Ю. С. Ильяшенко. Топология фазовых портретов на $\mathbb{C}P^2$

ТРУДЫ СЕМИНАРА

ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО

Выпуск 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1978

Ю. С. ИЛЬЯШЕНКО

ТОПОЛОГИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

1. Класс $\mathcal{A}_n$. В этой работе изучаются дифференциальные уравнения с конечным числом особых точек на комплексной проективной плоскости. Как показано в § 2 (следствие из теоремы 1), класс таких уравнений совпадает с классом уравнений, которые в любой аффинной окрестности (z, w) записываются как уравнения с рациональной правой частью:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P}{Q}. \tag{1}$$

В классе уравнений (1) имеется стратификация* по степени многочленов P и Q: если окрестность (z, w) фиксирована и многочлены P и Q имеют степень не выше n, то уравнения (1) образуют класс $\mathcal{A}_n$. Кажется правдоподобным, что этот класс — модельный среди так называемых алгебраических дифференциальных уравнений, определяемых в § 2, и что полученные результаты справедливы в этой более общей ситуации.

Класс $\mathcal{A}_n$ можно отождествить с комплексным числовым пространством размерности $(n+1)(n+2)$ — пространством коэффициентов пар многочленов P, Q степени не выше n. Это пространство снабжено естественной мерой Лебега.

2. Негрубость.

Определение. *Два уравнения α, $\alpha'\in\mathcal{A}_n$ называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $H: \mathbf{C}P^2\longrightarrow\mathbf{C}P^2$ (называемый сопрягающим), переводящий решения уравнения α в решения уравнения α'. Если сопрягающий гомеоморфизм — аналитиче-*

---

* Эта стратификация не очень естественна, поскольку она использует выделенную аффинную карту (z, w). Более естественная стратификация связана с написанием уравнения на $\mathbf{C}P^2$ в виде $\dot{u}=P(u)$, где $u=(u_0, u_1, u_2)$ — однородные координаты на $\mathbf{C}P^2$, P — набор из трех однородных полиномов одной степени. Принятая нами стратификация позволяет выделить классы уравнений, обладающих, по-видимому, теми же свойствами, что и общие алгебраические дифференциальные уравнения, и одновременно поддающиеся изучению.

ское или аффинное преобразование, то уравнения α и α' называются аналитически (аффинно) эквивалентными *.

Уравнение α называется структурно устойчивым в классе $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{A}_n$, если все близкие уравнения $\alpha'\in\mathscr{A}$ топологически эквивалентны α.

Один из основных фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений на вещественной проективной плоскости RP^2 — это теорема Андронова — Понтрягина о структурной устойчивости «общего» уравнения. Эта теорема позволяет в простых терминах описать топологию фазового портрета «общего» уравнения на RP^2. Для сколько-нибудь сложного класса уравнений на $\mathbf{C}P^2$ аналогичная теорема неверна.

Т е о р е м а 2**. *При $n\geqslant 2$ в классе уравнений $\mathscr{A}_n$ нет структурно устойчивых уравнений.*

3. Общие свойства. Тем не менее можно говорить об типичных уравнениях и об общих свойствах уравнений класса $\mathscr{A}_n$.

Свойство уравнения $\alpha\in\mathscr{A}_n$ назовем общим, или типичным, если множество тех уравнений $\alpha\in\mathscr{A}_n$, для которых это свойство не выполняется, имеет лебегову меру ноль. Свойство уравнения $\alpha\in\mathscr{A}_n$ назовем общим по Петровскому — Ландису, если множество тех уравнений, которые не обладают этим свойством, не разделяет пространства $\mathscr{A}_n$. Для краткости вместо «свойство A уравнений $\alpha\in\mathscr{A}_n$ является общим» будем говорить: «Для общего уравнения $\alpha\in\mathscr{A}_n\ldots$ (далее следует формулировка свойства A)» ***.

4. Топологическая эквивалентность уравнений класса $\mathscr{A}_n$. Теорема 2 о структурной неустойчивости — слабейший из полученных в этом направлении результатов. Оказывается, что чем сложнее уравнение $\alpha\in\mathscr{A}_n$, тем меньше в его окрестности уравнений, топологически эквивалентных α. Так, в пространстве $\mathscr{A}_n$ существует плоскость $\mathscr{B}_n$ размерности $(n+2)(n+3)/2$, состоящая из гамильтоновых уравнений $dH=0$, где H — многочлен степени не выше $n+1$. Плоскость $\mathscr{B}_n$ стратифицирована на алгебраические многообразия так, что каждый страт состоит из топологически эквивалентных уравнений. В частности, множество уравнений $\alpha\in\mathscr{B}_n$, структурно устойчивых в классе $\mathscr{B}_n$, открыто и всюду плотно на $\mathscr{B}_n$.

Рассмотрим $2(n+1)$-мерную плоскость $\mathscr{C}_n\subset\mathscr{A}_n$, состоящую из однородных уравнений (1) (P и Q — однородные многочлены степени n). При топологической классификации уравнений $\alpha\in\mathscr{C}_n$ возникают модули; топологический тип общего уравнения $\alpha\in\mathscr{C}_n$ зависит от n комплексных чисел, так называемых характеристических чисел бесконечно удаленных особых точек ****.

Наконец, в окрестности общего уравнения $\alpha\in\mathscr{A}_n$, грубо говоря, вовсе нет уравнений, топологически эквивалентных α. Это утверждение нуждается в уточнении. Любое аффинное преобразование $\mathbf{C}P^2\longrightarrow\mathbf{C}P^2$,

---

* Голоморфизм H: $\mathbf{C}P^2\to\mathbf{C}P^2$ есть просто проективное преобразование. Поэтому аффинная эквивалентность уравнений на $\mathbf{C}P^2$ ненамного сильнее аналитической.

** Эта теорема доказана также в [12]; в § 6 доказывается более сильная теорема 2': если уравнения α и $\alpha'\in\mathscr{A}_n$ топологически эквивалентны, имеют $n+1$ бесконечно удаленных особых точек с характеристическими числами $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$ и $\lambda_1,\ldots,\lambda'_{n+1}$, причем $\operatorname{Im}\lambda_j\neq 0$, то существует линейное отображение A: ${}^R\mathbf{C}\to{}^R\mathbf{C}$ такое, что $A(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1})=(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{n+1})$.

*** Будем говорить также: «Общее уравнение $\alpha\in\mathscr{A}_n\ldots$ (далее следует формулировка свойства А)», например: «Общее уравнение $\alpha\in\mathscr{A}_n$ имеет бесконечно удаленное решение».

**** К л а й н и г В. Дипломная работа, 1972, не опубликована; окончательный вопрос о топологической классификации «типичных» однородных уравнений $\alpha\in\mathscr{C}_n$ решен Ладисом [9].

сохраняющее выделенную окрестность (z, w), переводит уравнение $\alpha\in\mathcal{A}_n$ в топологически эквивалентное уравнение $\alpha'\in\mathcal{A}_n$. Наше утверждение состоит в том, что других уравнений, близких к α и топологически эквивалентных α, не существует.

Теорема 3 (об абсолютной негрубости). *Для общего уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$ существует такая окрестность $U\subset\mathcal{A}_n$ уравнения α и такая окрестность $\mathcal{H}$ тождественного гомеоморфизма $\mathbf{C}P^2\to\mathbf{C}P^2$ в равномерной топологии, что всякое уравнение $\alpha'\in\bar{U}$, топологически эквивалентное α и сопряженное с α гомеоморфизмом $H\in\mathcal{H}$, аффинно эквивалентно уравнению α.*

Будем говорить, что уравнение α, описанное в теореме, абсолютно негрубое.

Замечание 2. Условие близости сопрягающего гомеоморфизма к тождественному, по-видимому, можно снять (см. раздел 4б заключения).

5. Комплексные циклы. Используемые в этом разделе понятия определяются в разделе 1.1; здесь формулируются результаты.

Теорема 4. *На решениях общего уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$, $n\geqslant 2$, имеется счетное число гомологически независимых комплексных предельных циклов.*

Замечание 3. Как доказано в работе [1], уравнение $\alpha\in\mathcal{A}_n$ может иметь не более чем счетное множество гомологически независимых комплексных предельных циклов, поэтому теорема 4 точна.

6. Краткое содержание. Работа состоит из девяти параграфов и заключения. Первый параграф носит вводный характер: в нем обсуждаются основные понятия и идеи доказательств. Во втором параграфе доказана теорема 1.

Параграф 5 посвящен доказательству несколько модифицированной теоремы Худай — Веренова о плотности [2, 5]; хотя в основном результат и не нов, мы приводим его, поскольку он естественно укладывается в контекст и необходим для дальнейшего.

Параграф 6 посвящен доказательству теоремы 2′; параграфы 7 и 8 посвящены доказательству теоремы 3 и являются, с нашей точки зрения, основными; § 9 посвящен доказательству теоремы 4 и предложения 1 (раздел 1.1); это предложение показывает, что понятие комплексного цикла естественно обобщает понятие замкнутой траектории вещественного уравнения (1) на R^2. Все доказательства попарно независимы и могут читаться сразу после § 5.

На содержании параграфов 3 и 4 остановимся несколько подробнее. Они посвящены изучению конечно-порожденных групп ростков конформных отображений $(\mathbf{C}^1, 0)\to(\mathbf{C}^1, 0)$, с операцией «суперпозиция». Группу всех таких ростков обозначим $\mathcal{F}$. Конечно-порожденные группы $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ возникают как «группы монодромии общего уравнения α на бесконечности».

Определение. *Конечно-порожденная подгруппа $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ называется отмеченной, если в ней выбрана упорядоченная система образующих $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$.*

Гомоморфизмом двух отмеченных групп $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}$ с n образующими $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$ и $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ соответственно называется гомоморфизм $k:\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2$, переводящий $\mathfrak{f}_j$ в $\mathfrak{g}_j$.

Две отмеченные подгруппы $\mathcal{F}_1$ с ростков отображений $(\mathbf{C}^1, 0)_1\to$ $\to(\mathbf{C}^1, 0)_1$ и $\mathcal{F}_2:(\mathbf{C}^1, 0)_2\to\mathcal{F}_{1,2}\subset\mathcal{F}$ с n образующими называются топологически (аналитически) эквивалентными, если существует росток *гомеоморфизма (голоморфизма)* $h: (\mathbf{C}^1, 0)_1 \to (\mathbf{C}^1, 0)_2$, *такой, что для любого* $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}_1$, *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{C}^1, 0)_1 \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[d, "\mathbf{h}"'] & (\mathbf{C}^1, 0)_1 \arrow[d, "\mathbf{h}"] \\ (\mathbf{C}^1, 0)_2 \arrow[r, "k\mathfrak{f}"] & (\mathbf{C}^1, 0)_2 \end{tikzcd} \tag{2}$$

коммутативна; здесь k — *гомоморфизм отмеченных групп (изоморфизм в силу коммутативности диаграммы (2)).*

§ 3 посвящен основному техническому приему: приближению в специальной карте ростков линейной функции элементами подгруппы $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ с двумя или более образующими. Средств этого параграфа достаточно для доказательства теоремы Худай — Веренова о плотности (§ 5) и теоремы 4 о счетном числе комплексных предельных циклов (§ 9).

§ 4 посвящен топологической эквивалентности отмеченных подгрупп $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ с n образующими и служит основой для § 6—8.

Теорема 5 (§ 4) показывает, что задача о топологической классификации таких подгрупп имеет не менее $(n-1)$ комплексных модулей. Эти модули выражаются через линейные части образующих $\mathfrak{f}_j$ в нуле. Соображения раздела 1.4 позволяют сразу получить отсюда теорему 2.

Теорема 6 (§ 4) показывает, что для общих отмеченных подгрупп $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ более чем с одной образующей топологическая эквивалентность равносильна аналитической.

Отсюда выводится теорема 3.

Теоремы 2—4 формулируются как свойства «общих уравнений» класса $\mathcal{A}_n$ и сопровождаются уточнениями, в которых на уравнения накладываются конкретные требования, а затем проверяется, что эти требования выполняются для почти всех уравнений $\alpha \in \mathcal{A}_n$. В заключении обсуждаются гипотезы, которые позволили бы распространить теоремы 2—4, а также теорему о плотности на все уравнения $\alpha \in \mathcal{A}_n$, кроме однородных (и им аффинно эквивалентных), гамильтоновых и, может быть, еще каких-нибудь столь же просто описываемых, и для которых перечисленные теоремы могут не выполняться только по очевидным причинам.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Определения

Определения, приводимые ниже для уравнений $\alpha \in \mathcal{A}_n$, дословно (или с очевидными изменениями) переносятся на любые аналитические дифференциальные уравнения.

А. Решения. *Аналитическая кривая* φ *называется решением уравнения* α, *если в каждой своей точке она касается направлений поля* α, *неприводима, полна (т. е. не содержится ни в какой неприводимой аналитической кривой* $\tilde{\varphi} \supset \varphi$, *касающейся направлений поля* α) *и не содержит особые точки уравнения* α *(даже если присоединение особой точки оставляет кривую* φ *голоморфной).*

В силу этого определения решение φ есть одномерное комплексное многообразие, вложенное в $\mathbf{C}P^2$. Решение с начальным условием p всюду обозначается φ_p.

В. Циклы. *Циклом на решении φ уравнения α (или комплексном циклом уравнения α) называется нетривиальный (отличный от единичного) элемент фундаментальной группы $\pi_1(\varphi)$.*

Циклы γ_n на решениях уравнения α называются гомологически независимыми, если те из них, которые лежат на одном решении, гомологически независимы на этом решении.

С. Комплексная функция последования. С каждым комплексным циклом γ, лежащим на решении φ уравнения α, связана (комплексная) функция последования, обозначаемая $\Delta_{\gamma,\alpha}$ или Δ_γ, когда уравнение α фиксировано [1, 3].

Пусть петля $\gamma:[0, 1]\to\varphi$ — представитель класса $[\gamma]\in\pi_1(\varphi)$, $p=\gamma(0)$ — начальная точка петли; Γ_τ — трансверсаль к решению φ в точке $\gamma(\tau)$, непрерывно зависящая от τ, и такая, что $\Gamma(0)=\Gamma(1)$ — аналитическая. По теореме о непрерывной зависимости решения от начального условия существует такая окрестность $V\subset\Gamma_0$ $(\Gamma_0\overset{\text{def}}{=}\Gamma_1=\Gamma)$ точки p, что для каждого $q\in V$ на решении φ_q существует кривая $\gamma_q=\{q(\tau)\in\Gamma(\tau)\}$ с началом $q(0)=q$, такая, что разность $\gamma_q\setminus q$ *взаимно-однозначно* проектируется на $\gamma\setminus P$ вдоль трансверсалей Γ_τ: $\gamma_q(\tau)\longmapsto\gamma(\tau)$. Конец кривой γ_q обозначается $\Delta_\gamma(q)$. Тем самым определено (аналитическое в силу теоремы об аналитической зависимости решения от начального условия) отображение

$$\Delta_\gamma:(\Gamma, p)\to(\Gamma, p),\ q\to\Delta_\gamma(q).$$

Росток $\boldsymbol{\Delta}_\gamma$ отображения Δ_γ в точке p не зависит от выбора представителя в классе $[\gamma]\in\pi_1(\varphi)$ [1].

Соглашение. Карта на трансверсали (Γ, p) всегда выбирается так, что точка p имеет координату 0.

D. Предельные и тождественные циклы. Для уравнений класса $\mathcal{A}_n$ трансверсали к решениям одномерны; неподвижная точка p отображения Δ_γ может быть либо изолированной — тогда цикл γ называется *предельным*, либо неизолированной — тогда отображение Δ_γ — тождественное, и цикл γ называется *тождественным*.

Замечание 4. Комплексные циклы уравнений $\alpha\in\mathcal{A}_n$ — естественное обобщение вещественных замкнутых траекторий, как показывает следующее предложение:

Предложение 1. *Замкнутая фазовая кривая $\gamma\subset RP^2$ вещественного уравнения $\alpha\in A_n$ — цикл на своей комплексификации ${}^C\gamma$. Другими словами, петля γ не стягивается на решении $\varphi={}^C\gamma$ уравнения α.*

В случае, когда γ — вещественный предельный цикл, это предложение доказано в работе [1]; доказательство для общего случая приведено в начале § 9.

Е. Группа монодромии уравнения α над решением φ. Всюду в дальнейшем росток отображения $(\mathbf{C}^1, 0)\longrightarrow(\mathbf{C}^1, 0)$ обозначается полужирной буквой, а его представитель — той же самой обычной буквой.

Пусть φ — решение уравнения $\alpha\in A_n$; обозначим через Δ отображение $\pi_1(\varphi)\to\mathcal{F}:\gamma\to\boldsymbol{\Delta}_\gamma$. Произведению петель соответствует суперпозиция ростков функций последования: $\boldsymbol{\Delta}_{\gamma'\gamma''}=\boldsymbol{\Delta}_{\gamma''}\circ\boldsymbol{\Delta}_{\gamma'}$. Поэтому *отображение Δ — гомоморфизм. Его образ и называется группой монодромии уравнения α над решением φ и обозначается $\mathscr{F}_{\alpha,\varphi}$.*

Выбор образующих в группе $\pi_1(\varphi)$ превращает φ в „отмеченную риманову поверхность“ (по терминологии Тейхмюллера), а $\mathscr{F}_{\alpha,\varphi}$ — в отмеченную подгруппу группы $\mathscr{F}$ (см. раздел 6 введения). Поэтому, выбрав образующие в $\pi_1(\varphi)$, мы будем говорить об отмеченной группе монодромии $\mathscr{F}_{\alpha,\varphi}$.

2. О выборе класса $\mathscr{A}_n$

Теоремы о плотности (§ 5), абсолютной негрубости (теорема 3) и о счетном числе циклов (теорема 4) получаются изучением группы монодромии $\mathscr{F}_\alpha$ уравнения α над так называемым бесконечно удаленным решением F_α и используют тот факт, что фундаментальная группа $\pi_1(F_\alpha)$ богата: в общем случае это — свободная группа с n образующими. Прямое обобщение этого метода не проходит по следующей причине: для общего уравнения

$$\dot z = P(z),\quad z\in \mathbf{C}^n,\quad n\geqslant 3 \tag{3}$$

(P — векторный полином) не удается найти решения, фундаментальная группа которого была бы богаче, чем $\mathbf{Z}$. Представляется правдоподобным, что для общего уравнения на $\mathbf{C}P^3$ таких решений и нет (родственная гипотеза обсуждается в разделе 6). Тем не менее модификации этого метода позволили доказать локальную типичность* свойства плотности решений для уравнений (3) [8], и есть надежда, что теоремы 3 и 4 допускают аналогичное обобщение.

3. Группа монодромии уравнения α на бесконечности. Класс $\mathscr{A}'_n$

Чтобы изучить продолжение поля направлений (1), задающего уравнения $\alpha\in\mathscr{A}_n$, из окрестности (z, w) на $\mathbf{C}P^2$, рассмотрим другую аффинную карту:

$$(z_1,\ w_1)=\left(\frac{1}{z},\ \frac{w}{z}\right). \tag{4}$$

В этой карте поле направлений (1) имеет вид

$$\frac{dz_1}{dw_1}=\frac{z_1\widetilde{Q}_1}{w_1\widetilde{Q}-\widetilde{P}}, \tag{5}$$

где $\widetilde{P}(z_1,\ w_1)=z^n{}_1P(1/z_1,\ w_1/z_1)$,

$$\widetilde{Q}(z_1,\ w_1)=z^n{}_1Q(1/z_1,\ w_1/z_1).$$

Положим, что

$$p(w_1)=w_1\widetilde{Q}-\widetilde{P}\big|_{z_1=0}.$$

Если $p\not\equiv 0$, то проективная прямая $\{z_1=0\}$, называемая бесконечно удаленной прямой, из которой выколоты особые точки уравнения α, является решением; это решение обозначается F_α. Особые точки, лежащие на бесконечно удаленной прямой, называются бесконечно удаленными особыми точками; в карте (z_1, w_1) их вторая координата находится из уравнения $p(w_1)=0$. Общее по Петровскому — Ландису уравнение

---

* Свойство уравнения (3) называется локально типичным, если оно выполняется для почти всех (по мере Лебега) уравнений из некоторой области пространства коэффициентов.

$\alpha\in\mathcal{A}_n$ имеет $n+1$ различных бесконечно удаленных особых точек $(0, a_j)$, $j=1, \ldots, n+1$, обозначаемых для краткости a_j (или $a_j(\alpha)$). Множество всех таких уравнений $\alpha\in\mathcal{A}_n$ обозначим $\mathcal{A}'_n$.

Определение. *Группой монодромии уравнения α на бесконечности называется группа $\mathcal{F}_{\alpha, F(\alpha)}$. Эта группа обозначается $\mathcal{F}_\alpha$. Она определена однозначно, если фиксирована базисная точка a фундаментальной группы $\pi_1(F_\alpha)$ и трансверсаль $\Gamma\ni a$.*

Группа $\pi_1(F_\alpha)$ — свободная с n образующими, в качестве образующих можно выбрать петли μ_j, $j=1, \ldots, n$, каждая из которых обходит один раз точку a_j в положительном направлении и ни разу не обходит точку a_i при $i\neq j$, будем называть эти петли каноническими образующими (их выбор неоднозначен). В группе $\mathcal{F}_\alpha$ возникают канонические образующие

$$\mathbf{f}_{j,\alpha}=\mathbf{\Delta}_{\mu_j,\alpha}$$

Поскольку петли μ_j остаются образующими для группы $\pi_1(F_{\alpha'})$ при всех α', достаточно близких к α, образующие $\mathbf{f}_{j,\alpha'}$ группы $\mathcal{F}_{\alpha'}$ аналитически зависят от α'.

4. Топологическая эквивалентность уравнений и групп монодромии

Чтобы пояснить наш метод, приведем две леммы, выражающие тот простой и важный факт, что топологическая эквивалентность уравнений влечет за собой топологическую эквивалентность групп монодромии.

