} \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{xdx}{y} \\ \frac{dx}{y} \end{bmatrix}.$$

Аналогично, дифференцируя $[x]^{\bullet}$ при $y=0$, находим

$$\begin{bmatrix} \overline{3} & t \\ t & -\frac{2\lambda^2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\overline{P'}} \\ \frac{1}{P'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}-\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{P'} \\ \frac{1}{P'} \end{bmatrix}.$$

Мораль этого примера такова. Дифференцированием отображения периодов вдоль базисных полей, касающихся Δ, можно получить уравнения для параллельного перенесения ковекторов вдоль прямой, параллельной оси t, с помощью симплектической и симметрической связностей Гаусса–Манина соответственно:

$$A(t)\dot{I} = BI, \quad A(t)\dot{J} = (B - \frac{1}{2}\dot{A})J,$$

где A зависит от t неоднородно-линейно, а B не зависит от t. Доказательство использует формулу $\nabla_{\partial/\partial\lambda_k}[\omega] = \nabla_{\partial/\partial t}[x^{2g-k}\omega]$, наличие в (6) лишнего слагаемого $(1/2)x^{k-1}y\partial/\partial y$ и то обстоятельство, что t входит в W^k линейно – с членом $t\,\partial/\partial\lambda_{2g-k+1}$.

Теперь уместно вспомнить, что геодезическая связность сохраняет риманову метрику связности,

$$0 = (SJ, J)^{\bullet} = (2S\dot{J}, J) + (\dot{S}J, J).$$

Поэтому справедливо

Предложение 2. *Если $A = S$, то B кососимметрична:* $(BJ, J) = 0$.

Уравнение $S\dot{I} = BI$ с симметричной S и кососимметричной B переписывается в эквивалентной форме $B\dot{I} + (B^*S^{-1}B)I = 0$. Поэтому симплектическое уравнение Гаусса–Манина сохраняет две симплектические структуры: B и Ω. Доказательство п. 2 завершает

Предложение 3. $B = (\text{const})\,\Omega$.

Доказательство. В его основе геометрический факт – единственность инварианта при монодромии билинейной формы на $H_1(V_\lambda, \mathbb{C})$. Отсюда следует, что const – голоморфная функция на $\mathbb{C}^{2g}$, к тому же – квазиоднородная. Сравнение квазиоднородных степеней B и Ω показывает теперь, что эта функция – константа.

Следствие 3. *Симплектическая форма пересечений выражается через симметрическую:*

$$\Omega_{kl} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{2g}\left(S_{li}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{k1} - S_{ki}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}S_{l1}\right).$$

Доказательство: матрица B выражается через S с помощью формул Кристоффеля для коэффициентов геодезической связности. Пусть $v_k = \Sigma S_{ki}\,\partial/\partial\lambda_i$. Тогда $[v_l, v_k] = \Sigma a^i_{lk} v_i$. Из формул Кристоффеля выводится, что $\Omega_{kl} = a^{2g}_{lk}/2$. Но V_{2g} содержит член $t\partial/\partial\lambda_1$. Коэффициент при таком члене в коммутаторе $[v_l, v_k]$ есть a^{2g}_{lk}.

Замечание. Матрица (S_{kl}) найдена в [1] методом, указанным в [2]. Иной, нежели выше, способ вычисления матрицы (Ω_{kl}) приведен в [3], § 15.

Многомерная теория Штурма. Классические теоремы Штурма описывают свойства нулей решений уравнений Штурма–Лиувилля. Как показано, например, в [4], эти теоремы имеют симплектическую природу и допускают многомерные обобщения на линейные неавтономные гамильтоновы системы

$$\Omega\dot{z} + H(t)z = 0, \quad z \in \mathbb{R}^{2g}.$$

В этих обобщениях вместо нулей решений речь идет о моментах нетрансверсальности движущегося в силу системы лагранжева пространства к неподвижному лагранжеву пространству, на котором квадратичный гамильтониан H положительно определен при всех t. Приведем две формулировки из [4].

1) *Если гамильтониан положителен на лагранжевых пространствах* α и β, то *числа* ν_α, ν_β *моментов нетрансверсальности к* α *и к* β *любого движущегося в силу системы лагранжева пространства различаются не более чем на число степеней свободы:* $|\nu_\alpha - \nu_\beta| \leqslant g$.

