АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Ю.С. Ильяшенко. Замечания о топологии... и теор. Ладиса

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ · ТОМ 11 · ВЫПУСК 2

МОСКВА · 1977

Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 2, 1977, 28—38

УДК 571.9 + 517.5

ЗАМЕЧАНИЯ О ТОПОЛОГИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ И ТЕОРЕМА ЛАДИСА

Ю. С. Ильяшенко

§ 1. Введение

1. Гиперболические системы типа Зигеля. Недавно Н. Н. Ладис [5] установил следующий неожиданный результат: *в пространстве уравнений*

$$\dot{z} = \Lambda z, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbf{C}^n, \tag{1}$$

существует область, состоящая из уравнений, как правило, попарно топологически неэквивалентных.

Теореме Ладиса предпошлем несколько определений.

Определение. *Точка* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ *принадлежит области Зигеля*, если выпуклая оболочка $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ точек λ_j на $\mathbf{C}^1$ содержит 0; в противном случае λ *принадлежит области Пуанкаре.*

Точка $\lambda \in \mathbf{C}^n$ называется точкой *гиперболического типа*, если все частные λ_j / λ_k $(j \neq k)$ невещественны.

Аналитическое уравнение называется *уравнением типа Зигеля*, или *типа Пуанкаре*, или *гиперболическим*, если оно линейно, автономно и набор собственных чисел соответствующего оператора типа Зигеля, или типа Пуанкаре, или гиперболического типа.

Замечание. Набор собственных чисел содержит каждое число столько раз, какова его кратность; поэтому все уравнения гиперболического типа приводятся к диагональному виду.

Два аналитических дифференциальных уравнения на аналитических многообразиях X и X' называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм H: $X \to X'$, переводящий решения одного уравнения в решения другого *); гомеоморфизм H называется *сопрягающим.*

Теорема 1 (Н. Н. Ладис). *Два линейных уравнения зигелева гиперболического типа* (1) *и*

$$\dot{w} = \mathrm{M} w, \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}, \quad w \in \mathbf{C}^n, \tag{2}$$

топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда наборы $\lambda^{-1} = (\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$ *и* $\mu^{-1} = (\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_n^{-1})$ *R-линейно эквивалентны. Это зна-*

*) По определению, аналитическое дифференциальное уравнение на многообразии X — это аналитическое поле направлений: решение не содержит особых точек, даже если их присоединение оставляет решение на особой голоморфной кривой. Поэтому сопрягающий гомеоморфизм переводит особые точки в особые.

чит, что существует R-линейное отображение A: ${}^{R}\mathbf{C} \to {}^{R}\mathbf{C}$, переводящее набор λ^{-1} в набор μ^{-1}.

Это условие можно сформулировать еще и так: при подходящей перенумерации набора μ

$$\operatorname{rang}(\lambda^{-1}, \mu^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}) = 2. \tag{3}$$

Набор λ^{-1} будем называть набором обратных собственных чисел*).

2. Топологическая классификация комплексных линейных систем в настоящее время почти закончена. В работе Гукенхеймера [1] доказано, что любые два гиперболических уравнения типа Пуанкаре топологически эквивалентны. В работах Н. Н. Ладиса [5] и [6] фактически доказано, что R-линейная эквивалентность наборов обратных собственных чисел необходима для топологической эквивалентности уравнений типа Зигеля независимо от того, гиперболичны они или нет; для диагональных уравнений это условие также достаточно.

Остается открытым вопрос, достаточно ли это условие для топологической эквивалентности уравнений типа Зигеля, имеющих нетривиальные жордановы клетки. Н. Н. Ладис предложил гипотезу, согласно которой топологическая эквивалентность таких уравнений равносильна линейной! Если эта гипотеза справедлива, то здесь возникает явление абсолютной негрубости, о котором пойдет речь ниже. Остается также открытым вопрос о топологической классификации негиперболических уравнений типа Пуанкаре.

3. Обобщение на нелинейный случай. Вопрос о топологической эквивалентности аналитических уравнений

$$\dot{z} = \Lambda z + o(|z|) = f(z), \quad z \in \mathbf{C}^n, \tag{4}$$

и

$$\dot{w} = \mathrm{M}w + o(|w|) = g(w), \quad w \in \mathbf{C}^n, \tag{5}$$

в окрестности особой точки 0 сводится тривиальным образом к вопросу о топологической эквивалентности их линейных частей, если сами уравнения «линеаризуемы», т. е. аналитически эквивалентны своим линейным частям. Это имеет место для «большинства» уравнений: достаточно, чтобы наборы λ и μ собственных чисел матриц Λ и M были несоизмеримы по Зигелю [2].

Однако необходимое условие топологической эквивалентности уравнений в окрестности особой точки должно быть несравненно более грубым, чем условие аналитической эквивалентности уравнения своей линейной части; оно, в частности, никак не должно использовать арифметические свойства наборов λ и μ собственных чисел. Представляется правдоподобной

Гипотеза. *Для топологической эквивалентности уравнений* (4) *и* (5) *с зигелевой гиперболической линейной частью в окрестности особой точки* 0 *необходима топологическая эквивалентность их линейных частей.*

Для $n = 3$ это утверждение доказано В. А. Найшулем.

Достаточное условие топологической эквивалентности «нелинеаризуемых» уравнений не может быть столь простым. Оно должно учитывать нелинейные эффекты: например, при $n = 2$ любая окрестность особой точки типичного «нелинеаризуемого» уравнения содержит счетное число комплексных предельных циклов, если только отношение собственных чисел λ_1/λ_2 аномально хорошо приближается рациональными числами [7].