Лемма 1. *Пусть уравнения α, $\alpha'\in\mathcal{A}_n$ топологически эквивалентны, H — сопрягающий гомеоморфизм. Пусть φ^1 — произвольное отмеченное решение уравнения α (т. е. выбраны образующие μ_{j1} группы $\pi_1(\varphi^1)$), и $\varphi^2=H(\varphi^1)$, $\mu_{j2}=H(\mu_{j1})$—образующие группы $\pi_1(\varphi^2)$. Тогда отмеченные группы монодромии $\mathcal{F}_{\alpha,\varphi^1}$ и $\mathcal{F}_{\alpha',\varphi^2}$ топологически эквивалентны* (см. 0.6, (2)); *сопрягающий гомеоморфизм h определяется гомеоморфизмом H.*

Доказательство. Пусть a^1 — базисная точка группы $\pi_1(\varphi^1)$, $a^2=H(a^1)$; Γ_1 и Γ_2 — трансверсали к φ^1 и φ^2 в точках a^1 и a^2 соответственно. Пусть O_1 — окрестность точки a^1, слоение которой на решения уравнения α топологически эквивалентно стандартному (т. е. слоению бидиска $\{|z|<1\}\times\{|w|<1\}$ на круги $w=\text{const}$) и пусть $\pi^1: O_1\to\Gamma_1$ — проектирование вдоль решений. Пусть $O_2=H(O_1)$ — окрестность точки a^2 и пусть $\pi^2: O_2\to\Gamma_2$ — росток в точке a^2 отображения проектирования вдоль решений. Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{H} & Q_2 \\ {\scriptstyle\pi^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi^2} \\ (\Gamma_1, a^1) & \xrightarrow{h} & (\Gamma_2, a^2) \end{array} \tag{6}$$

определяет росток гомеоморфизма $h: (\Gamma_1, a^1)\to(\Gamma_2, a^2)$, или, что то же (см. соглашение 1C), $(\mathbf{C}^1, 0)\to(\mathbf{C}^1, 0)$. Поскольку гомеоморфизм H сопрягает уравнения α и α', гомеоморфизм h сопрягает отмеченные группы монодромии $\mathcal{F}_{\alpha,\varphi^1}$ и $\mathcal{F}_{\alpha',\varphi^2}$. Лемма доказана.

Лемма 1'. *Пусть $\alpha\in\mathcal{A}'_n$ — уравнение, не имеющее алгебраических решений, рода 0 кроме F_α, $\mu_j: j=1, \ldots, n$—канонические образующие* *отображение Δ — гомоморфизм. Его образ и называется группой монодромии уравнения α над решением φ и обозначается $\mathcal{F}_{\alpha, \varphi}$.*

Выбор образующих в группе $\pi_1(\varphi)$ превращает φ в „отмеченную риманову поверхность“ (по терминологии Тейхмюллера), а $\mathcal{F}_{\alpha, \varphi}$ — в отмеченную подгруппу группы $\mathcal{F}$ (см. раздел 6 введения). Поэтому, выбрав образующие в $\pi_1(\varphi)$, мы будем говорить об отмеченной группе монодромии $\mathcal{F}_{\alpha, \varphi}$.

2. О выборе класса $\mathcal{A}_n$

Теоремы о плотности (§ 5), абсолютной негрубости (теорема 3) и о счетном числе циклов (теорема 4) получаются изучением группы монодромии $\mathcal{F}_\alpha$ уравнения α над так называемым бесконечно удаленным решением F_α и используют тот факт, что фундаментальная группа $\pi_1(F_\alpha)$ богата: в общем случае это — свободная группа с n образующими. Прямое обобщение этого метода не проходит по следующей причине: для общего уравнения

$$\dot{z} = P(z), \quad z \in \mathbf{C}^n, \quad n \geqslant 3 \tag{3}$$

(P — векторный полином) не удается найти решения, фундаментальная группа которого была бы богаче, чем $\mathbf{Z}$. Представляется правдоподобным, что для общего уравнения на $\mathbf{C}P^3$ таких решений и нет (родственная гипотеза обсуждается в разделе 6). Тем не менее модификации этого метода позволили доказать локальную типичность* свойства плотности решений для уравнений (3) [8], и есть надежда, что теоремы 3 и 4 допускают аналогичное обобщение.

3. Группа монодромии уравнения α на бесконечности. Класс $\mathcal{A}'_n$

Чтобы изучить продолжение поля направлений (1), задающего уравнения $\alpha \in \mathcal{A}_n$, из окрестности (z, w) на $\mathbf{C}P^2$, рассмотрим другую аффинную карту:

$$(z_1, w_1) = \left(\frac{1}{z}, \frac{w}{z}\right). \tag{4}$$

В этой карте поле направлений (1) имеет вид

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1 \widetilde{Q}_1}{w_1 \widetilde{Q} - \widetilde{P}}, \tag{5}$$

где $\widetilde{P}(z_1, w_1) = z^n{}_1 P(1/z_1, w_1/z_1)$,

$$\widetilde{Q}(z_1, w_1) = z^n{}_1 Q(1/z_1, w_1/z_1).$$

Положим, что

$$p(w_1) = w_1 \widetilde{Q} - \widetilde{P}\big|_{z_1=0}.$$

Если $p \not\equiv 0$, то проективная прямая $\{z_1 = 0\}$, называемая бесконечно удаленной прямой, из которой выколоты особые точки уравнения α, является решением; это решение обозначается F_α. Особые точки, лежащие на бесконечно удаленной прямой, называются бесконечно удаленными особыми точками; в карте (z_1, w_1) их вторая координата находится из уравнения $p(w_1) = 0$. Общее по Петровскому — Ландису уравнение

* Свойство уравнения (3) называется локально типичным, если оно выполняется для почти всех (по мере Лебега) уравнений из некоторой области пространства коэффициентов.

ные отображения в некоторую связную окрестность нуля Ω_0. *Элементом соответствующей псевдогруппы преобразований* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}', \Omega_0}$ (*иногда пишем просто* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$) *является пара* $(\mathfrak{f}, \Omega_{\mathfrak{f}}) : \mathfrak{f} \in \mathcal{F}'$, *область* $\Omega_{\mathfrak{f}}$ *определяется ниже*; *операция задается равенством**

$$(\mathfrak{f}, \Omega_{\mathfrak{f}}) \circ (\mathfrak{g}, \Omega_{\mathfrak{g}}) = (\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}, \Omega_{\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}}).$$

Определим область $\Omega_{\mathfrak{f}}$. Всякое представление $\Pi_{\mathfrak{f}}$ ростка $\mathfrak{f}$ в виде суперпозиции $\prod\limits_{k=1}^{N} \mathfrak{f}_{j_k}^{\varepsilon_k} = \mathfrak{f}_{j_1}^{\varepsilon_1} \circ \ldots \circ \mathfrak{f}_{j_N}^{\varepsilon_N}$, $j_k \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, назовем допустимым.

Промежуточным ростком для представления $\Pi_{\mathfrak{f}}$ называется росток $\prod\limits_{k=1}^{K} \mathfrak{f}_{j_k}^{\varepsilon_k}$, $K < N$ произвольно. Определим $\Omega_{\Pi_{\mathfrak{f}}}$ как максимальную звездную область с центром в точке 0, принадлежащую Ω_0, в которую росток $\mathfrak{f}$ и все промежуточные ростки представления $\Pi_{\mathfrak{f}}$ продолжаются, как конформные отображения, обозначаемые $\prod\limits_{k=1}^{K} f_{j_k}^{\varepsilon_k}$, причем $\left(\prod\limits_{k=1}^{K} f_{j_k}^{\varepsilon_k}\right)(\Omega_{\Pi_{\mathfrak{f}}}) \subset \Omega_0$.

Определим, наконец, область $\Omega_{\mathfrak{f}}$ как объединение областей $\Omega_{\Pi_{\mathfrak{f}}}$, соответствующих всем допустимым представлениям $\Pi_{\mathfrak{f}}$ ростка $\mathfrak{f}$.

Иногда мы будем писать $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$ вместо $(\mathfrak{f}, \Omega_{\mathfrak{f}}) \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$, подразумевая, что представитель f ростка $\mathfrak{f}$ рассматривается, как конформное отображение области $\Omega_{\mathfrak{f}}$.

Орбитой точки p *под действием псевдогруппы отображений* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$ *называется множество*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}(p) = \{f(p) \mid \mathfrak{f} \in \mathcal{F}' : p \in \Omega_{\mathfrak{f}}\}.$$

Замечание 5. Очевидно, каждый росток $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}'$ допускает аналитическое продолжение в область $\Omega_{\mathfrak{f}}$, как конформное отображение.

Определение. *Пусть* $\mathcal{F}_\alpha$ — *группа преобразований монодромии на бесконечности для уравнения* α, $\mathfrak{f}_{j,\alpha}$ — *канонические образующие группы* $\mathcal{F}_\alpha$, *и пусть* Ω_0 — *та область, в которой определены соответствующие функции последования. Псевдогруппа отображений* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_\alpha, \Omega_0}$ *и называется псевдогруппой преобразований монодромии уравнения* α *на бесконечности*; *обозначается* $\mathcal{P}_\alpha$.

Громоздкое определение псевдогруппы отображений $\mathcal{P}_\alpha$ оправдывается следующим очевидным предложением:

Предложение 2. *Орбита* $\mathcal{P}_\alpha(p)$ *точки* p *под действием псевдогруппы преобразований монодромии уравнения* α *на бесконечности принадлежит пересечению решения* φ_p *уравнения* α *с трансверсалью* Γ.

* „Псевдогруппа отображений“ $\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$ есть, очевидно, группа, изоморфная группе $\mathcal{F}'$. Но $\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$ не есть „группа отображений“. Этим объясняется необходимость введения термина „псевдогруппа отображений“; эти два слова употребляются как одно целое.

группы $\pi_1(F_\alpha, a)$ и пусть $U_\alpha \subset \mathcal{A}_n$ такая окрестность точки α, что те же петли μ_j служат образующими в группе $\pi_1(F_{\alpha'}, a)$ для любого $\alpha' \in U_\alpha$, и уравнения $\alpha' \in U_\alpha$ не имеют алгебраических решений. Пусть Γ — трансвераль к $F_{\alpha'}$ в точке a. Для каждого $\alpha' \in U_\alpha$ возникает отмеченная группа монодромии $\mathcal{F}_{\alpha'}: (\Gamma, a) \to (\Gamma, a)$. Пусть уравнения α и $\alpha' \in U_\alpha$ сопряжены гомеоморфизмом H, причем $\|H - \mathrm{id}\|_C = \rho$. Тогда существует такое $\rho_0 > 0$, что из равенства $\rho < \rho_0$ следует топологическая эквивалентность отмеченных групп $\mathcal{F}_\alpha$ и $\mathcal{F}_{\alpha'}$.*

Доказательство. Уравнение α' не имеет решений с компактным замыканием (алгебраических решений), кроме $F_{\alpha'}$. Поэтому $H(F_\alpha) = F_{\alpha'}$. Пусть a — начальная точка петель μ_j, и O — окрестность точки a, слоение которой на решения уравнения α эквивалентно стандартному. Число ρ_0 можно выбрать столь малым, что $H(a) \in O$; тогда гомеоморфизм H можно изменить только в окрестности O так, что будет $H(a) = a$. Заметим, что в окрестности U_α особые точки $a_j(\alpha)$ зависят от α аналитически. Набор особых точек $\{a_j(\alpha)\}$ переходит в набор $\{a_j(\alpha')\}$; при достаточно малом ρ_0, $H(a_j(\alpha)) = a_j(\alpha')$ и $H(\mu_j) = \mu_j$ как элементы групп $\pi_1(F_\alpha, a)$ и $\pi_1(F_{\alpha'}, a)$.

Лемма I′ следует теперь из леммы 1.

5. Псевдогруппы преобразований монодромии

Для того чтобы изучать пересечение решения φ', близкого к решению φ, с трансверсалью Γ, можно рассматривать орбиту точки $p \in \varphi' \cap \Gamma$ под действием преобразований монодромии $\Delta_\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha, \varphi}$. Возникают, однако, две неприятности. Во-первых, не всякий росток $\Delta_\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha, \varphi}$ допускает аналитическое продолжение в точку p. Во-вторых (и это более важно), может случиться, что аналитическое продолжение ростка Δ_γ в точку p существует, а функция последования Δ_γ в точке p не определена**. Поэтому возникает необходимость особо позаботится об области определения продолжений ростков $\Delta_\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha, \varphi}$ и наряду с группой монодромии $\mathcal{F}_{\alpha, \varphi}$ рассматривать псевдогруппу преобразовании монодромии $\mathcal{P}_{\alpha, \varphi}$.

Определение. *Пусть $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ — конечно-порожденная подгруппа с образующими $\mathfrak{f}_j$, $j = 1, \dots, n$, которые продолжаются как конформ-*

---

* Множество уравнений $\alpha \in \mathcal{A}_n$, не имеющих алгебраических решений, рода 0, кроме F_α, открыто по Зарискому, т. е. является дополнением до алгебраического многообразия [1]; поэтому окрестность U_α с описанными свойствами всегда можно выбрать.

** Например, группа монодромии гамильтонова уравнения $\alpha \in \mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$ на бесконечности коммутативна (она конечна, а коммутатор двух ростков конформных отображений $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)$ либо тождествен, либо порождает бесконечную циклическую группу). Поэтому для любой петли $\gamma \in [\pi_1(F_\alpha), \pi(F_\alpha)]$ росток $\Delta_{\gamma, \alpha} = \mathrm{id}$ аналитически продолжается на всю комплексную прямую Γ. Однако результат продолжения решения φ уравнения α над кривой γ может отличаться от начального значения, если оно достаточно далеко от нуля, поскольку φ—алгебраическая функция от w_1. Тем самым функция последования $\Delta_{\gamma, \alpha}$ определена не для всех $p \in \Gamma$ (в противном случае она была бы всюду тождественна).

$\mathscr{F}_\alpha$ — группа монодромии уравнения α на ∞;

$\mathscr{P}_\alpha$ — псевдогруппа преобразований монодромии уравнения α на бесконечности;

$\mathscr{P}'_\alpha$ — замыкание подгруппы группы $\mathbf{C}^*$ комплексных чисел по умножению, порожденной числами $\nu_{j,\alpha}$;

если уравнение α фиксировано, то вместо $f_{j,\alpha}$, $\nu_{j,\alpha}$, $\mathscr{P}_\alpha$, $\mathscr{P}'_\alpha$ пишется f_j, ν_j, $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$.

Пусть X — топологическое пространство, $x \in X$. Тогда (X, x), $(X, x)'$ и т. д. обозначает окрестность точки x в пространстве X;

$f:(X, x) \to (Y, y)$ — отображение некоторой окрестности (X, x) на окрестность (Y, y), $f(x)=y$;

$\mathbf{f}:(X, x) \to (Y, y)$ — росток в точке x отображения $X \to Y$, переводящий x в y.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Результаты этого параграфа показывают, что класс определяемых ниже алгебраических дифференциальных уравнений весьма естествен. В частности, они мотивируют выбор класса уравнений с рациональной правой частью. В дальнейшем эти результаты не используются. Фигурирующие ниже алгебро-геометрические понятия можно найти, например, в работе [13].

1. Аналитические и алгебраические дифференциальные уравнения

Определение. *Аналитическим дифференциальным уравнением, заданным в области Ω проективного алгебраического многообразия X, называется аналитическое сечение проективизированного касательного расслоения ${}^pTX$ (аналитическое поле направлений на X).*

Для того чтобы уравнение на Ω наследовало свойства многообразия X, нужно потребовать, чтобы разность $Y=X-\Omega$ была достаточно бедной.

Определение. *Скажем, что голоморфное сечение $s:\Omega \to {}^pTX$ задает аналитическое дифференциальное уравнение с особенностями на всем X, если множество Y принадлежит аналитическому подмножеству $Y' \subset X$ коразмерности 2. Если не существует области $\Omega' \supset \Omega$, на которую можно голоморфно продолжить сечение s, то Y называется множеством особых точек уравнения s.*

Определение. *Пусть X — проективное алгебраическое многообразие и $s:X \to {}^pTX$ — бирациональное отображение. Тогда s называется алгебраическим дифференциальным уравнением на X.*

Основным результатом параграфа является

Теорема 1. *Аналитическое дифференциальное уравнение на проективном алгебраическом многообразии является алгебраическим.*

2. Аналитические дифференциальные уравнения на $\mathbf{C}P^2$

Из теоремы 1 немедленно получается

Следствие 1. *Аналитическое дифференциальное уравнение на комплексном проективном пространстве $\mathbf{C}P^n$ в аффинной карте $\mathbf{C}^n = \{z\}$ задается полиномиальным векторным полем $\dot z=P(z)$, P — векторный многочлен.*

Часть теорем, перечисленных во введении, доказывается с помощью изучения псевдогруппы $\mathcal{P}_\alpha$ преобразований монодромии на бесконечности для уравнения α. Например, плотность орбиты $\mathcal{P}_\alpha(p)$ в окрестности точки a влечет плотность решения φ_p уравнения α в окрестности той же точки, а наличие преобразования $f\in\mathcal{P}_\alpha$ с изолированной неподвижной точкой p влечет существование комплексного предельного цикла на решении φ_p уравнения α.

6. Гипотеза об односвязности общего решения

Среди вопросов о топологии уравнений класса $\mathcal{A}_n$ уместно упомянуть следующую гипотезу.

Каждое решение общего уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$, *за исключением счетного числа решений, односвязно.*

В силу теоремы 4 у общего уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$ существует счетное число неодносвязных решений. Кроме того, число решений, несущих комплексные предельные циклы, не более чем счетно. Поэтому наша гипотеза равносильна следующей.

Общее уравнение $\alpha\in\mathcal{A}_n$ *не имеет тождественных циклов.*

Более слабое утверждение уже является теоремой:

На бесконечно удаленном решении F_α *общего уравнения* $\alpha\in\mathcal{A}_n$ — *нет тождественных циклов.* Другими словами: *для общего уравнения* $\alpha\in\mathcal{A}_n$ *группа* $\mathcal{F}_\alpha$ — *свободная с n образующими, более того, отображение* $\Delta:\pi_1(F_\alpha)\to\mathcal{F}_\alpha$ — *изоморфизм.*

Перечисленные теоремы будут предметом следующей статьи.

В заключение сведем воедино принятые ранее и некоторые новые обозначения.

7. Обозначения

$\mathcal{A}_n$ — класс уравнений (1), где P и Q — многочлены степени не выше n;

F_α — бесконечно удаленное решение уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$ (существующее для общего уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$);

$\mathcal{A}'_n$ — класс уравнений $\alpha\in\mathcal{A}_n$, имеющих $n+1$ различных бесконечно удаленных особых точек;

a_j (или $a_j(\alpha)$) — w_1 — координаты бесконечно удаленных особых точек уравнения α; так же обозначаются и сами эти точки;

a — произвольно выбранная и фиксированная базисная точка фундаментальной группы $\pi_1(F_\alpha)$;

μ_j — канонические образующие фундаментальной группы $\pi_1(F_\alpha)$;

Γ — трансверсаль к F_α в точке a;

$\mathbf{f}_{j,\alpha}$ — функция последования $(\Gamma, a)\to(\Gamma, a)$, соответствующая петле μ_j и уравнению α;

$\nu_{j,\alpha}=\mathbf{f}'_{j,\alpha}(a)$ (эта производная определена корректно, т. е. не зависит от карты на Γ, поскольку a — неподвижная точка отображения $f_{j,\alpha}$);

$\mathcal{F}$ — группа ростков конформных отображений $(\mathbf{C}^1, 0)\to(\mathbf{C}^1, 0)$ на себя с операцией «суперпозиция»;

карта $\zeta(\zeta(0)=0)$, *определенная однозначно с точностью до умножения на константу, и такая, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^1, 0) & \xrightarrow{\mathrm{f}} & (\mathbf{C}^1, 0) \\ \zeta\downarrow & & \downarrow\zeta \\ (\mathbf{C}^1, 0) & \xrightarrow{\nu} & (\mathbf{C}^1, 0) \end{array}$$

коммутивна; здесь ν — *росток преобразования — умножения на* ν.

Будем говорить для краткости, что карта ζ линеаризует отображение f.

В § 7 нам понадобится следующая теорема Шредера о линеаризации семейства.

Пусть $\{\mathrm{f}_t\}$ — аналитическое (многомерное) семейство ростков конформных отображений $(\mathbf{C}^1, 0)\to(\mathbf{C}^1, 0)$, причем $|\mathrm{f}'_t(0)|\neq 1$ при всех t. Тогда в окрестности нуля на $\mathbf{C}^1$ определено аналитическое семейство карт $\{\zeta_t\}$, такое, что карта ζ_t линеаризует росток f_t; семейство $\{\zeta_t\}$ определено однозначно, с точностью до умножения на аналитическую функцию $\nu(t)$, нигде не равную нулю.

2. Приближение линейной функции элементами псевдогруппы

Лемма 3*. *Пусть* $\mathscr{P}$ — *конечно-порожденная псевдогруппа конформных отображений* $(\mathbf{C}^1, 0)\to(\mathbf{C}^1, 0)$; *ее образующие* f_j, $j=1, \ldots, n$, *определены в окрестности* Ω_0 *точки* 0. *Пусть, кроме того,* $|f'_1(0)|\neq 1$, *и карта* ζ, *линеаризующая отображение* f_1, *определена в окрестности* $U\subset\Omega_0$, *причем окрестность* U *в карте* ζ *представляет собой круг* $|\zeta|<\rho$. *Обозначим через* $\mathscr{P}'$ *замыкание подгруппы группы* $\mathbf{C}^*$, *порожденной производными* $\nu_j=f'_j(0)$. *Тогда для любого* $\nu\in\mathscr{P}'$ *существует последовательность отображений* $F_l\in\mathscr{P}$, *равномерно сходящаяся к отображению* $\nu:\zeta\to\nu\zeta$ *в любой компактной подобласти* K *области* $U\cap\nu^{-1}U=\{p\in U\,|\,|\zeta(p)|<|\nu|\rho\}$.

Равномерная сходимость на K последовательности $F_l\in\mathscr{P}$ подразумевает, что $K\subset\Omega_{F_l}$ для всех достаточно больших l.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\nu=f'(0)$ для некоторого $f\in\mathscr{P}$. Пусть $f'_1(0)=\nu_1$, $|\nu_1|<1$ (в противном случае в дальнейших рассуждениях мы заменили бы f_1 на f_1^{-1}). Положим $F_l=f_1^{-l}\circ f\circ f_1^l$. Пусть отображения f и F_l записываются в карте ζ функциями $f(\zeta)$ и $F_l(\zeta)$ и пусть

$$f(\zeta)=\nu\zeta+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\zeta^k.$$

Тогда

$$F_l(\zeta)=\nu\zeta+\sum_{k=2}^{\infty}a_k\nu_1^{l(k-1)}\zeta^k.$$

Отсюда следует, что функция $F_l(\zeta)$ определена и однолистна в круге U для всех достаточно больших l $(l>L)$, причем

$$F_l(\zeta)|_U\rightrightarrows\nu\zeta.$$

* Эта лемма в несколько иной формулировке доказана в [5].