2) *Если гамильтониан положителен на лагранжевом пространстве* α, то *числа* ν_1 *и* ν_2 *моментов нетрансверсальности к* α *любых двух движущихся в силу системы лагранжевых пространств отличаются не более чем на число степеней свободы* $|\nu_1 - \nu_2| \leqslant g$.

В частности, справедливо такое следствие:

если на некотором интервале времени гамильтониан положителен и некоторая движущаяся лагранжева плоскость трансверсальна некоторой неподвижной, то на этом интервале времени любая движущаяся нетрансверсальна любой неподвижной не более $2g$ *раз.*

Утверждение б) теоремы 1 вытекает из следующего предложения.

Предложение 4. *В вещественной гамильтоновой системе Гаусса–Манина* (4) *пространство* $I_{g+1} = \ldots = I_{2g} = 0$ *лагранжево и существует трансверсальное ему движущееся лагранжево пространство.*

Следствие 1. *На интервале положительности гамильтониана системы* (4) *это движущееся лагранжево пространство нетрансверсально любому неподвижному не более* g *раз.*

Следствие 2. *На интервале положительности гамильтониана системы* (4) *любое движущееся лагранжево пространство нетрансверсально пространству* $I_{g+1} = \ldots = I_{2g} = 0$ *не более* g *раз.*

Мы предъявим даже два таких движущихся пространства, о каких идет речь в предложении 4. Они имеют простой геометрический смысл – это инвариантное и антиинвариантное подпространства в гомологиях вещественной гиперэллиптической кривой относительно ее антиголоморфной инволюции. Неподвижное лагранжево пространство $I_{g+1} = \ldots = I_{2g} = 0$ образовано циклами, аннулируемыми дифференциалами 1-рода. Трансверсальность этого пространства к (анти)инвариантным вытекает, как мы увидим, из слабой формы неравенств Римана – невырожденности матрицы периодов голоморфных форм на компактной римановой поверхности.

Антиголоморфная инволюция. Пусть $\sigma: V_\lambda \mapsto V_\lambda$ – инволюция комплексного сопряжения на вещественной гиперэллиптической кривой рода g. Разложим $H^1(V_\lambda, \mathbb{R})$ на инвариантную и антиинвариантную части $I \oplus A$. При отождествлении касательного пространства к пространству параметров в точке λ и $H^1(V_\lambda, \mathbb{C})$ с помощью дифференциала отображения периодов $[ydx]$ вещественное касательное пространство $T_\lambda \mathbb{R}^{2g}$ представляется 1-формами на V_λ *с вещественными коэффициентами.* Такие 1-формы характеризуются соотношением $\sigma^*\omega = \bar{\omega}$. Отсюда это $T_\lambda \mathbf{R}^{2g}$ переходит в подпространство $R = I \oplus iA \subset H^1(V_\lambda, \mathbf{C})$. Подпространство $<\partial/\partial\lambda_{g+1}, \ldots, \partial/\partial\lambda_{2g}>$ в $T_\lambda \mathbf{R}^{2g}$ представляется 1-формами, голоморфными на бесконечности, т.е. переходит в подпространство

$$\Lambda = R \cap H^{1,0}(V_\lambda, \mathbf{C}) \subset H^1(V_\lambda, \mathbf{C}).$$

Предложение 5 (ср. [3], § 15). Λ, I, iA – *попарно трансверсальные лагранжевы пространства относительно симплектической формы пересечений в R. Более того производящая квадратичная форма лагранжева подпространства $\Lambda \subset \subset I \oplus iA$ знакоопределена.*