Замечание 1. В силу нашего определения аналитическое поле направлений задает дифференциальное уравнение на плоскости CP^2, только если оно имеет конечное число особых точек. В этом случае, в силу следствия 1 в аффинной карте (z, w) наше уравнение имеет вид (1).

3. Доказательство теоремы 1

В работе [3] доказана

Лемма 2. *Аналитические дифференциальные уравнения на многообразии X (не обязательно алгебраическом) это те и только те, для которых соответствующее поле направлений локально задается аналитическим векторным полем.*

Мы должны доказать, что сечение $s: \Omega \to {}^pTX$ есть ограничение на Ω бирационального отображения $X \to {}^pTX$. Пусть π — проектирование ${}^pTX \to X$, $y \in Y$ — произвольная особая точка уравнения s, V — окрестность точки y, над которой расслоение ${}^pTX$ тривиально, и z — карта на V, $z(y)=0$. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — однородные координаты на слоях ${}^pT_z$, $z \in V$. По лемме 1 поле направлений ζ в области $\Omega \cap V$ задается векторным полем $v(z)=(v_1(z), \ldots, v_n(z))$. Это значит, что образ $s(\Omega \cap V)$ задается уравнениями

$$\zeta_i v_j(z) - \zeta_j(v_i)(z) = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

$$z \in \Omega \cap V. \tag{8}$$

Таким образом, множество $s\Omega$ принадлежит замкнутому аналитическому подмножеству $S \subset {}^pTX$, которое совпадает с $s\Omega$ в области $\pi^{-1}\Omega$ и задается уравнениями (7) над окрестностью произвольной особой точки $y \in Y$. Заметим, что X, а значит, и ${}^pTX$ — проективные алгебраические многообразия и π — алгебраическое отображение. В силу теоремы Чжоу [3, стр. 214] S — алгебраическое подмногообразие ${}^pTX$. Обозначим через S' неприводимую компоненту S, содержащую $s(\Omega)$. Ограничение $\pi|_{S'}$ — алгебраическое отображение, обратное s и взаимно-однозначное на открытом по Зарискому подмножество $s(\Omega) \subset S'$. Следовательно, s и $\pi|_{S'}$ бирациональны, что и требовалось доказать.

§ 3. ПСЕВДОГРУППЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Этот параграф посвящен основному для дальнейшего техническому приему: приближению функций, линейных в специальной карте, элементами псевдогруппы отображений. Начнем с известных результатов о линеаризации отображений $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)$.

1. Теорема Шредера [4]. *Всякий росток $\mathfrak{f}$ конформного отображения $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)$, у которого производная* в нуле $\nu = \mathfrak{f}'(0)$ отлична по модулю от 1, аналитически эквивалентен своей линейной части. Другими словами, в некоторой окрестности U точки 0 существует*

* Поскольку 0 — неподвижная точка отображения $\mathfrak{f}$, значение производной $\mathfrak{f}'(0)$ не зависит от карты, в которой записано отображение $\mathfrak{f}$.

В формулах (9) и (11) выбрана главная ветвь степенной функции

$$|\zeta_1|^\beta = e^{\beta \ln|\zeta_1|}, \quad \operatorname{Im}\ln|\zeta_1| = 0. \tag{12}$$

Из формулы (11) вытекает

Следствие 2. *Задача о топологической классификации отмеченных подгрупп $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ с n образующими имеет не менее $n-1$ комплексных модулей.*

Следующая теорема показывает, что в действительности число модулей в упомянутой задаче бесконечно.

Теорема 6. *Пусть к условиям предыдущей теоремы добавлены следующие два.*

1°. подгруппа группы $\mathbf{C}^*$ комплексных чисел по умножению, порожденной производными ν_1 и ν_2, плотна в $\mathbf{C}$;

2°. группа $\mathscr{F}_1$ некоммутативна.

Тогда из топологической сопряженности групп $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ следует их аналитическая сопряженность.

Доказательство обеих теорем с помощью методов предыдущего параграфа сводится к случаю, когда ростки $\mathfrak{f} \in \mathscr{F}_1 (k\mathfrak{f} \in \mathscr{F}_2)$ линейны в некоторой карте ζ_1 (соответственно ζ_2). Изучение этого случая сводится к изучению топологически сопряженных сдвигов тора.

2. Редукция к линейному случаю

Докажем сначала утверждение 1 теоремы 5, и прежде всего неравенство

$$|(k\mathfrak{f}'_0)(0)| \neq 1.$$

Пусть для определенности $|\mathfrak{f}'_1(0)| < 1$ и пусть Ω_1 — окрестность нуля, столь малая, что $f_1\Omega_1 \subset \Omega_1$ и

$$h \circ f_1|_{\Omega_1} = kf_1 \circ h|_{\Omega_1}. \tag{13}$$

Положим $\Omega_2 = h\Omega_1$. В силу (13) $kf_1\Omega_2 \subset \Omega_2$, и, следовательно, $|(k\mathfrak{f}'_1)(0)| < 1$. Утверждение 1 теоремы 5 следует теперь из теоремы Шредера (3.1).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и пусть ζ_1 и ζ_2 — аналитические карты, линеаризующие отображения f_1 и kf_1 соответственно. Тогда для любого $\mathfrak{f} \in \mathscr{F}_1$, гомеоморфизм h сопрягает ростки линейных частей отображений $\mathfrak{f}$ и $k\mathfrak{f}$ в картах ζ_1 и ζ_2:*

$$\mathfrak{h} \circ \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}'_2 \circ \mathfrak{h}, \tag{14}$$

где $\mathfrak{v}_1 : \zeta_1 \to \nu, \zeta_1$, $\mathfrak{v}'_2 : \zeta_2 \to \nu'_2\zeta_2$, $\nu_1 = \mathfrak{f}'(0)$, $\nu'_2 = (kf)'(0)$.

Доказательство. Рассмотрим две последовательности $F_l^m \in \in \mathscr{F}_m$, $m = 1, 2$:

$$\mathbf{F}_l^1 = \mathfrak{f}_1^{-l} \circ \mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}_1^l, \ \mathbf{F}_l^2 = (k\mathfrak{f}_1)^{-l} \circ (k\mathfrak{f}) \circ (k\mathfrak{f}_1)^l = \mathbf{k}\mathbf{F}_l^1 .$$

В лемме 3 мы фактически доказали, что каковы бы ни были ростки $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g} \in \mathscr{F}$, из неравенства $|\mathfrak{g}'(0)| < 1$ следует, что при $l \to \infty$ последовательность $\mathfrak{g}^{-l} \circ \mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}^l$ стремится к ростку отображения $\zeta \to \mathfrak{f}'(0)\zeta$, где

Нам осталось доказать, что область Ω_{F_l} (см. (1.5)) содержит произвольный компакт $K \subset U \cap \mathfrak{v}^{-1}U$ при достаточно большом l. Без ограничения общности можно считать, что область Ω_0, использованная при определении области Ω_{F_l}, совпадает U. Каждый промежуточный росток представления

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{f}_1^{-l} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{f}_1^l$$

имеет вид

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{f}_1^m \text{ или } \mathbf{h}_{ml} = \mathbf{f}_1^m \cdot \mathbf{F}_l, \quad 0 \leqslant m \leqslant l.$$

Каждый из этих ростков при $l > L$ продолжается в круг U как конформное отображение g_m и h_{ml}, причем $g_m(\zeta) = \nu_1^m \zeta$ и $h_{ml}(\zeta) \underset{l\to\infty}{\rightrightarrows} \nu_1^m \nu\zeta$; стремление равномерно по ζ и m. Отсюда следует, что для любого компакта $K \subset U \cap \nu^{-1}U$ существует такое $L(K)$, что при $l > L(K)$

$$h_{ml}(K) \subset U$$

для всех $m: 0 \leqslant m \leqslant l$. Соотношение

$$g_m(K) = \nu_1^m K \subset U$$

для всех l и m: $0 \leqslant m \leqslant l$ — очевидно. Лемма 3 доказана.

§ 4. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ ГРУПП РОСТКОВ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ $(C^1, 0) \to (C^1, 0)$

Этот параграф посвящен доказательству теорем 5 и 6 (0.6) и использует определения разделов 0.6 и 1.5.

1. Формулировки

Теорема 5. *Пусть*

I. $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ — *две конечно-порожденные отмеченные подгруппы группы* $\mathcal{F}$, *сопряженные гомеоморфизмом* h, *так, что диаграмма* (2) *коммутативна и пусть для некоторого* $f_1 \in \mathcal{F}_1$ $|f'_1| \neq 1$.

II. *Гомеоморфизм* h *сохраняет естественную ориентацию.*

Тогда существуют:

1°. *аналитические карты* ζ_1 *и* ζ_2, *линеаризующие отображения* $\mathbf{f}_1$ *и* $k\mathbf{f}_1$ *соответственно;*

2°. *комплексное число* β *и ограниченная функция* $F(\zeta_1)$, *такие, что в картах* ζ_1, ζ_2 *гомеоморфизм* h *имеет вид*

$$\zeta_2 = h(\zeta_1) = \zeta_1 |\zeta_1|^\beta F(\zeta_1), \tag{9}$$

причем

$$F(\mathbf{f}'(0) \cdot \zeta_1) = F(\zeta_1) \tag{10}$$

для любого $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_1$.

3. *Для любого* $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_1$

$$(k\mathbf{f})'(0) = \mathbf{f}'(0) |\mathbf{f}'(0)|^\beta. \tag{11}$$

$\Lambda_m^+ \to \mathcal{F}_m^+$ является группа $\mathbf{Z}$. Гомоморфизм $k^+ = k'|_{\mathcal{F}_1^+}: \mathcal{F}_1^+ \to \mathcal{F}_2^+$ однозначным образом поднимается до гомоморфизма $k_*^+: \Lambda_1^+ \to \Lambda_2^+$ (продолжающегося до гомоморфизма $k'_*: \Lambda_1 \to \Lambda_2$) так, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}_m & \xrightarrow{\lambda} & \widehat{\Omega}_m \\ \exp \circ 2\pi i \downarrow & & \downarrow \exp \circ 2\pi i \\ \Omega^*_m & \xrightarrow{\nu = \pi_{m_*}\lambda} & \Omega^*_m \end{array} \quad \lambda \in \Lambda_m^+, \ m = 1, 2 \tag{17}$$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Omega}_1 & \xrightarrow{\lambda} & \widehat{\Omega}_1 \\ \widehat{h} \downarrow & & \downarrow \widehat{h} \\ \widehat{\Omega}_2 & \xrightarrow{k'_*\lambda} & \widehat{\Omega}_2 \end{array} \quad \lambda \in \Lambda_1^+ \tag{18}$$

коммутативны. Здесь λ и $k'_*\lambda$ — сдвиги: $\xi_1 \to \xi_1 + \lambda$, $\xi_2 \to \xi_2 + k'_*\lambda$ соответственно. Гомоморфизм k'_* есть $\mathbf{Z}$ — линейное преобразование $\Lambda_1 \to \Lambda_2$; его продолжение на ${}^R\mathbf{C}$ обозначим A; из условия $A1 = 1$ следует

$$A\xi_1 = \left(\frac{\beta}{2} + 1\right)\xi_1 - \frac{\beta}{2}\bar{\xi}_1, \tag{19}$$

где β — некоторое комплексное число;

$$A\lambda = k'_*\lambda, \quad \lambda \in \Lambda_1. \tag{20}$$

Из диаграммы (18) следует, что преобразование $\widehat{h}$ имеет вид

$$\xi_2 = \widehat{h}(\xi_1) = A\xi_1 + f(\xi_1), \tag{21}$$

где

$$f(\xi_1 + \lambda) = f(\xi_1) \ \forall \lambda \in \Lambda_1^+. \tag{22}$$

Из соотношений (20), (16) и (19) немедленно следует (11)

$$k'\nu = k' e^{2\pi i\lambda} = e^{2\pi i k'_*\lambda} = e^{2\pi i\,[\lambda + i\beta\,\mathrm{Im}\,\lambda]} = \nu e^{(-2\pi\,\mathrm{Im}\,\lambda)\,\beta} = \nu e^{\beta \ln|\nu|} = \nu|\nu|^{\beta}; \tag{23}$$

в предпоследней части выбрано главное (вещественное) значение логарифма; следовательно, в правой части — главная ветвь степенной функции.

Наконец, равенство

$$F(\zeta_1) = F(e^{2\pi i\xi_1}) = e^{2\pi i f(\xi_1)} \tag{24}$$

определяет функцию F, инвариантную в силу соотношения (22), относительно полугруппы $\mathcal{F}_1^+$:

$$F(\nu\zeta_1) = F(\zeta_1) \ \forall \nu \in \mathcal{F}'_1;$$

функция F ограничена, поскольку $|\nu_1| < 1$ и $\nu_1 \in \mathcal{F}'_1$. Соотношение (10) доказано.

Выкладка, аналогичная формулам (23), позволяет из (21) и (24) получить формулу (9); теорема 5 доказана.

ζ — карта, линеаризующая отображение $\mathbf{g}$. Поскольку $|(k\mathfrak{f}_1)'(0)|<1$, из предыдущего замечания получаем, что $\mathbf{F}^m{}_l \to \mathbf{N}_m$, $m=1,2$. Переходя к пределу в равенстве

$$\mathbf{h} \circ \mathbf{F}_l^1 = \mathbf{F}_l^2 \circ \mathbf{h},$$

получаем утверждение (14). Лемма доказана.

3. Топологически сопряженные группы ростков линейных преобразований

а) Переход от ростков к отображениям. В силу леммы 4 нам осталось доказать утверждения 2 и 3 теоремы 5 для случая, когда группы $\mathcal{F}_m$ заменены на группы $\mathcal{F}'_m$ ростков линейных отображений $\zeta_m \to \mathfrak{f}'(0)\zeta_m$, $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}_m$. Пусть Ω_1 — окрестность нуля, в которой определен гомеоморфизм h, $\Omega_2 = h\Omega_1$; $\Omega^*_m = \Omega_m \setminus 0$, $m=1,2$. Пусть k — гомеоморфизм $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ (тот же, что в диаграмме (2)), k' — соответствующий гомоморфизм $\mathcal{F}'_1 \to \mathcal{F}'_2$ и $\mathcal{F}_m^+$ — полугруппа тех преобразований, ростки которых принадлежат $\mathcal{F}'_m$ и которые переводят область Ω_m в себя, $m=1,2$. Из коммутативности диаграммы (2) следует коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*_1 & \xrightarrow{\nu} & \Omega^*_1 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \Omega^*_2 & \xrightarrow{k'\mathrm{N}} & \Omega^*_2 \end{array} \qquad \forall \nu \in \mathcal{F}_1^+, \tag{15}$$

где N — умножение на ν в карте $\zeta_1 : \zeta_1 \to \nu\zeta_1$, $k'\mathrm{N}$ — умножение на $k'\nu$ в карте ζ_2.

б) Эвристические соображения. Пусть $\nu_1 = \mathfrak{f}'_1(0)$, $\nu_2 = (k\mathfrak{f}_1)'(0)$ и $|\nu_1|<1$; тогда и $|\nu_2|<1$ (см. рассуждение раздела 2). Фактор-пространство области Ω^*_m по полугруппе $\{\mathrm{N}^l_m | l \in N\}$ есть тор T^2_m. Из коммутативности диаграммы (15) для $\nu=\nu_1$ следует, что гомеоморфизм h накрывает гомеоморфизм $\tilde{h} : T^2_1 \to T^2_2$. Преобразования $\mathrm{N}_m \in \mathcal{F}'_m$ в подходящей карте превращаются в сдвиги тора T^2_m. Формула (9) — это утверждения об общем виде гомеоморфизма $T^2_1 \to T^2_2$, поднятого до гомеоморфизма накрывающих $\Omega^*_1 \to \Omega^*_2$; формула (11) выражает топологическую инвариантность чисел вращения гомеоморфизма отмеченного тора. Впрочем, гомеоморфизмы торов естественно записывать, переходя к универсальным накрывающим; поэтому сами торы T^2_m в наших рассуждениях не используются, а используются универсальные накрывающие $\widehat{\Omega}_m$ над Ω^*_m с картой ξ_m и проектированием:

$$\pi_m : \widehat{\Omega}_m \to \Omega^*_m, \qquad \xi_m \to e^{2\pi i \xi_m} = \zeta_m, \; m=1,\ 2. \tag{16}$$

в) Окончание доказательства теоремы 5. Гомеоморфизм h поднимается до гомеоморфизма $\widehat{h} : \widehat{\Omega}_1 \to \widehat{\Omega}_2$, определенного с точностью до сдвига на целое число; фиксируем произвольно один из таких гомеоморфизмов $\widehat{h}$. Полугруппа $\mathcal{F}_m^+$ поднимается до полугруппы сдвигов Λ_m^+, переводящих $\widehat{\Omega}_m$ в себя. Ядром естественного гомоморфизма π_{m*}:

3′ *Для любого* $\mathfrak{f}\in F_1$

$$(k\mathfrak{f})'(0)=\overline{\mathfrak{f}}'(0)\,|\,\mathfrak{f}'(0)\,|^{\beta}. \qquad (11')$$

Доказательство. Пусть I — инволюция $\zeta_1\to\overline{\zeta}_1$. Рассмотрим отмеченную группу $\overline{\mathcal{F}}_1=I\circ\mathcal{F}_1\circ I$. Эта группа сопряжена с группой $\mathcal{F}_2$ гомеоморфизмом $\mathfrak{h}=h\circ I$, сохраняющим ориентацию. Поэтому к группам $\overline{\mathcal{F}}_1$ и $\mathcal{F}_2$ и сопрягающему гомеоморфизму $\mathfrak{h}$ можно применить теорему 5. Формулы (9) и (11) для $\mathcal{F}_1$ и h равносильны формулам (9′) и (11′) для $\overline{\mathcal{F}}_1$ и $\mathfrak{h}$. Следствие 4 доказано.

5. Доказательство теоремы 6

Из условия 6.1° и равенства (10) следует, что функция F в выражении (9) постоянна: $F\equiv\sigma$; поэтому

$$h(\zeta_1)=\zeta_2=\sigma\zeta_1\,|\,\zeta_1\,|^{\beta}. \qquad (26)$$

Условие 6. 2° означает, что коммутант группы $\mathcal{F}_1$ отличен от единицы и, следовательно, содержит росток отображения

$$f:\zeta_1\to\zeta_1+a_m\zeta_1^m+\dots,\ a_m\neq 0,\ m>1.$$

Отображение kf принадлежит коммутанту группы $\mathcal{F}_2$ и отлично от тождественного; пусть оно имеет вид

$$kf:\zeta_2\to\zeta_2+b_{m'}\zeta_2^{m'}+\dots,\ b_{m'}\neq 0,\ m'>1.$$

Мы докажем, что если эти два отображения сопряжены гомеоморфизмом (26), то $\beta=0$. Отсюда, конечно, следует теорема 6. Из коммутативности диаграммы (2) имеем

$$\sigma(\zeta_1+a_m\zeta_1^m+\dots)^{1+\frac{\beta}{2}}(\overline{\zeta}_1+\overline{a}_m\overline{\zeta}_1^m+\dots)^{\frac{\beta}{2}}=\sigma\zeta_1\,|\,\zeta_1\,|^{\beta}+b_{m'}\,(\sigma\zeta_1|\zeta_1|^{\beta})^{m'}+\dots \qquad (27)$$

для простоты пишем дальше ζ вместо ζ_1).

Было бы естественно доказать в этом месте утверждение типа теоремы единственности для степенных рядов от ζ, $\overline{\zeta}$ с комплексными показателями; наши рассуждения, однако, используют конкретный вид рядов (27). Положим $\beta=\beta_1+i\beta_2$, β_1, $\beta_2\in R$, разделим обе части на $\sigma\zeta\,|\,\zeta\,|^{\beta}$ и выделим главные члены:

$$L(\zeta)\overset{\text{def}}{=}1+\overbrace{\left(a_m\zeta^{m-1}\left(1+\frac{\beta}{2}\right)+\overline{a}_m\overline{\zeta}^{m-1}\frac{\beta}{2}\right)}^{l(\zeta)}+o(\,|\,\zeta\,|^{m-1})=$$

$$=1+\underbrace{b_{m'}\sigma^{m'-1}\,\zeta^{m'-1}\,|\,\zeta\,|^{\beta\,(m'-1)}}_{p(\zeta)}+o(\,|\,\zeta\,|^{(m'-1)\,(\beta_1+1)})\overset{\text{def}}{=}P(\zeta).$$

Скажем, что однозначная функция $f(\zeta)$ имеет порядок малости k в нуле, если $k=\sup\left\{k'\in R\,\middle|\,\frac{f(\zeta)}{|\,\zeta\,|^{k'}}\to 0 \text{ при } \zeta\to 0\right\}$. Функции $l(\zeta)$ и $p(\zeta)$ имеют

4. Следствия теоремы 5

Следствие 3. *Пусть выполняются условия теоремы 5 и пусть* $\mathfrak{f}_{j1}$ — *образующие группы* $\mathcal{F}_1$, $\mathfrak{f}_{j2}=k\mathfrak{f}_{j1}$, $\nu_{jm}=\mathfrak{f}'_{jm}(0)$, $m=1, 2$ *и пусть* λ_{jm} — *произвольное значение из* $\pi_m^{-1}\nu_{jm}:\nu_{jm}=e^{2\pi i\lambda_{jm}}$, *и пусть* ζ_m — *те же, что в утверждении 1° теоремы 5. Тогда*

1°. *Существует линейное преобразование* $A:{}^R\mathbf{C}\to{}^R\mathbf{C}$, $A1=1$ *и такой набор целых чисел* δ_j, *что*

$$A\lambda_{j1}=\lambda_{j2}+\delta_j \tag{25}$$

2°. *Для любой точки* $\zeta_1^0\in(\mathbf{C}^1, 0)$ *обозначим через* γ_{j1} *дугу логарифмической спирали:*

$$\gamma_{j1}=\{\zeta_1(t)\,|\,t\in[0, 1]\},\ \zeta_1(t)=e^{2\pi it\lambda_{j1}}\zeta_1^0.$$

Если кривая $\gamma_{j2}=h\gamma_{j1}$ *определена, то она имеет общие концы с дугой логарифмической спирали*

$$\overline{\gamma}_{j2}=\{\zeta_2(t)\,|\,t\in[0, 1]\},\ \zeta_2(t)=e^{2\pi it\lambda_{j2}+\delta_j}h(\zeta_1^0)$$

и гомотопна ей в области $\mathbf{C}^1\diagdown 0$.

Доказательство.

1) В качестве преобразования A нужно взять, конечно, преобразование (19), (20); соотношение (25) следует из равенств $\nu_{jm}=e^{2\pi i\lambda_{jm}}$ и того, что $\nu_{j2}=k'\nu_{j1}$.

2) Без ограничения общности можно считать, что $\nu_{j1}\in\mathcal{F}_1^+$ (иначе мы заменили бы ν_{j1} на ν_{j1}^{-1}). Кривая γ_{j2} имеет начало $h(\zeta_1^0)$ и конец $h(\nu_{j1}\zeta_1^0)=\nu_{j2}h(\zeta_1^0)$ в силу коммутативности диаграммы (15); поэтому кривые γ_{j2} и $\overline{\gamma}_{j2}$ действительно имеют общие начало и конец. Гомеоморфизм $h:\Omega^*_1\to\Omega^*_2$ выражается формулой (9) (напомним, что Ω_1 — область определения h, $\Omega_2=h\Omega_1$,$\Omega^*_m=\Omega_m\diagdown 0$, $m=1, 2$). Пусть $\sigma=F(\zeta_1^0)$; в силу (10) $\sigma=F(\nu_{j1}\zeta_1^0)$. Тогда гомеоморфизм $\widetilde{h}:\Omega^*_1\to\Omega^*_2$, $\zeta_2=\widetilde{h}(\zeta_1)=$ $=\sigma\zeta_1|\zeta_1|^\beta$ переводит дугу γ_{j1} в дугу $\overline{\gamma}_{j2}$. Гомотопия

$$h(\zeta_1, s)=\sigma\zeta_1|\zeta_1|^\beta\left[\frac{F(\zeta_1)}{\sigma}\right]^s,\ s\in[0, 1],$$

переводит отображение $\widetilde{h}$ в h, а дугу $\overline{\gamma}_{j2}$ — в дугу γ_{j2}, что и доказывает утверждение 2°.

Следствие 4. *Пусть выполнено условие 1 теоремы 5 и пусть гомеоморфизм* h *меняет ориентацию. Тогда утверждение 1° теоремы 5 сохраняется, а утверждения 2° и 3° меняются на следующее:*

2'. *Существует такое комплексное* β, *что*

$$\zeta_2=h(\zeta_1)=\overline{\zeta}_1|\zeta_1|^\beta F(\zeta_1); \tag{9'}$$

формулы (10) *и* (11) *сохраняются.*

4°. *Уравнение* α *не имеет алгебраических решений, кроме бесконечно удаленного.*

Определение. *Требования п. 1°—4° выделяют в пространстве* $\mathscr{A}_n$ *множество уравнений типа Худай — Веренова.*

Замечание 7. Требование п. 1° выполняется для общего по Петровскому—Ландису уравнения $\alpha \in \mathscr{A}_n$, как показано в разделе 1.3; то же относится к требованию 4° (см. [1]). В разделе 5 мы докажем

Предложение 3. *Требования 2° и 3° выполняются для общего уравнения* $\alpha \in \mathscr{A}_n$.

Отсюда следует, что общее уравнение $\alpha \in \mathscr{A}_n$ типа Худай—Веренова.

Разделы 3—5 посвящены доказательству теоремы о плотности для уравнений α типа Худай—Веренова. Напомним сначала некоторые известные факты.

2. Предварительные сведения

а) Характеристическое число невырожденной особой точки.

Для простоты будем считать, что особая точка совпадает с началом координат.

Определение. *Пусть*

$$w' = \frac{aw + bz + \dots}{cw + dz + \dots} \tag{31}$$

аналитическое уравнение с мероморфной правой частью, определенной в окрестности нуля, и пусть матрица линейной части $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *невырождена. Тогда 0 называется невырожденной особой точкой уравнения (31), а отношение* λ *собственных значений матрицы — характеристическим числом особой точки*.*

б) Теорема Пуанкаре.

Пусть 0 — невырожденная особая точка уравнения (31) и характеристическое число λ *особой точки 0 отлично от целого, обратного целому, или отрицательного числа. Тогда в некоторой окрестности* V *точки 0 уравнение (31) аналитически эквивалентно линейному; это значит, что в окрестности* V *существует такая карта* (ξ, η), *в которой уравнение (31) имеет вид*

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \lambda \frac{\eta}{\xi}. \tag{32}$$

в) Комплексные сепаратрисы.

Определение. *Пусть* α *— уравнение вида (31) и пусть существует лишь конечное число решений, которые голоморфно продолжаются в особую точку 0. Каждое такое решение* φ *называется комплексной*

* Это определение задает одно число, если условиться, какой из собственных векторов линейной части считать первым. Для бесконечно удаленных особых точек мы считаем вторым вектор, принадлежащий бесконечно удаленному решению. Там, где нумерация собственных векторов не оговорена (например, в теореме Пуанкаре), не важно, какое из характеристических чисел, λ или $1/\lambda$, рассматривается.

порядок малости $m-1$ и $(m'-1)(\beta_1+1)$ соответственно. Эти порядки равны; в противном случае одна из разностей $L(\zeta)-1$ и $P(\zeta)-1$, деленная на $|\zeta|^{\min(m-1),\,(m'-1)(\beta_1+1)}$, стремилась бы к нулю, а другая — нет. Разделим теперь обе части равенства

$$l(|\zeta|e^{i\varphi})+o(|\zeta|^{m-1})=p(|\zeta|e^{i\varphi})+o(|\zeta|^{m-1})$$

на $|\zeta|^{m-1}$ и перенесем остаточные члены в правую часть, остальные—в левую:

$$a_m\left(1+\frac{\beta}{2}\right)e^{i\beta_2(m-1)}+\bar{a}_m\frac{\beta}{2}e^{-i\varphi(m-1)}-$$
$$-b_{m'}\sigma^{m'-1}e^{i\varphi(m'-1)}|\zeta|^{i\beta_2(m'-1)}=o(1). \tag{28}$$

Предположим, что $\beta\neq0$. Ограничение левой части равенства (28) на окружность $|\zeta|=r$ обозначим $\tilde{f}_r(\varphi)$. Имеем $n_r\overset{\text{def}}{=}\|f_r(\varphi)\|_{L_2(0,\,2\pi)}\geqslant\geqslant|a_m|\,|\beta|/2$ (ни один из положительных показателей $m-1$, $m'-1$ не равен отрицательному показателю — $(m-1)$), но из (28) следует, что $n_r\to0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 6. Сопрягающий голоморфизм h в теореме 6 определен однозначно, если, например,

$$[f_1,f_2](\zeta)=\zeta+a_2\zeta^2+\ldots,\quad a_2\neq0,$$

и с точностью до умножения на корень некоторой степени из 1 в общем случае.

Действительно, формула (27) при $\beta=0$ принимает вид

$$\sigma(\zeta+a_m\zeta^m+\ldots)=\sigma\zeta+b_{m'}(\nu\zeta)^{m'}+\ldots.$$

Отсюда $m=m'$ и $\sigma^{m-1}=a_m/b_m$. Отсюда следует

$$h=\zeta_2^{-1}\circ\sigma\circ\zeta_1, \tag{29}$$

где

$$\sigma=\frac{a_2}{b_2}\ \text{при}\ m=2, \tag{30}$$

и $\sigma=\sqrt[m-1]{a_m/b_m}$ при произвольном m.

§ 5. ТЕОРЕМА ХУДАЙ-ВЕРЕНОВА О ПЛОТНОСТИ РЕШЕНИЙ

1. Формулировка и уточнения

Теорема. *Для общего уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$, $n\geqslant2$, каждое решение, кроме бесконечно удаленного, плотно в $\mathbf{C}P^2$.*

На уравнение α наложим следующие требования ($\mathcal{A}'_n$, f_j, ν_j, $\mathcal{P}'$ — те же, что в разделе 1.7).

1°. $\alpha\in\mathcal{A}'_n$.

2°. *Подгруппа группы $\mathbf{C}^*$, порожденная числами ν_1 и ν_2, плотна в $\mathbf{C}$.*

3°. $|\nu_j|\neq1$, $j=1,\ldots,n,\ n+1$*.

* Как показано в разделе 5, $\nu_j=e^{2\pi i\lambda_j}$, где λ_j — характеристические числа особых точек a_j; поэтому требование п. 3* равносильно требованию $\operatorname{Im}\lambda_j\neq0$.

2°. $1 = a\lambda_1 + b\lambda_2$,

где a, b и a/b иррациональны.

В этом случае группа по сложению, порожденная числами 1, λ_1, λ_2, плотна в $\mathbf{C}$ — доказательство общеизвестно.

§ 6. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ $\alpha \in \mathscr{A}_n$

1. Доказательство теоремы о негрубости.

Теорема 2. *В классе $\mathscr{A}_n$ нет структурно устойчивых уравнений при $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Нам достаточно доказать структурную неустойчивость произвольного уравнения из некоторого плотного подмножества $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_n$. В качестве $\tilde{\mathcal{A}}$ возьмем (открытое по Зарискому) множество уравнений $\alpha \in \mathcal{A}'_n$, не имеющих алгебраических решений, кроме F_α. Пусть α, $\alpha' \in \tilde{\mathcal{A}}_n$ — топологически эквивалентные уравнения, F_α — отмеченное (с выбранными образующими μ_j в группе $\pi_1(F_\alpha)$) бесконечно удаленное решение; тогда $F_{\alpha'} = H(F_\alpha)$ — отмеченное (с образующими $\mu'_j = H(\mu_j)$) решение. Отмеченные группы $\mathcal{F}_\alpha$ и $\mathcal{F}_{\alpha'}$ топологически эквивалентны в силу леммы 1; в силу теоремы 5 (или следствия 4) линейные члены в нуле функций последования $f_{j,\alpha}$ и $f_{j,\alpha'}$ связаны соотношениями (9) (или (9′)). Но меняя уравнения α, мы можем произвольно менять значения $f'_{j,\alpha}(0)$, что и доказывает теорему.

Справедлива существенно более сильная теорема.

2. Теорема 2′. *Пусть уравнения α, $\alpha' \in \mathscr{A}'_n$ не имеют алгебраических решений, кроме бесконечно удаленной прямой. Пусть $(\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{n+1\,1})$ и $(\lambda_{1\,2}, \ldots, \lambda_{n+1\,2})$ — наборы характеристических чисел бесконечно удаленных особых точек уравнений α и α' (определенные в разделе 5.1а), причем $\operatorname{Im} \lambda_{jm} \neq 0$, $m = 1, 2$*. Пусть, наконец, уравнения α и α' топологически эквивалентны. Тогда существует такое линейное преобразование:*

$$A : {}^R\mathbf{C} \to {}^R\mathbf{C},\quad A1 = 1, \tag{41}$$

что

$$A(\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{n+1\,1}) = (\lambda_{1\,2}, \ldots, \lambda_{n+1\,2}) \tag{42}$$

(равенство (42) означает совпадение наборов) **.

Теорема 2′ доказывается в разделах 4—6.

Следствие 6. *Задача о топологической классификации уравнений $\alpha \in \mathscr{A}_n$ имеет не менее чем $n-1$ комплексных модулей.*

Действительно, наборы из $n+1$ комплексных чисел λ_j с отношением эквивалентности (41), (42), удовлетворяющие условию $\Sigma\lambda_j = 1$ (этому

---

* Условие $\operatorname{Im} \lambda_{j2} \neq 0$ следует из условия $\operatorname{Im} \lambda_{j1} \neq 0$ и топологической эквивалентности уравнений α и α'; мы не будем, однако, на этом останавливаться.

** Теорема 2′ для случая однородных уравнений $\alpha \in \mathrm{C}_n \cap \mathscr{A}'_n$ (см. раздел 0.5) доказана Ладисом [9]; в этом случае условия (41), (42) не только необходимы, но и достаточны. Автор благодарит Н. Н. Ладиса, сообщившего ему свое доказательство; рассуждения разделов 5, 6 навеяны последними страницами работы [9].

сепаратрисой точки 0, а объединение $\varphi \bigcup 0$ — пополненной сепаратрисой.

Следствие 5. *Пусть 0 — невырожденная особая точка уравнения* (31), λ — *ее характеристическое число, причем* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. *Тогда особая точка* 0 *имеет ровно две локальные комплексные сепаратрисы*, к которым накапливаются остальные решения с начальным условием, достаточно близким к* 0.

Доказательство. Из теоремы Пуанкаре следует, что в карте (ξ, η) решения уравнения (31) имеют вид

$$\eta(\xi) = C\xi^{\lambda} \tag{33}$$

или

$$\xi(\eta) = C'\eta^{1/\lambda}. \tag{33'}$$

При $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ сепаратрисами являются решения, она из компонент пересечения которых с окрестностью V задается уравнением $\xi = 0$ или $\eta = 0$. Все решения (33) при $C \neq 0$ накапливаются к сепаратрисе $\{\eta = 0\}$.

Действительно, когда ξ один раз обходит значение 0, функция $\eta(\xi)$ умножается на число $e^{2\pi i\lambda}$ или $e^{-2\pi i\lambda}$, в зависимости от направления обхода; одно из этих чисел по модулю меньше 1, поскольку $\operatorname{Im}\lambda \neq 1$. Те же решения задаются формулой (33′) при $C' \neq 0$ и, следовательно, накапливаются к сепаратрисе $\{\xi = 0\}$.

г) Теорема о продолжении.

Каждое решение φ уравнения $\alpha \in \mathscr{A}_n$ можно продолжить за пределы любого шара, расположенного в аффинной окрестности (z, w).

Доказательство. Решение φ_p имеет точку ветвления как график функции $w(z)$ только в тех точках q где $Q(q) = 0$. Поэтому число точек ветвления решения φ_p не более чем счетно. Проведем луч l на плоскости z, не проходящий через проекции на плоскость z особых точек уравнения α и через проекции точек ветвления решения φ_p; начало луча l совпадает с проекцией точки p. Решение φ_p допускает однозначное продолжение над некоторым полуинтервалом $I \subset l$, содержащим точку p; *пусть* I_0 — максимальный такой полуинтервал. Элементарные рассуждения показывают, что либо $I_0 = l$, либо над I_0 решение φ_p уходит на бесконечность по w. Теорема доказана.

3. Плотность решений в окрестности бесконечно удаленного решения

Рассмотрим псевдогруппу $\mathscr{P}$ преобразований монодромии на бесконечности для уравнения α. В силу требования 3° псевдогруппа $\mathscr{P}$ удовлетворяет условиям леммы 2. Пусть U и ζ — те же, что в формулировке леммы 3, p, q — произвольные точки из U и $\nu = \zeta(q)/\zeta(p)$. Очевидно, что $p \in U \bigcap \nu^{-1}U$.

В силу условия 2° $\nu \in \mathscr{P}'$. В силу леммы 3 существует последовательность $F_l \in \mathscr{P}$, такая, что $p \in \Omega_{F_l}$ для всех достаточно больших l и

* Локальной сепаратрисой называется неприводимая компонента пересечения окрестности особой точки на пополненной сепаратрисе с полной окрестностью особой точки.

В силу теоремы Пуанкаре уравнение α линейно в некоторой карте (ξ, η), определенной в некоторой окрестности $O \ni \mathcal{P}$; точка $\mathcal{P}$ имеет локальные сепаратрисы $\varphi = \{\eta = 0\}$ и $\psi = \{\xi = 0\}$.

Пусть $O' = H(O)$, ξ', η', φ', ψ' — аналогичные объекты для уравнения α'. Все решения уравнения α, проходящие близко от $\mathcal{P}$, накапливаются к сепаратрисам φ и ψ в силу следствия 5. То же справедливо для уравнения α'. Поэтому гомеоморфизм H переводит сепаратрисы в сепаратрисы: пусть $\varphi' = H(\varphi)$, $\psi' = H(\psi)$. Пусть $p \in \varphi$, $p = (\xi_0, 0)$, $p' = H(p) \in \varphi'$, $\Gamma_p = \{\xi = \text{const} = \xi_0\}$, $p' = (\xi'_0, 0)$, $\Gamma_{p'} = \{\xi' = \text{const} = \xi'_0\}$ и пусть $H|_\varphi : \varphi \to \varphi'$ сохраняет ориентацию.

Мы должны доказать, что гомеоморфизм $h|_{(\Gamma_p, p)}$ сохраняет ориентацию. Мы выведем это из трансверсальности пополненных решений φ и ψ в точке $\mathcal{P}$.

Пусть $\nu \subset \psi$ — окружность $\{(\xi, \eta) = (0, \rho e^{2\pi i t}) \mid t \in [0, 1]\}$, $\nu_1 \subset \Gamma_p$ — окружность $\{(\xi, \eta) = (\xi_0, \rho e^{2\pi i t}) \mid t \in [0, 1]\}$, $\tilde{\nu} \subset \psi'$ и $\tilde{\nu}_1 \subset \Gamma_{p'}$ — аналогичные окружности, $\nu' = H(\nu) \subset \psi' \setminus \mathcal{P}'$ и $\nu'_1 = h(\nu_1) \subset \Gamma_{p'} \setminus p'$ — топологические окружности. Заметим, что $H(O \setminus \varphi) = H(O' \setminus \varphi')$, и окружности ν и ν_1 свободно гомотопны в $O \setminus \varphi$. Поэтому окружности ν' и ν'_1 также свободно гомотопны в $O' \setminus \varphi'$. Но $H|_\psi$ сохраняет ориентацию в силу утверждения 1°. Поэтому окружности $\tilde{\nu}$ и ν' свободно гомотопны на $\psi' \setminus \mathcal{P}'$; значит, окружности $\tilde{\nu}_1$ и ν'_1 свободно гомотопны в $O' \setminus \varphi'$, а значит, и на $\Gamma_{p'} \setminus p'$. Следовательно, гомеоморфизм h сохраняет ориентацию. Лемма 5 доказана.

4. Доказательство теоремы 2′ «по модулю Z»

Теорему 2′ достаточно доказать для случая, когда гомеоморфизм $H|_{F_\alpha}$ сохраняет ориентацию. В противном случае вместо уравнения α' рассмотрим уравнение $\bar{\alpha}'$, сопряженное с α' инволюцией $I: (z_1, w_1) \to (\bar{z}_1, \bar{w}_1)$; тогда гомеоморфизм $I \circ H$ сохраняет ориентацию на F_α. Набор $\bar{\lambda}^2$ характеристических чисел бесконечно удаленных особых точек уравнения $\bar{\alpha}'$ получается из соответствующего набора λ^2 для уравнения α' с помощью комплексного сопряжения. Поэтому если утверждение теоремы 2′ выполняется для уравнений α и $\bar{\alpha}'$, то оно выполняется и для уравнений α и α'.

Итак, пусть гомеоморфизм H_{F_α} сохраняет ориентацию. В силу рассуждений раздела 1 $H(F_\alpha) = F_{\alpha'}$; если петли μ_j, $j = 1, \ldots, n$, — канонические образующие в группе $\pi_1(F_\alpha)$, то $\mu'_j = H(\mu_j)$ — канонические образующие в группе $\pi_1(F_{\alpha'})$: каждая из них обходит один раз в положительном направлении ровно одну бесконечно удаленную особую точку, именно $H(a_j)$. Пусть $f_{j1} = f_{j\alpha}$ и $f_{j2} = f_{j\alpha'}$ — функции последования, соответствующие петлям μ_j и μ'_j. В силу леммы 1 все отображения f_{j1} сопряжены с отображениями f_{j2} одним и тем же гомеоморфизмом h. В силу леммы 5 этот гомеоморфизм сохраняет ориентацию. Производные $\nu_{jm} = f'_{jm}(0)$ равны $\exp 2\pi i \lambda_{jm}$, $m = 1,2$ (по формулам (40)). В силу и что $p(w_1)$ обозначает многочлен $w_1\widetilde{Q}-\widetilde{P}|_{z_1=0}$. Линейная часть уравнения (5) в особой точке a_j имеет вид

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Q}(0,\ a_j) & 0 \\ \bullet & p'(a_j) \end{pmatrix}$$

(точка означает элемент, который для нас не важен). Отсюда

$$\lambda_j=\frac{\widetilde{Q}(0,\ a_j)}{p'(a_j)}. \tag{36}$$

Замечание 8. Из последнего равенства следует, что

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j=1, \tag{37}$$

поскольку λ_j — это вычеты функции $R_1\overset{\text{def}}{=}\frac{\widetilde{Q}(0,\ w_1)}{p(w_1)}$ в точках a_j; других полюсов, кроме a_j, эта функция не имеет, а на бесконечности ее вычет равен -1. Отсюда

$$R_1(w_1)=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\lambda_j}{z-a_j}. \tag{38}$$

Обозначим через $z^1(w_1)$ первую вариацию решения F_α по начальному условию; одно из значений $z^1(a)$ равно 1. Уравнение в вариациях имеет вид

$$\frac{dz^1}{dw_1}=z^1R(w_1).$$

В силу равенства (38)

$$z^1(w_1)=\Pi\left(\frac{w_1-a_j}{a-a_j}\right)^{\lambda_j}. \tag{39}$$

Результат продолжения вариации z^1 над петлей μ_j равен производной $f'_j(0)$; поэтому

$$\nu_j=e^{2\pi i\lambda_j}. \tag{40}$$

Предложение 3 следует непосредственно из формул (36), (40) и предложения:

Предложение 5. *Требование: „подгруппа группы* C^* *комплексных чисел по умножению, порожденная числами* $\nu_j=e^{-2\pi i\lambda_j}$, $j=1,\dots,n$, *плотна в* C^*", *выполняется для почти всех наборов* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\in C^n$.

Доказательство достаточно провести для случая $n=2$. Условия плотности множества $\{\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}\,|\,(k_1,\ k_2)\in Z^2\}$ суть следующие.

Пусть $\nu_j=e^{2\pi i\lambda_j}$. Тогда

1°. *Никакие два из трех векторов* λ_1, λ_2, *1 неколлинеарны на* ${}^R C$;

b) Пусть теперь Γ и $\tilde{\mu}$ — произвольные трансверсаль и петля, удовлетворяющие условиям предложения, причем петля $\tilde{\mu}$ настолько близка к φ, что выполнимы дальнейшие построения. В частности, существует проекция μ петли $\tilde{\mu}$ на решение φ вдоль некоторого непрерывного семейства трансверсалей. Пусть p' — конец пути $\pi\tilde{\mu}\subset\Gamma$ и $f=\Delta_{\mu,\alpha}$. Тогда

$$p'=f^{-1}p. \tag{47}$$

Эта формула — следствие определений.

c) Пусть $\{\Gamma(s),\ a(s)\}$ — непрерывное семейство трансверсалей к φ, $\Gamma(0)=\Gamma_0$, $\Gamma(1)=\Gamma$ и $\{\mu_s\}$ — непрерывное семейство петель с началом $p(s)\in\Gamma(s)$, принадлежащих V. Возникает естественная функция последования $\Delta_s:(\Gamma_s,\ a(s))\to(\Gamma_0,\ a(0))$, проектирование $\pi_s:(\mathbf{C}^2,\ a(s))\to(\Gamma_s,\ a(s))$, и преобразование монодромии $f_s:(\Gamma_s,\ a(s))\to(\Gamma_s,\ a(s))$, соответствующее петле $\mu_s\subset\varphi$ (с началом $a(s)$), свободно гомотопной μ_1 на φ; μ_s — проекция $\tilde{\mu}_s$ на φ; $s\in[0,\ 1]$, $\tilde{\mu}_1=\mu$.