Доказательство. Форма пересечений в $H^1(V_\lambda, \mathbf{R})$ антиинвариантна, т.к. σ меняет ориентацию V_λ. Поэтому I и A изотропны и, следовательно, лагранжевы. Форма пересечений $[\cdot, \cdot]$ в $H^1(V_\lambda, \mathbf{C})$ принимает на $R = I \oplus iA$ чисто мнимые значения (так что const в (4) – чисто мнимая константа) и после умножения на i задает на R симплектическую структуру, в которой I и iA лагранжевы. $H^{1,0}(V_\lambda, \mathbf{C})$ – лагранжево подпространство, так как для голоморфных 1-форм ω, ω' на компактной римановой поверхности имеем: $[\omega, \omega'] = \int \omega \wedge \omega' = 0$. Поэтому $\Lambda \subset R$ – тоже лагранжево. Если $[\omega] \in \Lambda \cap I$ или $\in \Lambda \cap iA$, то $[\omega, \bar\omega] = = [\omega, \pm\omega] = \pm [\omega, \omega] = 0$. Но в противоречии с этим $i[\omega, \bar\omega] = i \int \omega \wedge \bar\omega > 0$, если $\omega \neq 0$.

Пусть $\omega = \omega_I + \omega_A$ – разложение $[\omega] \in \Lambda$ на инвариантную и антиинвариантную части. По определению, производящая квадратичная форма $G(\omega) = = i[\omega_A, \omega_I]/2$. Так как $\bar\omega = \omega_I - \omega_A$, то $G(\omega) = i[\omega, \bar\omega]/4$, откуда следует последнее утверждение предложения.

Примечания. 1) Напомним, что матрица периодов – это матрица косоэрмитовой формы $[\omega, \bar\omega]$ на $H^{1,0}(V_\lambda, \mathbf{C})$ в специальном базисе $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g)$ – базис Дарбу в $H_1(V_\lambda, \mathbf{Z})$. Потребуем, чтобы $\oint_{\alpha_l} \omega_k = \delta_{kl}$. Тогда $(\oint_{\beta_l} \omega_k)$ – матрица периодов. Пусть базис $(\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$ состоит из σ-инвариантных циклов. Тогда $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ – базис в Λ, матрица периодов чисто мнима и пропорциональна матрице формы G в этом базисе.

Аналоги теорем 1, 2 справедливы для квазиоднородных миниверсальных деформаций $F_\lambda(x, y)$ простых особенностей функций двух переменных A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8. Рассмотренный выше случай гиперэллиптических кривых отвечает серии A_{2g}. Доказательство в сущности идентично изложенному. В качестве двух отображений периодов надлежит использовать $[ydx]$ и $[dx \wedge dy \wedge dz/d(z^2 - F_\lambda(x, y))]$ для семейства кривых $V_\lambda = F_\lambda^{-1}(0)$ и семейства *поверхностей* $\mathcal{X}_\lambda = \{z^2 = F_\lambda(x, y)\}$ соответственно. Возможно, теорема 2 обобщается на миниверсальные деформации простых особенностей с помощью теории примитивных отображений периодов К. Сайто [5].

3) Предыдущие результаты получены при попытке эффективно оценить число нулей гиперэллиптических интегралов. Эта задача тесно связана с предложенным В.И. Арнольдом ослабленным вариантом 16-й проблемы Гильберта – оценкой числа предельных циклов, рождающихся при неконсервативном возмущении полиномиальной гамильтоновой системы на плоскости. Наша попытка провалилась из-за отсутствия прямой связи между осцилляциями лагранжевых плоскостей и осцилляциями решений в линейных гамильтоновых системах.

Автор благодарен В. И. Арнольду, А. Н. Варченко и В.М. Харламову за многочисленные полезные беседы.

Список литературы

[1] *Варченко А. Н., Гивенталь А. Б.* Отображение периодов и форма пересечени[...] цион. анализ и его прил. *1982.* Т. 16, вып. 2. С. 7–20.

[2] *Гивенталь А. Б.* Сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями [...] ных с простыми особенностями функций // Функцион. анализ и его прил. 1980, Т.14 вып. 2. С. 4–14.

[3] *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференциру[...] бражений. Т. 2. М.: Наука, *1984.*

[4] *Арнольд В. И.* Теоремы Штурма и симплектическая геометрия // Функцион. ан[...] прил. *1985.* Т. 19, вып. 4. С. 1–10.

[5] *Saito K.* Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. *1982.* Vol. 28. P. 775–792.

Институт химической физики АН СССР
117977, Москва, ГСП–1, ул. Косыгина, 4

Поступило 1 дека[...] 1988