Карта ζ_0 линеаризует функцию f_0; поэтому карта $\zeta_s=\zeta_0\circ\Delta_s$ линеаризует функцию $f_s\,(f_s=\Delta_s^{-1}\circ f_0\circ\Delta_s)$, причем $f'_s(0)=e^{2\pi i\lambda}$. Следовательно, начало $p(s)$ и конец $p'(s)$ дуги

$$\gamma_{p(s)}=\{p(t,\ s)\,|\,t\in[0,\ 1]\},\quad \zeta_s\circ p(t,\ s)=e^{-2\pi i\lambda t}\zeta_s\circ p(s)$$

удовлетворяют соотношению

$$p'(s)=f_s^{-1}p(s).$$

В силу соотношения (47) дуги $\gamma_{p(s)}$ и $\pi_s\tilde{\mu}_s$ имеют общие начало и конец, они принадлежат $\Gamma(s)\setminus p(s)$, непрерывно зависят от s и гомотопны при $s=0$. Отсюда следует наше предложение.

Следствие 7. *Пусть уравнения α и $\alpha'\in\mathscr{A}'_n$ топологически эквивалентны, H — сопрягающий гомеоморфизм, $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'=H(\mathscr{P})$ — особые точки уравнений α и α' с невещественными характеристическими числами λ_1 и λ_2, φ и $\varphi'=H(\varphi)$ — сепаратрисы точек $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$; $a^1\in\varphi$, $a^2=H(a^1)\in\varphi'$, Γ_1 и Γ_2 — трансверсали к решениям φ и φ' в точках a^1* ***и a^2 и $h:(\Gamma_1,\ a^1)\to(\Gamma_2,\ a^2)$ — гомеоморфизм, определенный диаграммой*** *(6). Пусть μ и μ' — петли на φ и φ' с началом a^1 и a^2, обходящие точки $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ один раз в положительном направлении, f_1 и f_2 — соответствующие функции последования, ζ_1 и ζ_2 — карты, их линеаризующие.*

Пусть $p_1\in\Gamma_1$, $p_2=h(p_1)\in\Gamma_2$ и $\gamma_{p_m}=\{p_m(t)\in\Gamma_m\,|\,(t)\in[0,\ 1]\}$, $\zeta_m o p_m(t)=(\exp 2\pi i\lambda_m t)\ \zeta_m(p_m)$, $m=1,\ 2$. ***Тогда если гомеоморфизм $H|_\varphi$ сохраняет ориентацию, то дуги $h\gamma_{p_1}$*** и ***γ_{p_2} гомотопны на $\Gamma_2\setminus a^2$.***

Доказательство. Пусть U, ψ_0, V, $\tilde{\mu}$ — те же, что в начале раздела, U', ψ'_0, V' — аналогичные объекты для уравнения α' и пусть точка $p_1\in\Gamma_1$ достаточно близка к a^1. Поскольку группа $\pi_1(V)$ коммутативна, гомотопический класс $[\tilde{\mu}]\in\pi_1(V,\ p_1)$ петли $\tilde{\mu}$ определяется классом свободной гомотопии этой петли. Представитель последнего класса — малая топологическая окружность $\tilde{\mu}_0$, обходящая сепаратрису ψ_0 один раз в положительном направлении и не обходящая сепаратрису φ. Гомеоморфизм H переводит $\tilde{\mu}_0$ в малую топологическую окружность $\tilde{\mu}'_0$, обходящую один раз сепаратрису $\psi'_0=H\psi_0$ и ни разу —

равенству удовлетворяют характеристические числа бесконечно удаленных особых точек уравнений $\alpha \in \mathscr{A}'_n$ — см. раздел 5.5 (37)), образуют пространство комплексной размерности $n-1$.

Докажем теперь одно общее утверждение о топологической эквивалентности слоений.

3. Одновременное сохранение ориентации

Лемма 5. *Пусть*

1°. *Аналитические дифференциальные уравнения* α *и* α' *заданы в связных областях* Ω, $\Omega' \subset \mathbf{C}^2$ *и сопряжены гомеоморфизмом* $H: \Omega \to \Omega'$.

2°. *Уравнения* α *и* α' *имеют по невырожденной особой точке* $\mathscr{P}$ *и* $\mathscr{P}' = H(\mathscr{P})$ *с невещественными характеристическими числами.*

Пусть $p \in \Omega$ — *произвольная неособая точка уравнения* α, $p' = H(p)$, Γ *и* Γ' — *трансверсали к решениям* $\varphi_{p,\alpha}$, $\varphi_{p',\alpha'}$ *в точках* p *и* p' *соответственно, и* $h: (\Gamma, p) \to (\Gamma', p')$ — *гомеоморфизм, определяемый коммутативной диаграммой (6) (где вместо* (Γ_1, a^1), (Γ_2, a^2) *стоят* (Γ, p) *и* (Γ', p')). *Тогда следующие гомеоморфизмы одновременно сохраняют или изменяют ориентацию.*

1°. *Гомеоморфизмы* $H|\varphi_p$ — *для всех слоев* φ_p.

2°. *Гомеоморфизмы* $h: (\Gamma, p) \to (\Gamma', p')$ — *для всех точек* p *и трансверсалей* Γ.

3°. *Гомеоморфизмы* $h: (\Gamma, p) \to (\Gamma', p')$ *и* $H|_{\varphi_p}$.

Доказательство. Утверждения 1° и 2° не используют условия 2°.

1°. Для случая, когда уравнения α и α' задают стандартное слоение на прямые $w = \mathrm{const}$ — утверждение 1° тривиально. Отсюда утверждение 1° следует для общих уравнений, поскольку области Ω и Ω' связны, а слоения на решения уравнений α и α' локально эквивалентны стандартному.

Замечание 9. Аналог утверждения 1° справедлив для любых слоений с ориентированными слоями.

2°. Пусть p, $q \in \Omega$ — две неособые точки, Γ_p и Γ_q — трансверсали к $\varphi_{p,\alpha}$ и $\varphi_{q,\alpha}$, причем гомеоморфизм $h|_{(\Gamma_p, p)}$ сохраняет ориентацию. Мы должны доказать, что и $h|_{(\Gamma_q, q)}$ сохраняет ориентацию. Пусть $\{p(s)\} \subset \Omega$ — простая дуга, не содержащая особых точек уравнения α, $p(0) = p$, $p(1) = q$; $\{\Gamma(s) \ni p(s)\}$ — непрерывное семейство трансверсалей к слоям $\varphi_{p(s),\alpha}$, $M = \bigcup_{s \in [0,1]} (\Gamma(s), p(s))$. Построено слоение пространства M со слоями $(\Gamma(s), p(s))$. Пусть $p'(s) = H(p(s))$, $\{\Gamma'(s) \ni p'(s)\}$ — непрерывное семейство трансверсалей, $M' = \bigcup_s (\Gamma'(s), p(s))$. Гомеоморфизм $\tilde{h}$: $M \to M'$, $\tilde{h}|_{(\Gamma(s), p(s))} = h|_{(\Gamma(s), p(s))}$ переводит слоение на трансверсали $(\Gamma(s), p(s))$ в слоение на трансверсали $(\Gamma'(s), p'(s))$. Утверждение 2° следует теперь из замечания 9.

3°. Утверждение 3° для стандартных слоений бидиска неверно: гомеоморфизм $(z, w) \to (\bar{z}, w)$ сохраняет слоение $w = \mathrm{const}$, меняет ориентацию на слоях и сохраняет ориентацию на трансверсалях.

физмов семейства $\{h_t\}$, через U_t — образ h_tU_0 и через $U\subset\Gamma\times\mathcal{O}'$ — область (в произведении $\Gamma\times\mathcal{O}'$):

$$U=\bigcup_{t\in\mathcal{O}'}U_t.$$

Формула (50) в новых обозначениях имеет вид

$$H_t\varphi_p=\varphi_{h_tp}\,\forall\, p\in U_0,\ t\in\mathcal{O}'. \tag{55}$$

Кроме того, возникает аналитическое слоение H области U на кривые η_p, определяемое равенством

$$\eta_p=\{h_tp\,|\,t\in\mathcal{O}'\},\ p\in U_0, \tag{56}$$

Обозначим, наконец, через Y множество особых точек уравнения $\mathcal{A}$, расположенных в области Ω, и через Y' — множество бесконечно удаленных особых точек уравнения $\mathcal{A}$ $(Y'\subset X\setminus\Omega)$. Окрестность $\mathcal{O}'$ можно считать столь малой, что множество Y состоит из n^2 аналитических кривых $\{P_j(t)\}\subset X$, $j=1,\ldots,n^2$.

П р е д л о ж е н и е 9. *На многообразии $X\setminus Y\setminus Y'$ определено двумерное аналитическое слоение Ξ, инвариантное относительно уравнения $\mathcal{A}$ и трансверсальное плоскостям $t=\text{const}$. Каждый слой имеет непустое пересечение с U_0; слой ξ_p, содержащий точку $p\in U_0$, определяется формулой*

$$\xi_p=\bigcap_{t\in\mathcal{O}'}\varphi_{h_tp}=\bigcup_{x\in\eta_p}\varphi_x\,. \tag{57}$$

З а м е ч а н и е 11. Поскольку $H_tF_\alpha=F_{\alpha(t)}$ (бесконечно удалённое решение переходит в бесконечно удаленное) разность $X\setminus\Omega\setminus Y'$ — слой слоения Ξ, этот слой называется бесконечно удаленным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам нужно доказать:

а) Множества ξ_p образуют разбиение пространства $X\setminus Y\setminus Y'$. Это значит, что

$$\bigcup_{p\in U_0}\xi_p=X\setminus Y\setminus Y' \tag{58}$$

и что

$$\text{либо}\quad \xi_p\cap\xi_{p'}=\varnothing,\ \text{либо}\ \xi_p=\xi_{p'}\,. \tag{59}$$

б) Разбиение на множества ξ_p — аналитическое слоение.

Соотношение (58) следует из теоремы о плотности: окрестность $\mathcal{O}'$ можно считать столь малой, что каждое уравнение $\alpha(t)$ при $t\in\mathcal{O}'$ будет типа Худай-Веренова*, поэтому все решения уравнения $\alpha(t)$ плотны в $\mathbf{C}P^2\times\{t\}$; т. е. каждое решение $\varphi_{q,t}$ пересекает множество U_t, а значит одну из кривых η_p.

Соотношение (59) сразу следует из (57) и (55), а именно:

$$\xi_p=\bigcup_{t\in\mathcal{O}'}\varphi_{h_tp}=\bigcup_{t\in\mathcal{O}'}H_t\varphi_p\,.$$

Поэтому если $p'\in\varphi_p$, то $\xi_{p'}=\xi_p$, а если $p'\overline{\in}\varphi_p$, то $\xi_{p'}\cap\xi_p=\varnothing$. Утверждение а) доказано.

---

* Требования п. 1 и 4 на уравнения типа Худай-Веренова (см. 5.1) выделяют множества, открытые по Зарискому. Требования п. 2 и 3 выполнены одновременно для всех уравнений $\alpha\in\mathcal{A}$, поскольку они выполняются для $\alpha(0)$ и группы $\mathcal{F}_{\alpha(0)}$ и $\mathcal{F}_{\alpha(t)}$ аналитически сопряжены; следовательно, характеристические числа $\lambda_{j,\alpha(t)}$ не зависят от t.

утверждения 1° следствия 3 существует линейное преобразование $A : {}^R\mathbf{C} \to {}^R\mathbf{C}$ и набор целых чисел δ_j такие, что

$$A1 = 1, \quad A\lambda_{j1} = \lambda_{j2} + \delta_j. \tag{43}$$

Это и есть утверждение (42) «по модулю $\mathbf{Z}$». Нам осталось доказать, что в равенстве (43)

$$\delta_j = 0. \tag{44}$$

Для этого проведем дополнительное построение, позволяющее выделить характеристическое число λ_j среди всех значений $\ln \nu_j / 2\pi i$.

5. Геометрическая интерпретация характеристических чисел

Пусть α — аналитическое дифференциальное уравнение в области $U \subseteq \mathbf{C}^2$, $\mathscr{P}$ — особая точка уравнения α с характеристическим числом λ, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. В окрестности U_0 точки $\mathscr{P}$ справедлива теорема Пуанкаре; пусть φ_0 и ψ_0 — локальные сепаратрисы (см. 5.2), $\varphi \supset \varphi_0$ — сепаратриса. Сужая, если надо, окрестность $V = U$, будем считать, что пересечение $U \cap \varphi$ односвязно, и разность $U \setminus \varphi \setminus \psi_0$ гомеоморфна плоскости $\mathbf{C}^2$ с выкинутым координатным крестом, т. е. гомотопически эквивалентна тору T^2. Пусть $\Gamma \subset U$ — трансверсаль к φ в точке a, $p \in \Gamma$. Фундаментальная группа тора коммутативна, поэтому число обходов петли $\tilde{\mu} \subset V$, с началом p, вокруг сепаратрис φ и ψ_0 определяет гомотопический класс $[\mu] \in \pi_1(V, p)$. Пусть, наконец, $\pi : (\mathbf{C}^2, a) \to (\Gamma, a)$ — проектирование вдоль решений. Следующее предложение характеризует аналитическое продолжение отображения π.

Предложение 6. *Пусть петля $\tilde{\mu} \subset V$ с начальной точкой $p \in \Gamma$ один раз обходит сепаратрису ψ_0 и ни разу — сепаратрису φ. Тогда если точка p достаточно близка к a, то существует аналитическое продолжение отображения π вдоль петли $\tilde{\mu}$, причем в некоторой аналитической карте ζ на Γ дуга $\pi\tilde{\mu}$ имеет общее начало и конец с дугой*

$$\gamma_p = \{p(t) \mid t \in [0, 1]\}, \quad \zeta \circ p(t) = e^{-2\pi i \lambda t} \zeta \circ p \tag{45}$$

и гомотопна ей на $\Gamma \setminus a$.

Замечание 10. *Это свойство выделяет число λ среди всех чисел $\lambda + \delta$, $\delta \in \mathbf{Z}$.* Действительно, пусть ζ_1 — любая другая карта на Γ. Положим

$$\gamma'_{p,\delta} = \{p'(t) \mid t \in [0, 1]\}, \quad \zeta' \circ p'(t) = e^{-2\pi i (\lambda+\delta) t} \zeta \circ p.$$

Если дуги γ_p и $\gamma'_{p,\delta}$ имеют общие концы, то они гомотопны на $\Gamma \setminus a$ тогда и только тогда, когда $\delta = 0$.

Доказательство предложения.

а) Пусть (ξ, η) — карта, линеаризующая уравнение α в окрестности точки $\mathscr{P}\Gamma_0 = \{\xi = \xi_0\}$, $p = (\xi_0, \eta_0)$, $\tilde{\mu}_0 = \{(\xi_0 e^{2\pi i t}, \eta_0) \mid t \in [0, 1]\}$, $\zeta_0|_\Gamma = \eta|_\Gamma$. Из формул (33) следует, что в карте ζ_0 отображение π имеет вид

$$\pi(\xi, \eta) = \eta \left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda. \tag{46}$$

Поэтому

$$\pi\tilde{\mu}_0 = \{e^{-2\pi i \lambda t} \eta_0 \mid t \in [0, 1]\}$$

и есть кривая γ_p, заданная формулой (45).

Поскольку функции R, P, Q аналитически зависят от t, многочлены L_{1t} и L_{2t} также аналитически зависят от t. Положим

$$W(x)=W(z, w, t)=\begin{pmatrix} -L_{2t}(z, w) \\ L_{1t}(z, w) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Мы доказали, что W — аналитическое векторное поле на X; из формул (67) и (63) следует, что $W(x)\in L_x=T_x\xi_x$, что и доказывает предложение 10, а вместе с ним — всю теорему 3′.

§ 8. АБСОЛЮТНАЯ НЕГРУБОСТЬ

1. Формулировка и уточнения. В этом параграфе доказывается

Теорема 3. *Для общего уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$ существует такая окрестность $U_\alpha\subset\mathcal{A}_n$ уравнения α и такая окрестность $\mathcal{H}$ тождественного гомеоморфизма $\mathbb{C}P^2\to\mathbb{C}P^2$ в равномерной топологии, что всякое уравнение $\alpha'\in U_\alpha$, топологически эквивалентное α и сопряженное с α гомеоморфизмом $H\in\mathcal{H}$, аффинно эквивалентно α.*

На уравнение α накладываются те же требования, что и в разделе 7.1, где и показано, что этим требованиям удовлетворяет общее уравнение $\alpha\in\mathcal{A}_n$.

2. Переход от последовательности к семейству. Предположим, что теорема 3 неверна. Это значит, что существует последовательность уравнений $\alpha_m\in\mathcal{A}_n$, $\alpha_m\to\alpha_0$, топологически эквивалентных α_0, таких, что гомеоморфизм H_m, сопрягающий α_m и α_0, стремится к тождественному преобразованию, а уравнения α_m аффинно неэквивалентны уравнению α_0. Ниже это предположение приводится к противоречию.

Из леммы 1′ следует, что для достаточно больших m определен гомеоморфизм $h_m:(\Gamma, a)\to(\Gamma, a)_m$, сопрягающий отмеченные группы: $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ и $\mathcal{F}_{\alpha_m}$ с образующими $f_{j\,\alpha_0}$, f_{j,α_m}; диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma, a) & \xrightarrow{f_{j,\alpha_0}} & (\Gamma, a) \\ h_m\downarrow & & \downarrow h_m \\ (\Gamma, a)_m & \xrightarrow{f_{j,\alpha_m}} & (\Gamma, a)_m \end{array} \tag{68}$$

коммутативна для всех $j=1,\ldots, n$ и, кроме того,

$$H_m\varphi_{p,\alpha_0}=\varphi_{h_mp,\alpha_m}. \tag{69}$$

Основным результатом раздела является

Предложение 13. *Пусть $\alpha_0\in\mathcal{A}'_n$ — произвольное уравнение и $\alpha_m\to\alpha_0$. Пусть уравнения α_m и α_0 сопряжены гомеоморфизмом H_m, причем $H_m\rightrightarrows\mathrm{id}$. Тогда существует аналитическое подмножество $M\subset\mathcal{A}_n$, содержащее точку α_0 и счетную подпоследовательность последовательности $\{\alpha_m\}$ (эту подпоследовательность будем обозначать $\{\alpha_m\}$), обладающее следующими свойствами:*

M1. $\dim_{\mathbb{C}}M>0$.

M2. M — минимальное подмножество $\mathcal{A}_m$, содержащее объединение $\alpha_0\cap\{\alpha_m\}$.

сепаратрису φ'. Можно считать, что обе окружности $\tilde{\mu}_0$ и $\tilde{\mu}'_0$ гомеоморфно проектируются вдоль решений в топологические окружности на трансверсалях к соответствующим сепаратрисам. Применяя лемму 5, получим, что окружность $\tilde{\mu}'_0$ обходит сепаратрису ψ'_0 в положительном направлении. Петля $H\tilde{\mu}$ свободно гомотопна петле $\tilde{\mu}'_0$ и, следовательно, удовлетворяет условиям предложения 6.

Заметим, что диаграмма (6) остается коммутативной, если отображения π^1 и π^2 заменить их аналитическим продолжением и соответственно расширить окрестности O_1 и O_2. Поэтому $h\pi^1\tilde{\mu}=\pi^2H\tilde{\mu}$. Из предложения 6 следует теперь, что кривые $h\gamma_{p_1}$ и γ_{p_2} гомотопны на $\Gamma_2\setminus a^2$, что и требовалось доказать.

6. Окончание доказательства теоремы 2'. Поскольку $\operatorname{Im}\lambda_j\neq 0$ отображение $f_{jm}:(\Gamma_m, a^m)\to(\Gamma_m, a^m)'$, $m=1, 2$, линеаризуется; пусть ζ_{jm} — линеаризующая карта. Обозначим через $\gamma^p_{jm}\subset\Gamma_m$ дугу логарифмической спирали

$$\gamma^p{}_{jm}=\{p(t)\in\Gamma_m \mid t\in[0,\ 1]\},\quad \zeta_{jm}\circ p(t)=e^{2\pi i\lambda_{jm}t}\zeta_{jm}(p),$$

и через $\bar{\gamma}^p_{j2}\subset\Gamma$ — дугу

$$\bar{\gamma}^p_{j2}=\{p(t)\in\Gamma_2 \mid t\in[0,\ 1]\},\ \zeta_{j2}\circ p(t)=e^{2\pi i(\lambda_{j2}+\delta_j)t}\zeta_{j2}(p).$$

В силу леммы 5 гомеоморфизм h сохраняет ориентацию. Из следствия 3 вытекает, что дуги $h\gamma^p{}_{j1}$ и $\bar{\gamma}^p_{j2}$ гомотопны на $\Gamma_2\setminus a^2$; из следствия 7 вытекает, что дуги $h\gamma^p_{j1}$ и γ^p_{j2} гомотопны на $\Gamma_2\setminus a^2$. Отсюда $\delta_j=0$.

Теорема 2' полностью доказана.

§ 7. СИЛЬНАЯ НЕГРУБОСТЬ: СЛУЧАЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА

1. Формулировка и связь с теоремой 3

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 3'. *Пусть $\alpha\in\mathcal{A}_n$ — некоторое уравнение и $\mathcal{A}=\{\alpha(t)\}$ — аналитическое однопараметрическое семейство определенное в окрестности $O\subset\mathbf{C}^1$ точки 0, $\alpha(0)=\alpha$. Пусть уравнение α структурно устойчиво в классе $\mathcal{A}$, причем гомеоморфизм $H(t)$, сопрягающий уравнения α и $\alpha(t)$ равномерно стремится к тождественному при $t\to 0$. Тогда если α — уравнение общего типа, то все уравнения $\alpha(t)$ аффинно эквивалентны уравнению α.*

Эта теорема, конечно, следует из теоремы 3. Однако в ее доказательстве используются почти все идеи, нужные для теоремы 3; к тому же теорема 3 редуцируется к теореме 3'.

На уравнение α наложим следующие требования (общие для теорем 3 и 3'):

нозначно. Его непрерывность очевидна. Следовательно $A^{-1}|_{\Phi(M)}$ также непрерывно. Но по построению $A^{-1}\cdot\Phi(\alpha)=h_\alpha$, что и доказывает предложение.

4. Вспомогательное слоение. Следующие построения аналогичны построениям раздела 7.3, но доказательство корректности требует дополнительных соображений.

Обозначим через X произведение $\mathbf{C}P^2\times V$, где $V\subset M$ — окрестность точки α_0, которая будет выбрана позднее, и через X' — произведение $\mathbf{C}P^2\times M$; положим $\Omega=\mathbf{C}^2\times V$ и $\Omega'=\mathbf{C}^2\times M$, где $\mathbf{C}^2$ — аффинная окрестность (z, w). Уравнение α в окрестности $\mathbf{C}^2$ имеет вид

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P(z, w, \alpha)}{Q(z, w, \alpha)}, \tag{52'}$$

P и Q — аналитические функции на X'. Семейство M можно интерпретировать как уравнение на X'; это уравнение обозначается буквой $\mathscr{A}$ и в области Ω' имеет вид

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P}{Q},\quad \alpha'=0. \tag{53'}$$

Вертикальные плоскости $\mathbf{C}P^2\times\{\alpha\}$ инвариантны относительно уравнения $\mathscr{A}$; решение уравнения $\mathscr{A}$ с начальным условием $x=(q, \alpha)$ обозначим φ_x:

$$\varphi_x=\varphi_{q,\alpha}. \tag{54'}$$

Будем считать, что гомеоморфизм H_m отображает плоскость $\mathbf{C}P^2\times\{\alpha_0\}$ на $\mathbf{C}P^2\times\{\alpha_m\}$, а голоморфизм h_α переводит окрестность $(\Gamma, a)\times\{\alpha_0\}$ в $(\Gamma, a)\times\{\alpha\}$, $\alpha\in M$. Обозначим через U_{α_0} область, в которой определены все голоморфизмы h_α, $\alpha\in M$. Имеем

$$H_m\varphi_p=\varphi_{h_{\alpha_m}p},\quad \forall m,\quad p\in U_{\alpha_0}. \tag{55'}$$

Обозначим через U_α образ $h_\alpha U_{\alpha_0}$ и через $U\subset\Gamma\times M$ — область $U=\bigcup_{\alpha\in M}U_\alpha$. Для каждого $p\in U_{\alpha_0}$ положим

$$\eta_p=\{h_\alpha p\mid\alpha\in M\}. \tag{56'}$$

В силу предложения $8'$ множества η_p образуют аналитическое слоение H области U*. Определено биголоморфное проектирование π_p слоя η_p на M: $\pi_p h_\alpha p=\alpha$. Обозначим, наконец, через Y множество осо-

* Поскольку U не аналитическое многообразие, а лишь аналитическое пространство, понятие аналитического слоения нуждается в уточнении. Для наших целей подходит следующее.

Определение. Пусть U — аналитическое пространство и Σ_U — множество особых точек U; разность $U\setminus\Sigma_U$ — аналитическое многообразие той же размерности, что и U.

Разбиение H пространства U на топологические пространства η_p называется аналитическим слоением, если оно локально тривиально и ограничение $\mathrm{H}|_{U\setminus\Sigma}$ — аналитическое слоение. Локальная тривиальность означает, что в окрестности каждой точки p слоение эквивалентно прямому произведению полидиска $|\zeta_j|<1$ на окрестность точки p на слое; размерность полидиска равна коразмерности слоения $\mathrm{H}|_{U\setminus\Sigma}$.

2. Аналитическая зависимость от параметра гомеоморфизма, сопрягающего группы монодромии

Из леммы 1′ следует, что для всех t из некоторой окрестности $\mathcal{O}'$ точки 0 отмеченные группы монодромии $\mathcal{F}_{\alpha(t)}$ (с образующими $\mathbf{f}_{j,t} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{f}_{j,\alpha(t)}$) сопряжены гомеоморфизмом $h_t:(\Gamma, a) \to (\Gamma, a)$, причем

$$H_t \varphi_{p,\alpha} = \varphi_{h_t p,\alpha} \tag{50}$$

для всех $p \in \Gamma$, для которых $h_t p$ определено.

Предложение 8. *Семейство гомеоморфизмов $\{h_t\}$ есть аналитическое семейство голоморфизмов.*

Доказательство. В силу условий 3.1 и 3.2 группа $\mathcal{F}_\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 6. Поэтому гомеоморфизм h_t — голоморфизм. Формула (29) позволяет задать его явно. А именно пусть ζ_t — аналитическое семейство карт: карта ζ_t линеаризует отображение $f_{1,\alpha(t)}$; такое семейство существует по теореме Шредера о линеаризации семейства (раздел 2.1). Коммутатор $[f_{1,\alpha(t)}, f_{2,\alpha(t)}]$ в карте ζ_t имеет вид $\zeta_t \to \zeta_t + a_2(t)\zeta_t^2 + \ldots$, $a_2(t)$ — аналитическая функция от t, $a_2(0) \neq 0$ в силу 3.2°. Тогда по формулам (29) и (30)

$$h_t = \zeta_t^{-1} \circ \frac{a_2(t)}{a_2(0)} \circ \zeta_0. \tag{51}$$

Предложение 8 следует из формулы (51).

3. Вспомогательное слоение

Следующее построение является основным для дальнейшего.

В силу аналитичности семейства $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_n$ уравнение $\alpha(t)$ в аффинной окрестности (z, w) имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z, w, t)}{Q(z, w, t)}, \tag{52}$$

где P и Q — полиномы степени n по (z, w), аналитически зависящие от t. Семейство $\mathcal{A}$ можно интерпретировать как одно уравнение на произведении $X = \mathbf{C}P^2 \times \mathcal{O}'$; это уравнение обозначается той же буквой $\mathcal{A}$, и в области $\Omega = \mathbf{C}P^2 \times \mathcal{O}' = \{(z, w, t)\}$ имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z, w, t)}{Q(z, w, t)}, \quad \frac{dt}{dz} = 0. \tag{53}$$

„Вертикальные“ плоскости $t = \text{const}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$, ограничение $\mathcal{A}|_{t=t_0}$ совпадает с $\alpha(t_0)$. Решение уравнения $\mathcal{A}$ с начальным условием $x = (q, t)$ обозначим φ_x:

$$\varphi_x = \varphi_{q,\alpha(t)}. \tag{54}$$

Будем считать, что гомеоморфизм H_t отображает плоскость $\mathbf{C}P^2 \times \{0\}$ на $\mathbf{C}P^2 \times \{t\}$, а голоморфизм h_t переводит окрестность $(\Gamma, a) \times \{0\}$ в $(\Gamma, a) \times \{t\}$. Обозначим через U_0 область определения всех голоморщественно-одномерная кривая и $l\gamma_{p,x}$—ее длина в метрике μ. Рассмотрим функцию

$$\rho(x) = \inf_{\substack{p \in \varphi_x \cap U \\ \gamma_{p,x} \subset \varphi_x}} l\gamma_{p,x}.$$

Эта функция непрерывна. Действительно, ее полунепрерывность снизу

$$\rho(x^0) \geqslant \overline{\lim_{x \to x^0}} \rho(x) \tag{71}$$

следует из теоремы о непрерывной зависимости. Полунепрерывность сверху

$$\rho(x^0) \leqslant \underline{\lim_{x \to x^0}} \rho(x) \tag{72}$$

следует из леммы Петровского — Ландиса [1] (эта лемма здесь несколько модифицирована):

Пусть γ_m — спрямляемая кривая, расположенная на решении φ_m уравнения $\alpha_m \in \mathcal{A}_n$, $m = 1, \ldots$, причем

$$l\gamma_m < \rho \tag{73}$$

и $\alpha_m \to \alpha_0$. Тогда из последовательности $\{\gamma_m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\gamma_{m'}\}$, которая сходится к спрямляемой кривой γ, лежащей на решении уравнения α_0:

$$\underline{\lim\, \mathrm{top}}\, \gamma_{m'} = \gamma. \tag{74}$$

Действительно, из равенства (74) следует (72).

Утверждение леммы 9 следует теперь из компактности разности $X' \setminus \widetilde{U}$*.

в) Новое построение слоения. Выбор окрестности V. Фиксируем ρ, даваемое леммой 9. Геодезический круг $K_p^\rho \subset \varphi_p$ не обязан быть односвязным. Покроем каждый из кругов K_p^ρ односвязными множествами $\Omega_p^j \subset K_p^{2\rho}$. $\Omega_p^j \ni p$. Из общей теории слоений следует, что для каждого Ω_p^j существует окрестность T_p^j, слоение которой [на решения уравнения $\mathcal{A}$ топологически эквивалентно прямому произведению $\Omega_p^j \times W_p^j$, где $W_p^j = T_p^j \cap U$. Пусть π_p^j: $T_p^j \to W_p^j$ — проектирование вдоль решений. Мы получили открытое покрытие компактного множества $CP^2 \times \{\alpha_0\} \setminus \widetilde{U}$. Выберем из него конечное подпокрытие; соответствующие области T_p^j, W_p^j и Ω_p^j и отображения π_p^j занумеруем одним индексом $i = 1, \ldots, N$. Пусть $V_2 \subset M$ — столь малая окрестность точки α_0, что

$$CP^2 \times V_2 \setminus \widetilde{U} \subseteq \bigcup_1^N T_i. \tag{75}$$

---

* Утверждение леммы следует и из (71); мы провели более длинное доказательство, чтобы привести лемму Петровского — Ландиса, которая в дальнейшем необходима.

Докажем б). Возьмем произвольную точку $x=(q, t)\in X\setminus Y\setminus Y'$, какую-нибудь точку $x'\in U_t\cap\varphi_x$ и кривую $\gamma\subset\varphi_x$ с началом x и концом x'. Пусть $T\ni x$ — трансверсальная плоскость к решению φ_x, $V\subset X$ — окрестность точки x столь малая, что проектирование $\pi_T:V\to(T, x)$ окрестности V вдоль решений уравнения $\mathcal{A}$ — однозначное аналитическое отображение ранга 2 (имеется в виду ранг производного отображения $\pi_{T*}(x)$ во всех $x\in V$). Пусть $\Delta_\gamma:(T, x)\to(U, x')$ — функция последования уравнения $\mathcal{A}$, соответствующая кривой γ. Тогда отображение $\Delta_\gamma\circ\pi_T$: $(V, x)\to(U, x')$ — аналитическое ранга 2. Слоение H окрестности (U, x') индуцирует слоение H_* окрестности V, $H_*=(\Delta_\gamma\circ\pi_T)_*H$: слой слоения η_*, проходящий через точку $y\in V$, обозначается η_*y и равен

$$\eta_{*y}=(\Delta_\gamma\circ\pi_T)^{-1}(\eta_{(\Delta_\gamma\circ\pi_T)\,y}\cap(U, x')).$$

Очевидно, слоение H_* аналитическое.

Пусть теперь Ξ_V — разбиение окрестности V на связные компоненты пересечения слоев $\xi_p\cap V$. Заметим, что отображение $\Delta_\gamma\cdot\pi_T$ переводит пересечение $\xi_p\cap V$ в счетное множество аналитических кривых

$$\bigcup_{p'\in\varphi_p\cap U_0}\eta_{p'}\cap(U, x').$$

Каждое из пересечений $\eta_{p'}\cap(U, x')$ связно; поэтому слоения Ξ_V и H^* совпадают. Мы получили, что слоение H_* не зависит от γ, и слоение Ξ_V, а значит, и Ξ аналитично. Предложение 9 доказано.

4. Исследование вспомогательного слоения

Лемма 6. *Пусть многообразие X, уравнение $\mathcal{A}$, область Ω и множества особых точек Y и Y' — те же, что в начале раздела 3. Пусть Ξ — двумерное аналитическое слоение, инвариантное относительно уравнения $\mathcal{A}$ и трансверсальное плоскостям $t=\mathrm{const}$.*

Пусть разность $F_{\mathcal{A}}=X\setminus\Omega\setminus Y'$ является „бесконечно удаленным" слоем слоения Ξ. Пусть, наконец, уравнение $\alpha(0)$ удовлетворяет условиям 3.3 и 3.4. Тогда все уравнения $\alpha(t)$ аффинно эквивалентны уравнению $\alpha(0)$ *.

Из леммы 6 и предложения 8 немедленно следует теорема 3'.

Предложение 10. *В условиях леммы 6 существует векторное поле W, определенное в области Ω, касательное к слоям ξ_x слоения Ξ и имеющее вид*

$$W(z, w, t)=\begin{pmatrix}A(t)\begin{pmatrix}z\\ w\end{pmatrix}+b(t)\\ 1\end{pmatrix}, \tag{60}$$

где $A(t):\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ и $b(t)\in\mathbf{C}^2$ — соответственно аналитические матрица и вектор.

* Лемма неверна, если снять условие 3.4, как показывает пример слоения $P_t=P(z, w, t)=\mathrm{const}$, где $\{P_t\}$ — аналитическое по t семейство полиномов от (z, w): для общего семейства такого вида топологическая эквивалентность слоений $P_0=\mathrm{const}$ и $P_t=\mathrm{const}$ имеет место, а аналитическая — не имеет. Условие 3.4 здесь нарушено.

ше 4ρ (эта кривая состоит из двух кусков: один расположен в T_i, другой в T_j). Пусть $s_0=\sup\limits_{s\in S} s$. Докажем, что $s_0=1$. Пусть $s_m\to s_0$, $p_m=\mu(s_m)$, $\gamma_{p_m}=\gamma_m$. Кривые γ_m удовлетворяют условию леммы Петровского — Ландиса: $l(\gamma_m)<4\rho$. Пусть γ_{p_0} — кривая, предельная для некоторой подпоследовательности $\{\gamma_{m'}\}$. Тогда $\Delta_{ij}^{p_0}=\Delta_{\gamma_{p_0}}$ есть искомое аналитическое продолжение. Предложение 15 доказано.

Доказательство предложения 14. Пусть $q_i=\pi_i x$, $p\in\in\overline{W}_{ij}^x\cap U_{\alpha_0}$ и Δ_{ij}^p — аналитическое продолжение ростка Δ_{ij}^q в точку p. Нам достаточно доказать, что росток Δ_{ij}^p сохраняет слоение Н. Пусть Δ_{ij}^p — произвольный представитель ростка Δ_{ij}^p, определенный в окрестности $U_p\subset U$ точки p, и пусть

$$p'\in U_p,\quad p''=\Delta_{ij}^p p'. \tag{79}$$

Мы хотим доказать, что

$$\Delta_{ij}^p\eta_{p'}=\eta_{p''}. \tag{80}$$

Рассмотрим последовательность точек

$$p'_m=h_{\alpha_m}(p')\in\eta_{p'}\quad\text{и}\quad p''_m=h_{\alpha_m}(p'')\in\eta_{p''}.$$

Из формулы (55′) следует, что

$$h_{\alpha_m}(p'')\in H_m(\varphi_{p'}),$$

поскольку $\varphi_{p'}=\varphi_{p''}$ в силу (79). Поэтому

$$\Delta_{ij}^p p'_m=p''_m.$$

Тем самым

$$\Delta_{ij}^p\eta_{p'}\cap\eta_{p''}\supset\{p''_m\}. \tag{81}$$

Пересечение в левой части (81) — аналитическое множество, содержащее p''; пусть оно не является представителем ростка слоя $\eta_{p''}$ в точке p''. Тогда его образ при проектировании $\pi_{p''}:\eta_{p''}\to V$ — собственное аналитическое подмножество множества M, содержащее α_0 и все α_m, начиная с некоторого m. Это противоречит минимальности множества M (свойство $M2$). Формула (80), а с ней и предложение 14, а значит, и предложение 9′ — доказаны.

6. Редукция к лемме 6. Теорема 3 выводится из предложения 9′ и леммы 6 следующим образом. Пусть α_1 — произвольное уравнение из $V\setminus\Sigma$, $\mathcal{O}$ — круг $|t|<1$ и $\psi:\mathcal{O}\to V$ — аналитическое отображение, $\psi(0)=\alpha_0$, $\psi(\mathcal{O}\setminus 0)\subset M\setminus\Sigma$, $\psi(\mathcal{O})\ni\alpha_1$.

Пусть $\tilde{X}=CP^2\times\mathcal{O}$, $\Psi:\tilde{X}\to X$ — индуцированное отображение: $(q,t)\to(q,\psi(t))$, где $q\in CP^2$. Пусть Ξ — аналитическое слоение на $X\setminus U$, определенное в предложении 9′, уравнение $\mathcal{A}$ то же, что и в разделе 4 и пусть $U_*=\{x\in\tilde{X}\mid\Psi(x)\in\tilde{U}\}$; пересечение вертикальной пло-

Аналогично, в области Ω_1 распределение $\mathscr{L}$ задается формой

$$\omega_1(x)=\widehat{P}_1(x)\,dz_1-\widehat{Q}_1(x)\,dw_1+R_1(x)\,dt, \qquad (64)$$

функция R_1 аналитична в области Ω_1.

Плоскость $\{z_1=0\}$ есть замыкание „бесконечно удаленного“ слоя $F_{\mathscr{A}}$; поэтому при $x\in\{z_1=0\}$ плоскость L_x содержит вектор $(0, 0, 1)$; следовательно,

$$R_1|_{z_1=0}=0. \qquad (65)$$

Предложение 11. *Построенные выше функции R и R_1 — многочлены степени не выше $n+1$ по (z, w) и (z_1, w_1) соответственно.*

Доказательство. На пересечении $\Omega\cap\Omega_1$ формы ω и ω_1 пропорциональны; в карте (z_1, w_1, t) форма ω имеет вид

$$\omega=\frac{1}{z_1^2}\left[w_1Q\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t\right)-P\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t\right)\right]dz_1-$$
$$-\frac{1}{z_1}Q\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t\right)dw_1+R\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t\right)dt.$$

В силу формул (62) получаем, что

$$\omega_1=z_1^{n+2}\omega,$$

и, в частности,

$$R_1(z_1, w_1, t)=z_1^{n+2}R\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t\right).$$

Учитывая равенство (65), получаем, что функция $z_1^{n+1}R\left(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t\right)$ голоморфна на прямой $z_1=0$. Отсюда следует предложение 11.

Предложение 12. $R|_Y=0$. (66)

Доказательство немедленно следует из условия 3.4 и интегрируемости распределения $\mathscr{L}$. Условие Фробениуса: $\omega\wedge d\omega=0$ на множестве Y (где $P=Q=0$) имеет вид

$$(Q_z+P_w)R|_Y=0.$$

Равенство (66) следует теперь из (48)*.

с) Исследование многочлена R. В силу теоремы Нетера [11, с. 141] при каждом фиксированном t существуют многочлены $L_{1t}(z, w)$ и $L_{2t}(z, w)$ степени не выше первой, и такие, что

$$R(z, w, t)=Q(z, w, t)L_{1t}(z, w)+P(z, w, t)L_{2t}(z, w). \qquad (67)$$

---

* Можно предложить более естественное геометрическое доказательство равенства (66), заменив требование 3.4 требованием 3.4* (см. сноску стр. 113). А именно если в точке $P_j(t_0)\in Y$ функция $R\neq0$, то эта точка неособая для распределения $\mathscr{L}$; в ее окрестности распределение $\mathscr{L}$ интегрируется, соответствующее слоение локально задается в виде $F(z, w, t)=\mathrm{const}$, где F — голоморфная функция; ограничение $F|_{t=t_0}$ является первым интегралом уравнения $\alpha(t_0)$ в точке $P_j(t_0)$.

определения на стр. 86) и, значит, совпадает с решением φ. Но мы докажем, что сфера $\mathbf{C}P^1$ не может быть решением уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$ (напомним, что решение не содержит особых точек уравнения).

П р е д л о ж е н и е 1'. *Если замыкание $\bar\varphi$ решения φ уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$ есть образ $\mathbf{C}P^1$ при голоморфном погружении в $\mathbf{C}P^2$, то $\bar\varphi$ содержит особые точки уравнения α: $dw/dz=Q/P$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное; тогда $\bar\varphi=\varphi$. Зададим голоморфную 1-форму ω на сфере φ, определенную в пересечении с аффинной окрестностью (z, w) формулами

$$\omega=dt=\frac{dz}{P}\bigg|_{\varphi}=\frac{dw}{Q}\bigg|_{\varphi}.$$

Степень дивизора $[\omega]$ равна -2, т. е. форма ω имеет на φ хотя бы один полюс. Если этот полюс расположен в окрестности (z, w), то соответствующая точка особая; действительно, в неособой точке (z, w) форма ω голоморфна на решении $\varphi_{(z,w)}$. Из нашего предположения следует, что полюса формы ω расположены на пересечении φ с бесконечно удаленной прямой $\bar F_{\alpha}$. В карте (z_1, w_1) (4) форма ω имеет вид

$$-\frac{dz_1}{z^2_1P\left(\frac{1}{z_1}\ \frac{w_1}{z_1}\right)}\Bigg|_{\varphi}=\frac{z_1dw_1-w_1dz_1}{z^2_1Q\left(\frac{1}{z_1}\ \frac{w_1}{z_1}\right)}\Bigg|_{\varphi}.$$

Пусть $p=(0, a)$ — точка пересечения $\varphi\cap\bar F_{\alpha}$, в которой форма ω имеет полюс, и τ — униформизующий параметр на φ, $\tau(p)=0$. Решение φ в окрестности точки p задается голоморфными функциями $z_1(\tau)$, $w_1(\tau)$, $z_1(0)=0$, $w_1(0)=a$. Для того чтобы точка p была плюсом формы ω, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} &z^2_1(\tau)P\left(\frac{1}{z_1(\tau)},\ \frac{w_1(\tau)}{z_1(\tau)}\right)\to 0 \quad\text{при } \tau\to 0,\\ &z^2_1(\tau)Q\left(\frac{1}{z_1(\tau)},\ \frac{w_1(\tau)}{z_1(\tau)}\right)\to 0 \quad\text{при } \tau\to 0. \end{aligned}\tag{82}$$

Учитывая, что $n\geqslant 2$, получаем отсюда, что p — особая точка уравнения α. Действительно, уравнение α в карте (z_1, w_1) имеет вид (5), а из формул (82) следует, что $\tilde P(p)=\tilde Q(p)=0$. Предложение 1 доказано.

Следующие 4 раздела посвящены доказательству теоремы 4.

2. Формулировка и уточнения.

Т е о р е м а 4. *Общее уравнение $\alpha\in\mathcal{A}_n$ имеет счетное число гомологически независимых комплексных предельных циклов.*

У т о ч н е н и е. Мы налагаем следующие требования на уравнение α.

1°. α — уравнение типа Худай-Веренова.

2°. Функции последования f_1 и f_2 не коммутируют

$$f_1\circ f_2\neq f_2\circ f_1.\tag{83}$$

3°.

$$L\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\nu_1^{-2}-1}\int\limits_{\mu_1}z^{1^{-2}}dw_1-\frac{1}{\nu_2^{-2}-1}\int\limits_{\mu_2}z^{1^{-2}}dw_1\neq 0.\tag{84}$$

М3. Определено семейство голоморфизмов $\{h_\alpha : (\mathbb{C}^1, 0) \to (\mathbb{C}^1, 0)_\alpha \mid \alpha \in M\}$, *сопрягающих отмеченные группы монодромии* $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ и $\mathcal{F}_\alpha$.

Доказательство. Пусть $V_1 \subset \mathcal{A}_n$ — такая окрестность точки α, в которой все функции последования $f_{j,\alpha}$ аналитически зависят от α. Обозначим через $\mathcal{F}$ группу всех ростков конформных отображений $(\mathbb{C}^1, 0) \to (\mathbb{C}^1, 0)$ и через $\mathcal{F}^n$ — декартово произведение $\underbrace{\mathcal{F} \times \ldots \times \mathcal{F}}_{n}$ с естественной структурой бесконечномерного аналитического многообразия. Каждой точке $\mathbf{f} \in \mathcal{F}^n$ соответствует отмеченная подгруппа $\mathcal{F}$ с n образующими и обратно. Определено аналитическое отображение

$$\Phi : V_1 \to \mathcal{F}^n, \quad \alpha \to (\mathbf{f}_{1\alpha}, \ldots, \mathbf{f}_{n\alpha}).$$

Образ $\Phi(V_1)$ — конечномерное аналитическое подмножество многообразия $\mathcal{F}^n$. Пусть $\mathrm{Ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{f}$ — орбита точки $\mathbf{f}$ при присоединенном действии группы $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^n$:

$$\mathrm{Ad}_{\mathcal{F}} \mathbf{f} = \{\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{g}^{-1}, \ldots, \mathbf{g} \cdot \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{g}^{-1} \mid \mathbf{g} \in \mathcal{F}\}.$$

Эта орбита — бесконечномерное аналитическое подмногообразие многообразия $\mathcal{F}^n$. Пересечение $\widetilde{M} = \mathrm{Ad}_{\mathcal{F}} \Phi(\alpha_0) \cap \Phi(V_1)$ — конечномерное аналитическое подмножество множества $\Phi(V_1)$. Обозначим через M' полный прообраз $\Phi^{-1}\widetilde{M} \subset V_1$. По построению множество M' аналитическое и для всех $\alpha \in V_1$, отмеченные группы $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ и $\mathcal{F}_\alpha$ аналитически эквивалентны тогда и только тогда, когда $\alpha \in M'$. В силу теоремы 6 в предыдущей фразе аналитическую эквивалентность можно заменить на топологическую. Поэтому для всех достаточно больших m, $\alpha_m \in M'$ и $\alpha_0 \in M'$. Пусть M'' — минимальное аналитическое подмножество M', содержащее точки α_0 и $\{\alpha_m\}$. Его размерность больше нуля, поскольку множество $\alpha_0 \cup \{\alpha_m\}$ имеет предельную точку. Пусть $M \ni \alpha_0$ — неприводимая компонента множества M'', содержащая счетную подпоследовательность последовательности $\{\alpha_m\}$. Множество M и есть искомое семейство. Предложение 13 доказано.

3. Аналитичность по α сопрягающего гомеоморфизма. Пусть Σ — множество особых точек множества M; разность $M \setminus \Sigma$ — аналитическое многообразие той же размерности, что и M [6, с. 128].

Определение. *Отображение $\psi : M \to \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — аналитическое многообразие, называется аналитическим, если ψ непрерывно на M и аналитично на $M \setminus \Sigma$.*

Предложение 8′. *Семейство голоморфизмов, определенное в предложении 13 (свойство М3), аналитическое (т. е. отображение $h : M \to \mathcal{F}$, $\alpha \mapsto h_\alpha$ аналитическое).*

Доказательство аналитичности ограничения $h|_{M \setminus \Sigma}$ такое же, как в предложении 8. Пусть отображение $\Phi : (\mathcal{A}'_n, \alpha_0) \to \mathcal{F}^n$ то же, что и в доказательстве предложения 13. Группа $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ удовлетворяет условиям теоремы 6; поэтому если отмеченная группа $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ аналитически эквивалентна $\mathcal{F}_{\alpha_0}$, то сопрягающий голоморфизм h однозначно определен формулами (29), (30). Поэтому отображение $\mathrm{A} : \mathcal{F} \to \mathrm{Ad}_{\mathcal{F}} \Phi(\alpha_0)$ взаимно-од-

В силу нелинейности функции $f_2(\zeta)$ уравнение

$$f_2(\zeta)=\frac{\nu_1^{k_1}}{\nu_2^{k_2}}\zeta$$

имеет при достаточно малом ε изолированное решение, принадлежащее V. Из леммы 3 следует, что для достаточно большого l суперпозиция $F_{k,l}=f_1^{-l}\circ f_2^{-k_2}\circ f_1^{k_1}\circ f_1^{l}$ определена в области $k=\overline{V}$ как элемент псевдогруппы $\mathcal{P}$, причем

$$\left|F_{k,l}(\zeta)-\frac{\nu_1^{k_1}}{\nu_2^{k_2}}\zeta\right|<\varepsilon,\quad \zeta\in\overline{V}.$$

Если ε достаточно мало, то уравнение

$$f_2(\zeta)=F_{k,l}(\zeta) \tag{86}$$

также имеет изолированное решение $\zeta^{(k,l)}\in V$. Тем самым построен предельный цикл $\gamma_{V,k,l}$.

Следующее предложение дает возможность набрать из циклов $\{\gamma_{V,k,l}\}$ счетную систему гомологически независимых циклов.

Предложение 17. *Для любого $M>0$ можно так выбрать окрестность V, числа k_1, k_2, l и форму $\omega_0=A_0dz+B_0dw$ с полиномиальными коэффициентами $A_0(z, w)$ и $B_0(z, w)$, что цикл $\gamma_{V,k,l}$ будет обладать следующими свойствами:*

$$1^\circ.\ \int\limits_{\gamma_{V,k,l}}\omega_0=I\neq 0. \tag{87}$$

$$2^\circ.\ \left|z|_{\gamma_{V,k,l}}\right|>M. \tag{88}$$

4. Редукция теоремы 4 к предложению 17. Ниже мы докажем предложение 17, а сейчас выведем из него теорему 4. Циклы γ_m будем строить по индукции. Пусть $M_m=\max\limits_{k=1,\ldots,m-1}(\|z|_{\gamma_k}\|_C,\ \|w|_{\gamma_k}\|_C)$. Цикл γ_m выберем так, что для некоторой формы ω_m полиномиальными коэффициентами выполняется аналог условия (87):

$$\int\limits_{\gamma_m}\omega_m\neq 0; \tag{89}$$

$$\left|z|_{\gamma_m}\right|>M. \tag{90}$$

Среди циклов $\{\gamma_m\}$ нет конечной подсистемы циклов, расположенных на аналитической кривой $\varphi\subset\{(z, w)\}$ и гомологически зависимых на этой кривой. (Здесь неважно, что в нашем контексте, φ — решение уравнения α.)

Предположим противное. Тогда существуют такие ненулевые целые числа $c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}$, что для любой формы $\omega=Adz+Bdw$ с полиномиальными коэффициентами A и B

$$\sum_{j=1}^{k}c_{m_j}\int\limits_{\gamma_{m_j}}\omega=0. \tag{91}$$

бых точек уравнения $\mathcal{A}$, расположенных в области Ω и через Y' — множество бесконечно удаленных особых точек уравнения $\mathcal{A}$. По определению

$$Y = \{P_j(\alpha) \mid j = 1, \ldots, n^2, \quad \alpha \in V \subset M\}$$

и

$$Y' = \{a_j(\alpha) \mid j = 1, \ldots, n, \quad \alpha \in V \subset M\},$$

где $P_j(\alpha)$ — решения системы

$$P(z, w, \alpha) = Q(z, w, \alpha) = 0.$$

Окрестность V можно считать столь малой, что множество $Y(Y')$ распадается на n^2, $(n+1)$ неприводимых компонент.

Предложение 9′. *Окрестность V можно выбрать столь малой, что для некоторой окрестности $\tilde{U}$ множества $Y \bigcup Y'$, на многообразии $X' \setminus \tilde{U}$ определено аналитическое слоение Ξ, коразмерности 1, инвариантное относительно уравнения $\mathcal{A}$ и трансверсальное плоскостям* $\mathbf{C}P^2 \times \{\alpha\}$.

Каждый слой имеет непустое пересечение с U_{α_0}; слой ξ_p, содержащий точку $p \in U_{\alpha_0}$, определяется формулой

$$\xi_p = \bigcup_{\alpha \in V} \varphi_{h_\alpha p} = \bigcup_{q \in \eta_p} \varphi_q. \tag{57′}$$

5. Доказательство предложения 9′. а) Нам нужно доказать следующее:

a) $\bigcup_{p \in U_0} \xi_p \supseteq X' \setminus \tilde{U}$; (58′)

b) $\xi_p \cap \xi_{p'} \neq \varnothing \Rightarrow \xi_p = \xi_{p'}$; (59′)

c) разбиение пространства X' на множества ξ_p есть аналитическое слоение.

Соотношение (58′) выводится из теоремы о плотности точно так же, как (58). Утверждение b) доказывается не просто: дело в том, что мы не можем воспользоваться сразу равенствами (57′) и (55′) подобно тому, как это сделано в разделе 7.3: равенство (55) справедливо для всех $t \in \mathcal{O}'$, а (55′) — лишь для счетного множества $\{\alpha_m\} \subset M$. Чтобы обойти эту трудность, мы воспользуемся минимальностью множества M (свойство $M2$), а для этого проведем дополнительные построения.

Пусть μ — произвольная риманова метрика на $X' \setminus Y \setminus Y'$, такая, что

$$\rho(x, Y \bigcup Y') = \infty, \quad \forall x \in X' \setminus Y \setminus Y'. \tag{70}$$

Пусть K_p^ρ — геодезический круг радиуса ρ с центром p на решении φ_p уравнения $\mathcal{A}$ в метрике $\mu|\varphi_p$.

Лемма 9. *Существует такое ρ, что*

$$\bigcup_{p \in U} K_p^\rho \supseteq X' \setminus \tilde{U}.$$

Доказательство. Для каждой точки $x \in X'$ пересечение $\varphi_x \cap U$ непусто по теореме о плотности. Пусть $p \in \varphi_x \cap U$, $\gamma_{p,x} \subset \varphi_x$ — велюбого начального значения также претерпевает умножение на ν_j. Заметим еще, что в карте (z_1, w_1)

$$\omega_0 = dw_1/z^2_1.$$

Пусть $\mu \in \pi_1(F_\alpha, a)$. Обозначим через $\mu(\zeta)$ кривую с начальным условием $\zeta \in \Gamma$, накрывающую над μ на решении φ_ζ при проектировании $(z_1, w_1) \to w_1$; кривая $\mu(\zeta)$ определена для всех ζ, достаточно близких к нулю. Имеем

$$\int\limits_{\gamma^{(s,l)}} \omega_0 = \int\limits_{\mu_1^{l+k_1(s)}(\zeta^{(s,l)})} \omega_0 - \int\limits_{\mu_2(\zeta^{(s,l)})} \omega_0 - \int\limits_{\mu_1^l(\zeta_1^{(s,l)})} \omega_0 - \int\limits_{\mu_2^{k_2(s)}(\nu_1^l \zeta_1^{(s,l)})} \omega_0 \qquad (94)$$

Второе слагаемое в этом выражении можно не учитывать при вычислении предела (97): оно остается ограниченным при $(s, l) \to \infty$, поскольку $\zeta^{(s,l)} \to \zeta^0$.

Из определения первой вариации следует, что существует такая константа $C>0$, что

$$\left| \int\limits_{\mu_j(\xi)} \omega_0 - \zeta^{-2} \int\limits_{\mu_j} z_1^{-2} dw_1 \right| < C |\zeta^{-2}| \qquad (95)$$

для всех $\zeta \in U$, $j=1, 2$.

Пусть η — функция перехода от карты ζ к карте ζ_2, линеаризующей отображение f_2. Без ограничения общности можно считать, что $\eta'(0)=1$. Из замечания 11 следует, что

$$\int\limits_{\mu_1^m(\xi)} \omega_0 = \sum_{m'=1}^{m} \int\limits_{\mu_1(\nu_1^{m'}\zeta)} \omega_0, \qquad (96)$$

а также

$$\int\limits_{\mu_2^m(\zeta)} \omega_0 = \sum_{m'=1}^{m} \int\limits_{\mu_2(\eta^{-1}(\nu_2^{m'}\eta(\zeta)))} \omega_0. \qquad (97)$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\mu_j^m} z_1^{-2} = \sum_{k=0}^{m-1} \nu_j^{-2k} \int\limits_{\mu_j} z_1^{-2} = \frac{\nu_j^{-2m}-1}{\nu_j^{-2}-1} \int\limits_{\mu_j} z_1^{-2}, \quad j=1, 2. \qquad (98)$$

Из формул (95) — (98) следует, что

$$\left| \int\limits_{\mu_1^m(\zeta)} \omega_0 - \zeta^{-2} \int\limits_{\mu_1^m} z^{1-2} \right| < C \left| \zeta^{-1} \frac{|\nu_1^{-m}|-1}{|\nu_1^{-1}|-1} \right|, \qquad (99)$$

$$\left| \int\limits_{\mu_2^m(\zeta)} \omega_0 - \eta^{-2}(\zeta) \int\limits_{\mu_2^m} z^{1-2} \right| < C' \left| \eta^{-1}(\zeta) \frac{|\nu_2^{-m}|-1}{|\nu_2^{-1}|-1} \right|, \qquad (100)$$

где C' — некоторая константа, для которой аналог формулы (95) справедлив в карте ζ_2.

Обозначим $T_{ij}=T_i\cap T_j$, пусть T^x_{ij} — связная компонента T_{ij}, содержащая точку x, $W^x_{ij}=\pi_i T^x_{ij}$, $W^x_{ji}=\pi_j T^x_{ij}$. Выберем среди множеств $\{W^x_{ij}\}$ те, замыкание которых не пересекает U_{α_0}, и пусть $V\subset V_2$ — такая окрестность точки α_0, пересечение которой с проекциями $\pi\, w_{ij}$ этих замыканий на M вдоль вертикальных плоскостей пусто:

$$V\cap\pi\overline{W}^x_{ij}\neq\varnothing\Rightarrow\overline{W}^x_{ij}\cap U_{\alpha_0}\neq\varnothing. \tag{76}$$

Окрестность V и есть искомая; $X=\mathbb{C}P^2\times V$.

Отображение $\pi_i\colon T_i\to W_i\subset U$ индуцирует на T_i аналитическое слоение $\Xi_i=\pi^*_i\mathrm{H}$ коразмерности 1. Мы докажем, что существует аналитическое слоение Ξ коразмерности 1 на X, такое, что

$$\Xi|_{T_i}=\Xi_i. \tag{77}$$

Тем самым будут доказаны одновременно утверждения b) и c).

Нам достаточно доказать, что ограничения $\Xi_i|_{T_{ij}}$ и $\Xi_j|_{T_{ij}}$ задают одно и то же слоение:

$$\Xi_i|_{T_{ij}}=\Xi_j|_{T_{ij}}. \tag{78}$$

Из формулы (75) следует тогда, что слоение Ξ определено на всем $X\setminus\widetilde{U}$.

В дальнейшем рассматриваются только такие области W^x_{ij}, которые удовлетворяют соотношениям (76).

Пусть $x\in T_{ij}$ — произвольная точка, $\pi_i x=q$, $\pi_j x=q'$. Пусть γ', $\gamma''\subset\varphi_x$ — две кривые с началом x и концами q, q', лежащие в T_i и T_j $\gamma=\gamma'^{-1}\gamma''$. Обозначим через Δ^q_{ij} росток функции последования $\Delta_{\gamma,\mathcal{A}}\colon(U,q)\to(U,q')$. Заметим, что

$$\pi^x_i\cdot\Delta^q_{ij}=\pi^x_j$$

(здесь π^x_i, π^x_j — ростки в точке x отображений π_i, π_j). Нам нужно доказать, что $\Delta^q_{ij}\eta_q=\eta_{q'}$, где η_q—росток слоя η_q в точке q. Мы докажем

Предложение 14. *Отображение Δ^q_{ij} сохраняет слоение* H.

Сначала докажем

Предложение 15. *Росток Δ^q_{ij} допускает аналитическое продолжение Δ^p_{ij} в любую точку $p\in\overline{W}^x_{ij}$. При этом Δ^p_{ij} есть росток функции последования для уравнения $\mathcal{A}$, соответствующий некоторой кривой $\gamma\subset\varphi_p$ длины не более* 4ρ.

Доказательство. Пусть $\mu=\{\mu(s)\}\colon[0,1]\to\overline{W^x_{ij}}$— произвольная кривая с началом q и концом p, $\mu[0,1)\in W^x_{ij}$. Рассмотрим множество S тех s, для которых росток Δ^q_{ij} допускает аналитическое продолжение $\Delta^{\mu(s')}_{ij}$ на кривую $\{\mu(s')\,|\,s'\in[0,s]\}$. Росток $\Delta^{\mu(s')}_{ij}$ есть росток функции последования вдоль некоторой кривой $\gamma_{s'}=\varphi_{M_{s'}}$, длины не боль-

а) Плотность.

Гипотеза I. *Пусть $\mathcal{F}_1$ — конечно-порожденная некоммутативная подгруппа $\mathcal{F}$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ — соответствующая псевдогруппа. Тогда существует такое открытое, плотное в окрестности нуля множество состоящее из конечного числа связных компонент* Ω_i, *что орбита* $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(p)$ *любой точки* $p \in \Omega_i$ *плотна в области* Ω_i.

С гипотезой I тесно связана следующая задача. Пусть $v(z)$ — аналитическое векторное поле на $(\mathbf{C}^1, 0)$ с особой точкой 0; $g^1_{v(z)}:(\mathbf{C}^1, 0) \to \to(\mathbf{C}^1, 0)$ — сдвиг по траекториям системы $\dot{z}=v(z)$ (с вещественным временем) за единичное время.

Гипотеза II (аналитическая проблема включения для ростков $(\mathbf{C}^1, 0)\to(\mathbf{C}^1, 0)$ с тождественной линейной частью). *Для каждого роста конформного отображения* $\mathbf{f}: z \to z + \ldots$ *существует аналитическое векторное поле* $v(z)$ *с особой точкой* 0, *такое, что* $\mathbf{f} = g^1_{v(z)}$.

Замечание 13. Аналогичная проблема для ростков с нетождественной линейной частью $\mathbf{f}: z \to \nu z + \ldots$ подробно исследована: при $|\nu| \neq 1$ положительный ответ дается теоремой Шредера (раздел 3.1); если $\nu = e^{2\pi i \varphi}$, число φ вещественно и имеет „хорошую арифметику“ (плохо приближается рациональными), положительный ответ дается теоремой Зигеля [4]; если $\nu = e^{2\pi i \varphi}$, φ — рационально (но не целое), ответ, вообще говоря, отрицательный.

б) Негрубость.

Проблема I. *Какое достаточное условие следует наложить на группу $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$, чтобы из топологической сопряженности групп $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ следовала аналитическая сопряженность?*

Гипотеза III. *Искомое достаточное условие — некоммутативность.*

в) Коммутативность.

Проблема II. *Классифицировать все коммутативные подгруппы $\mathcal{F}_1$ группы $\mathcal{F}$ ростков конформных отображений* $(\mathbf{C}^1, 0)\to(\mathbf{C}^1, 0)$.

В случае, если хотя бы один росток $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_1$ эквивалентен линейному ростку: $\zeta \to \nu\zeta$, причем ν нерезонансное ($\nu^n \neq 1$ при $n \in \mathbf{Z} \setminus 0$), — нетрудно доказать, что группа $\mathcal{F}_1$ аналитически эквивалентна линейной. В общем случае вопрос остается открытым и, по-видимому, требует привлечения алгебраической техники.

---

* Примечание при корректуре. Конечно-порожденная группа $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ разрешима, если и только если ее коммутант коммутативен. Гипотезы I и III с заменой некоммутативности на неразрешимость доказаны А. А. Щербаковым; для разрешимых групп построены контрпримеры. В разделе 2а следует заменить коммутативность на разрешимость (автору неизвестные примеры уравнений класса $\mathcal{A}_n$ с некоммутативной разрешимой группой монодромии на бесконечности); разделы 2б и 3 сохраняются без изменений.

Инвариантные компоненты у псевдогруппы $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ естественно возникают, если, например, все преобразования $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ вещественны на вещественной оси.

скости $\mathbf{C}P^2\times\{t\}$ с U_* есть конечное число открытых шаров. Положим $\mathcal{A}^*=\Psi^*\mathcal{A}$ — уравнение на $\tilde{X}$, $\Xi^*=\Psi^*\Xi$ — слоение на $\tilde{X}\setminus U_*$. Ξ^* есть слоение на топологические многообразия, аналитическое всюду на $\tilde{X}\setminus U_*\setminus\mathbf{C}P^2\times\{0\}$. По теореме об устранимой особенности Ξ^* — аналитическое слоение всюду на $\tilde{X}\setminus U_*$. Оно инвариантно относительно уравнения $\mathcal{A}^*$ и трансверсально плоскостям $t=\mathrm{const}$. Поэтому слоение Ξ^* порождает в $\tilde{X}\setminus U_*$ интегрируемое распределение $\mathcal{L}$, которое в областях $\Omega\cap\tilde{X}\setminus U_*$ и $\Omega_1\cap\tilde{X}\setminus U_*$ соответственно задается формулами (63) и (64). По теореме Осгуда — Брауна функция R допускает аналитическое продолжение на все компоненты области U_*, расположенные в Ω, функция R_1 — на компоненты U_*, расположенные в Ω_1; тем самым распределение $\mathcal{L}$ продолжено до распределения $\tilde{\mathcal{L}}$ на $\tilde{X}$, интегрируемого всюду на $\tilde{X}\setminus Y$ в силу аналитичности форм $\omega\wedge d\omega$ и $\omega_1\wedge d\omega_1$. Распределение $\mathcal{L}$ порождает поэтому слоение $\tilde{\Xi}^*$ на $\tilde{X}\setminus Y$. Слоение $\tilde{\Xi}^*$ трансверсально плоскостям $t=\mathrm{const}$ всюду вне Y (т. е. там, где $|P|+|Q|\neq 0$ либо $|P_1|+|Q_1|\neq 0$) и инвариантно относительно уравнения $\mathcal{A}^*$. Бесконечно удаленная плоскость является слоем слоения $\tilde{\Xi}^*$. Мы теперь можем применить лемму 6 и получим, что все уравнения $\alpha\in\psi(O)$, в частности уравнение α_1, аффинно эквивалентны α_0.

Множество M_{α_0} уравнений $\alpha\in\mathcal{A}_n$, аффинно эквивалентных уравнению α_0, образует алгебраическое многообразие (содержащие в силу предыдущего область $V\setminus\Sigma\subset M$); следовательно, $M\subset M_{\alpha_0}$. Теорема 3 доказана.

§ 9. КОМПЛЕКСНЫЕ ЦИКЛЫ

Этот параграф посвящен доказательству предложения 1 и теоремы 4 введения.

1. Предложение 1. *Замкнутая фазовая кривая $\gamma\subset\mathbf{R}P^2$ вещественного уравнения $\alpha\in\mathcal{A}_n$ является циклом на своей комплексификации $\overset{\mathbf{C}}{\gamma}$. Другими словами, петля γ не стягивается на решении $\varphi=\overset{\mathbf{C}}{\gamma}$ уравнения α.*

Содержателен только случай $n\geqslant 2$*.

Доказательство. Предположим противное; пусть $G\subset\varphi$ — область, гомеоморфная кругу и ограниченная петлей γ. Заметим, что в силу вещественности уравнение α сохраняется при инволюции J, которая в аффинной карте (z, w) имеет вид

$$(z, w)\to(\bar{z}, \bar{w}).$$

Объединение $G\cup JG$ представляет собой образ сферы $\mathbf{C}P^1$ при голоморфном погружении в $\mathbf{C}P^2$ и, следовательно, полно (в смысле

* При $n=1$, уравнение $\alpha\in\mathcal{A}_1$, имеющее хотя бы одну замкнутую фазовую кривую, линейно эквивалентно стандартному: $w'=-w/z$. Замыкания всех его решений задаются формулой $z^2+w^2=c$, гомеоморфны сфере $\mathbf{C}P^1$ и проходят через две бесконечно удаленные особые точки; эти точки по определению не принадлежат решениям и препятствуют стягиванию вещественных циклов.

(или — след линейной части уравнения α в точке P_j не равен нулю — можно доказать, что это требование более сильно) *абсолютно негрубо в смысле теоремы 3.*

4. Замечания к теоремам о негрубости

а) Необходимое условие топологической эквивалентности уравнений α и $\alpha' \in \mathscr{A}'_n$ (теорема 2′), можно усилить, а именно снять условие $\operatorname{Im}\lambda_j \neq 0$ (В. А. Найшуль). Впрочем, если справедлива гипотеза III и в проблеме III ответ положительный, то для уравнений, отличных от гамильтоновых и однородных, необходимым условием топологической эквивалентности является совпадение наборов λ и λ' (или λ и $\overline{\lambda}'$). Топологическая классификация гамильтоновых уравнений — классический результат; для однородных уравнений это недавно сделано Н. Н. Ладисом: им доказано, что условия (41), (42) необходимы и достаточны для топологической эквивалентности однородных уравнений $\alpha \in \mathscr{A}'_n$, без предположения $\operatorname{Im}\lambda_j \neq 0$.

b) В теореме 3 условие близости к тождественному гомеоморфизма H, сопрягающего уравнения α и α', нужно только для того, чтобы гомеоморфизм $H \mid F_\alpha$ не слишком сильно сдвигал петли μ_j — представители канонических образующих группы $\pi_1(F_\alpha)$. По-видимому, это условие можно снять, если доказать следующее утверждение.

Гипотеза VI. *Пусть $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}$ — подгруппа «общего положения» с n образующими $\mathfrak{f}_j$, $j=1, \ldots, n$. Пусть $k_m : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_1$ — последовательность автоморфизмов, такая, что*

1°. *Группы $k_m\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_1$ аналитически сопряжены голоморфизмом h_m, т. е. диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^1, 0)_1 & \xrightarrow{\mathfrak{f}} & (\mathbf{C}^1, 0)_1 \\ \mathbf{h}_m \downarrow & & \downarrow \mathbf{h}_m \\ (\mathbf{C}^1, 0) & \xrightarrow{k_m\mathfrak{f}} & (\mathbf{C}^1, 0)_2 \end{array}$$

коммутативна.

2°. *$k_m\mathfrak{f}_j \to \mathfrak{f}_j$ при $m \to \infty$, $j=1, \ldots, n$.*

Тогда, начиная с некоторого m, $k_m = \mathrm{id}$.

5. Счетное число циклов

а) Гипотеза VII. ***Всякое уравнение $\alpha \in \mathscr{A}'_n$ с некоммутативной группой монодромии $\mathscr{F}_\alpha$ имеет счетное число гомологически различных комплексных предельных циклов.***

Если в проблеме III ответ положительный, то гипотеза VII эквивалентна следующей:

Гипотеза VII′. *Всякое уравнение $\alpha \in \mathscr{A}'_n$, отличное от гамильтонова или однородного (а также ему аффинно эквивалентного), имеет счетное число гомологически различных комплексных предельных циклов.*

Гамильтоновы уравнения вообще не имеют комплексных предельных циклов, а однородные уравнения $\alpha \in \mathscr{A}'_n$ имеют не более $2n+1$ гомологически независимых предельных циклов, расположенных на прямолинейных решениях.

Здесь $z^1=z^1(w_1)$ — первая вариация решения F_α по начальному условию, а канонические образующие μ_j группы $\pi_1(F_\alpha)$ имеют специальный вид: $\mu_j=\tilde{\mu}_j^{-1}\mu'_j\tilde{\mu}_j$, где μ'_j — положительно ориентированная малая окружность с центром a_j, $\tilde{\mu}_j$ — отрезок $[a, b_j]$ с концом $b_j\in\mu'_j$.

Предложение 16. *Множество уравнений $\alpha\in\mathcal{A}_n$, $n\geqslant 2$, удовлетворяющих требованиям* 1°—3°, *имеет полную меру.*

Доказательство. Для уравнений, удовлетворяющих требованиям 1° и 2°, это утверждение уже доказано (см. замечание 8 и предложения 3 и 7).

Заметим, что функция $L=L(\alpha)$ допускает (неоднозначное) аналитическое продолжение на все пространство $\mathcal{A}'_n$; поэтому нам достаточно доказать, что $L\neq 0$.

Имеем

$$L=\int_{a_1}^{a_2} z^{1-2}dw_1=\int_{a_1}^{a_2}\prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{w_1-a_j}{a-a_j}\right)^{-2\lambda_j}dw_1. \tag{85}$$

Здесь путь интегрирования имеет вид $[a_1, b_1]\,\tilde{\mu}_1^{-1}\tilde{\mu}_2\,[b_2, a_2]$, соотношение (85) справедливо, когда интеграл в правой части сходится. Отличие этого интеграла от тождественного нуля (как функции параметров a_j и λ_j) очевидно.

3. **Построение счетного числа гомологически независимых предельных циклов** проводится с помощью основного приема из § 3.

Пусть Γ, f_j, ν_j, a, $\mathcal{P}$ те же, что в разделе 1.7, $|\nu_1|<1$ в силу требования 3° на уравнения типа Худай-Веренова и пусть ζ_j — карта, определенная в окрестности $U_j\ni a$ и линеаризующая отображение f_j, U_j — круг в карте ζ_j. Точки $p\in U_1$ будем отождествлять с их ζ_1 — координатами, а отображения $U_1\to U_1$ — с функциями, задающими их в карте ζ_1; для краткости будем писать ζ вместо ζ_1. Для любой области $V\subset U_1$, достаточно близкой к нулю и любых достаточно больших целых k_1, k_2, l, мы построим специальным образом предельный цикл на решении $\varphi_{(a,\zeta)}$, $\zeta\in V$, обозначаемый $\gamma_{V,k,l}$ $(k=(k_1, k_2))$.

Затем мы покажем, что можно выбрать счетное число окрестностей V_m и значений k^m, l_m так, что циклы $\gamma_m=\gamma_{V_m, k^m, l_m}$ окажутся гомологически независимыми.

Перейдем к построению цикла $\gamma_{V,k,l}$. По условию (83) функция последования $f_2(\zeta)$ нелинейная и частное $f_2(\zeta)/\zeta$ непостоянно в окрестности U_1. Выберем окрестность V так, что $f_2(V)\subset U_1$ и для любой точки $\zeta^0\in V$, $\frac{f_2(\zeta^0)}{\zeta^0}\bar{V}\subset U_1$. Фиксируем произвольно точку $\zeta^0\in V$ и число $\varepsilon>0$ и выберем $k_1>0$ и $k_2\in\mathbf{Z}$ так, что

$$\left|\frac{\nu_1^{k_1}}{\nu_2^{k_2}}-\frac{f_2(\zeta^0)}{\zeta^0}\right|<\varepsilon.$$

* Вариация z^1 — неоднозначная функция (см. формулу (39)); для любой петли $\mu\in\pi_1(F_\alpha, a)$ интеграл $\int_\mu z^{1-2}\,dw_1$, становится однозначно определенным, если указано начальное значение $z^1(a)$; всюду в дальнейшем полагаем $z^1(a)=1$.

С другой стороны, из теоремы Штольценберга [6, 2, с. 572], следует, что: а) в силу условия (89) каждый из циклов γ_m — полиномиально выпуклое множество; б) любая функция f, аналитическая в окрестности бицилиндра $\Delta_m: |z|\leqslant M_m$, $|w|\leqslant M_m$ и непрерывная на γ_m, может быть равномерно приближена полиномом P на $\Delta_m \cup \gamma_m$. Возьмем в качестве f функцию

$$f=\begin{cases} 0 \text{ на } \Delta_m, \\ 1 \text{ на } \gamma_m, \end{cases}$$ и пусть P — близкий к ней на $\Delta_m \cup \gamma_m$ полином.

Положим $\omega = P\omega_m$ и получим, что неравенство (89) противоречит равенству (91).

5. Доказательство предложения 17. Требование 2°, записанное в виде $\|z_1\|_{\gamma_{V,k,l}}\|_C < M^{-1}$, обеспечивается очевидным образом: нужно только выбрать окрестность V достаточно близко к нулю. Требование 1° следует из формулируемого ниже предложения 18. Положим $\omega_0 = wdz - zdw$.

Окрестность $V\subset U$ выберем так, чтобы выполнялось требование 2°, в остальном — произвольно. Пусть $\zeta^0\in V$ — произвольная точка, и $\nu = \frac{f_2(\zeta^0)}{\zeta^0}$. Выберем последовательность $k^{(s)} = (k_1^{(s)}, k_2^{(s)})$ так, что

$$k_1^{(s)}\to\infty,\ k_2^{(s)}\to\infty,\quad \nu_1^{k_1^{(s)}}/\nu_2^{k_2^{(s)}}\to\nu \quad \text{при } s\to\infty. \tag{92}$$

Обозначим через $\zeta^{(s,l)}$ решение уравнения (86) при $k=k^s$, $\zeta^{(s,l)}\in V$ и через $\zeta_1^{(s,l)}$ — точку $f_2(\zeta^{(s,l)})$. При $(s,l)\to\infty$,

$$\zeta^{(s,l)}\to\zeta^0,\ \zeta_1^{(s,l)}\to f_2(\zeta^0)\overset{\text{def}}{=}\zeta^1,$$

поскольку $F_{(s,l)}(\zeta)\overset{\text{def}}{=}F_{k^{(s)},l}(\zeta)\xrightarrow{l\to\infty} \dfrac{\nu_1^{k_1^{(s)}}}{\nu_2^{k_2^{(s)}}}\zeta\xrightarrow{s\to\infty}\nu\zeta$. Обозначим через $\gamma^{(s,l)}$ цикл $\gamma_{V,k^{(s)},l}$ и через $\varphi^{(s,l)}$ — решение, на котором он лежит.

Предложение 18.

$$\zeta^{0\,2}\lim_{\substack{s\to\infty\\ l\to\infty}}\nu_1^{2(l+k_1^{(s)})}\int_{\gamma^{(s,l)}}\omega_0 = L = \frac{\int_{\mu_1} z^{1^{-2}}dw_1}{\nu_1^{-2}-1}\cdot\frac{\int_{\mu_2} z^{1^{-2}}dw_1}{\nu_2^{-2}-1}. \tag{93}$$

Из предложения 18 и требования (84) следует, конечно, предложение 17.

Доказательство формулы (93) основано на том простом соображении, что чем ближе начальное условие к F_α, тем больше сходства между решением и первой вариацией.

Замечание 11. Это сходство усугубляется тем, что в карте ζ_j функция последования f_j линейна и совпадает с умножением на ν_j, $j=1, \ldots, n+1$, а первая вариация при продолжении над петлей μ_j из

Из формул (99) и (100) следует, что замена $\int\limits_{\gamma^{(s,\,l)}} \omega$ на I:

$$I = \zeta^{(s,l)-2}\left[\int\limits_{\mu_1^l} z^{1-2} + \nu_1^{-2l} \int\limits_{\mu_1 k_1^{(s)}} z^{1-2}\right] - \zeta_1^{(s,l)-2} \int\limits_{\mu_1^l} z^{1-2} - \eta^{-2}(\nu_1^l\, \zeta_1^{(s,l)}) \int\limits_{\mu_2 k_2^{(s)}} z^{1-2}$$

не меняет значения предела (93). Из (98) следует, что

$$I = \zeta^{(s,l)-2}\, \frac{\nu_1^{-2(l+k_1^{(s)})} - 1}{\nu_1^{-2} - 1} \int\limits_{\mu_1} z^{1-2} - \zeta_1^{(l,s)-2}\, \frac{\nu_1^{-2l} - 1}{\nu_1^{-2} - 1} \int\limits_{\mu_1} z^{1-2} -$$

$$- \eta^{-2}(\nu_1^l\, \zeta_1^{(l,\,s)})\, \frac{\nu_2^{-2k_2^{(s)}} - 1}{\nu_2^{-2} - 1} \int\limits_{\mu_2} z^{1-2}.$$

Учитывая, что $\eta(\zeta)/\zeta \to 1$ при $\zeta \to 0$, а также, что $\nu_1^{k_1^{(s)}} / \nu_2^{k_2^{(s)}} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \nu$ и $\zeta_1^{(s,l)} / \zeta^{(s,l)} \xrightarrow{(s,\, l\to\infty)} \nu$, получаем, что $\zeta^{02}\, \nu_1^{2(l+k_1^{(s)})}\, I \to L$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 12. Гомологическую независимость циклов γ_m можно доказать элементарно (без использования теоремы Штольценберга). Действительно, циклы γ_m можно построить несамопересекающимися и попарно непересекающимися. Тогда гомологическая зависимость, выраженная формулой (91), возможна только с коэффициентами $c_{m_j} = \pm 1$. Беря $\omega = \omega_0$ и выбирая циклы γ_m так, что

$$\left|\int\limits_{\gamma_m} \omega_0\right| > \sum_{k=1}^{m-1} \left|\int\limits_{\gamma_k} \omega_0\right|$$

(это можно сделать в силу соотношения (93)), получим противоречие с равенством (91).

З а к л ю ч е н и е

Во всех теоремах настоящей статьи: о плотности (Худай-Веренов), о сильной негрубости (теорема 3), о счетном числе комплексных предельных циклов (теорема 4) — на уравнение $\alpha \in \mathscr{A}'_n$ накладывались многочисленные ограничения, из которых сильнейшее требует, чтобы линейные части преобразований монодромии на бесконечности образовывали всюду плотную подгруппу группы $\mathbf{C}^*$. Это ограничение исключает всюду плотное подмножество из пространства коэффициентов. Ниже обсуждаются гипотезы (некоторые из них, видимо, просты), позволяющие обобщить перечисленные теоремы на уравнения, удовлетворяющие более естественным ограничениям; исключительными окажутся гамильтоновы уравнения, однородные (или им аффинно эквивалентные) и, может быть, еще какие-нибудь (см. 2а). Мы начнем, как всегда, с групп монодромии.

1. Группы ростков и псевдогруппы конформных отображений $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)$.

Пусть, как и раньше, $\mathscr{F}$ — группа всех ростков конформных отображений $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)$ с операцией „суперпозиция“

2. Плотность.

а) Гипотеза I означает, что если группа монодромии на бесконечности уравнения $\alpha \in \mathcal{A}'_n$ некоммутативна, то в некоторой области, замыкание которой содержит бесконечно удаленное решение F_α, все решения (кроме F_α) плотны. Естественно возникает

Проблема III. *Описать все уравнения $\alpha \in \mathcal{A}'_n$ с коммутативной группой монодромии $\mathcal{F}_\alpha$.*

Если уравнение α гамильтоново или аффинно эквивалентно однородному, то группа $\mathcal{F}_\alpha$ коммутативна.

Верно ли, что больше нет уравнений $\alpha \in \mathcal{A}'_n$, обладающих тем же свойством?

б) Плотность в CP^2 решений уравнения α мы выводим из плотности решений в окрестности F_α и следующего предложения ($\ast$) (раздел 5.4):

Если уравнение $\alpha \in \mathcal{A}'_n$ не имеет алгебраических решений, кроме F_α, и характеристические числа λ_j всех бесконечно удаленных особых точек уравнения α невещественны, то каждое решение уравнения α имеет предельные точки на F_α.

Это предложение — простое следствие того факта, что в окрестности особой точки с невещественным характеристическим числом все решения накапливаются к сепаратрисам. Аналогичное утверждение может быть неверно, если характеристическое число вещественно (пример — линейное уравнение). Возникает

Проблема IV. *Верно ли предложение ($\ast$), если среди чисел λ_j есть вещественные? Верно ли более сильное утверждение: в условиях предложения ($\ast$) каждое решение уравнения α (кроме F_α) попадает в любую область, замыкание которой содержит F_α?*

Если в проблемах III и IV ответ положительный, — значит, справедлива

Гипотеза IV. *Если уравнение $\alpha \in \mathcal{A}'_n$ не является гамильтоновым или аффинно эквивалентным однородному, то все его решения (кроме, может быть, конечного числа алгебраических) плотны в CP^2.*

3. Абсолютная негрубость

При доказательстве теоремы 3 мы использовали следующие свойства уравнения α и близких к нему уравнений $\alpha' \in U_\alpha$.

1°. Все решения уравнений α и α', кроме F_α, плотны в CP^2.

2°. Из топологической сопряженности группы F_α с подгруппой $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ следует их аналитическая сопряженность.

3°. Уравнение α имеет n^2 различных особых точек $P_j \in \mathbf{C}^2$, и в окрестности каждой из них не является локально интегрируемым.

Очевидная переформулировка условия 3° затруднительна: в вещественном случае — это проблема различения центра — фокуса для невырожденной особой точки уравнения $\alpha \in \mathcal{A}_n$; окончательно эта проблема решена только для $n=2$. Возможно, впрочем, что требование 3° можно ослабить. Неоднородность и негамильтоновость уравнения α следует из требования 3°; если верна гипотеза IV и в проблеме III ответ положительный, то верна

Гипотеза V. *Уравнение $\alpha \in \mathcal{A}'_n$, имеющее n^2 различных особых точек $P_j \in \mathbf{C}^2$, в окрестности которых уравнение α неинтегрируемо*

b) Соответствующая гипотеза для псевдогрупп такова:

Гипотеза VII″. *Пусть $\mathcal{P}$ — некоммутативная псевдогруппа отображений $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)$. Тогда для любой окрестности V точки 0 найдется отображение $\mathfrak{f} \in \mathcal{P}$, определенное в окрестности V и имеющее изолированную неподвижную точку $p \in V$.*

Для того чтобы перейти от гипотезы VII″ к VII, элемент $\mathfrak{f}$ должен быть специально подобран так, чтобы для соответствующего предельного цикла γ можно было доказать предложение 17.

6. Стратификация пространства алгебраических дифференциальных уравнений на $\mathbf{C}P^2$

Обозначим через $\mathcal{B}_n$ пространство таких дифференциальных уравнений на $\mathbf{C}P^2$, которые в *любой* аффинной карте записываются как уравнения с рациональной правой частью, числитель и знаменатель которой имеют степень не выше $n+1$. Тогда $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Общее уравнение $\alpha \in \mathcal{B}_n$ не имеет прямолинейных решений (для уравнения $\alpha \in \mathcal{B}_n$ нет выделенной аффинной окрестности). Поэтому свойства, которые были общими для уравнений класса $\mathcal{A}_n$, перестают быть таковыми в классе $\mathcal{B}_n$. Правдоподобно, что теоремы 2—4 тем не менее справедливы в классе $\mathcal{B}_n$. Подтверждением этой гипотезы служит теорема Б. Мюллера [10]:

Для локально типичного уравнения $\alpha \in \mathcal{B}_n$ все решения плотны в $\mathbf{C}P^2$.

Доказательство теоремы получается рассмотрением псевдогрупп преобразований монодромии, зависящих от параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский И. Г. и Ландис Е. М. О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены 2-й степени. — «Матем. сб.», 1955, т. 37 (79), № 2, 209—250.
2. Худай-Веренов М. О. Об одном свойстве решений одного дифференциального уравнения. — «Матем. сб.», 1962, т. 56 (98), № 3, с. 301—308.
3. Ильяшенко Ю. С. Слоения на аналитические кривые. — «Матем. сб.», 1972, т. 88 (130), № 4, с. 558—577.
4. Зигель А. А. Лекции по небесной механике. М., 1959.
5. Ильяшенко Ю. С. Плотность индивидуального решения и эргодичность семейства решений уравнения $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)}$. — «Матем. заметки», 1968, т. 4, № 6, р. 741—750.
6. Stolzenberg G. Uniform approximation on smooth curves. — «Acta Math.», 1966, v. 115, № 3—4, p. 185—198.
7. Ганнинг Р. и Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1969.
8. Мюллер Б. Автореф. На соиск. учен. степени канд. физ.-матем. наук. М., 1974.
9. Ладис Н. Н. Об интегральных кривых комплексного однородного уравнения (в печати).
10. Мюллер Б. О плотности решений одного уравнения в $\mathbf{C}P^2$. — «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 3, с. 363—377.
11. Уокер Р. Алгебраические кривые. М., ИЛ, 1952.
12. Гейхман Л. М., Худай-Веренов М. О. — «Изв. ТАН», 1975, № 5.
13. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М., «Наука», 1972.

Поступило 3.VII. 1976