*) После того, как эта работа была сдана в печать, автору стала известна статья C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis, C. r. Acad. scient. Paris 282 (1976), 959—961, в которой приводится эскиз еще одного доказательства основной теоремы настоящей работы.

4. Абсолютная негрубость. Для дифференциальных уравнений в комплексной области типичной представляется «абсолютная негрубость» — явление, противоположное структурной устойчивости.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый класс аналитических дифференциальных уравнений на компактном комплексном многообразии X. Уравнение $\alpha \in \mathcal{A}$ называется *абсолютно негрубым* в классе $\mathcal{A}$, если существуют такая окрестность $U_\alpha \subset \mathcal{A}$ уравнения α и такая окрестность $\mathcal{H}$ тождественного гомеоморфизма id: $X \to X$ в равномерной топологии, что если уравнения α, $\alpha' \in U_\alpha$ сопряжены гомеоморфизмом $H \in \mathcal{H}$, то они аналитически эквивалентны.

В работе [3] доказана абсолютная негрубость общего уравнения с рациональной правой частью степени не выше $N \geqslant 2$ на CP^2. Соображения предыдущего раздела здесь неприменимы, поскольку зигелевых гиперболических систем при $n = 2$ вообще нет; абсолютная негрубость доказывается существенно нелокальными соображениями. Однако в случае большого n гипотеза предыдущего раздела уже накладывает на топологически эквивалентные уравнения большое число ограничений, иногда большее, чем число параметров в классе $\mathcal{A}$.

Как известно [4], аналитическое дифференциальное уравнение на CP^n в аффинной окрестности $\mathbf{C}^n = \{z\}$ задается полиномиальным векторным полем:

$$\dot{z} = P(z), \qquad z \in \mathbf{C}^n. \tag{6}$$

Класс уравнений (6), удовлетворяющих условию $\deg P \leqslant N$, обозначается через $\mathcal{A}_N^n$ и может быть отождествлен с числовым комплексным «пространством коэффициентов правых частей» $\mathbf{C}_{n+N}^n$ размерности n. Область Пуанкаре в любом шаре пространства $\mathbf{C}^n$ занимает $1/2^{n-2}$ часть объема, поэтому можно надеяться *), что при $n \geqslant 3$ число особых точек уравнения (6) с зигелевой линейной частью по крайней мере больше половины числа всех особых точек, т. е. превосходит $N^n/2$. Теорема Ладиса — неравенство (3) — в каждой из этих точек накладывает $n - 2$ комплексных ограничения, уравнение $\alpha' \in \mathcal{A}_N^n$, топологически эквивалентное уравнение $\alpha \in \mathcal{A}_N^n$, должно удовлетворять $\mathcal{N} = (n-2)N^n/2$ условиям. Но $\mathcal{N} = (n-2)N^n/2 > n\mathbf{C}_{n+N}^n$ при $n \geqslant 4$, $\mathcal{N} \geqslant 5$.

Если гипотеза о числе зигелевых особых точек справедлива и $\mathcal{N}$ условий топологической эквивалентности окажутся независимыми, то это будет означать, что в классе $\mathcal{A}_N^n$ типичное уравнение абсолютно негрубо.

5. Замечание. Остальная часть статьи посвящена доказательству необходимости в теореме Н. Н. Ладиса (простое доказательство достаточности содержится в [5]). Первоначальное доказательство принадлежит Н. Н. Ладису. Второе доказательство, основанное на том, что топологическая эквивалентность уравнений влечет топологическую эквивалентность групп монодромии, а также приведенная выше формулировка теоремы 1 были получены автором. Когда я сообщил эту формулировку

---

*) Уравнение $\alpha \in \mathcal{A}_N^n$ имеет, вообще говоря, N^n особых точек; набор линейных частей уравнения α в особых точках задает точку $\Lambda(\alpha)$ в пространстве $\mathbf{C}^{nN^n}$. Но $\dim \mathcal{A}_N^n = n\mathbf{C}_{n+N}^n \leqslant nN^n$ при больших n и N. Поэтому точка $\lambda \in \mathbf{C}^{nN^n}$ должна удовлетворять большому числу условий для того, чтобы представлять собой набор $\Lambda(\alpha)$ линейных частей некоторого уравнения $\alpha \in \mathcal{A}_N^n$. Вопрос о числе зигелевых особых точек уравнения $\alpha \in \mathcal{A}_N^n$ — это частный случай проблемы об описании многообразия $\{\Lambda(\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}_N^n\}$.

В. И. Арнольду, он заметил, что числа $2\pi i/\lambda_j$—это периоды решений $e^{\lambda_j t}e_j$ системы (1)*) и что теорема Ладиса означает изоморфизм «групп периодов», порожденных числами $2\pi i/\lambda_j$ и $2\pi i/\mu_j$ соответственно. В. И. Арнольд предложил доказывать это утверждение непосредственно. Третье доказательство использует обе указанные идеи: оно оперирует и с группами монодромии, и с группой периодов.

§ 2. Преобразования монодромии

2.1. Определения. Из соотношения (3) следует, что теорему Ладиса достаточно доказать при $n = 3$. Уравнение (1) примет вид

$$\dot{z} = \Lambda z, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbf{C}^3. \tag{7}$$

Решение $\varphi_l = e^{\lambda_l t}e_l$, $l = 1, 2, 3$, назовем *l-й сепаратрисой*; плоскость $\Gamma_l = \{z_l = 1\}$ трансверсальна к сепаратрисе φ_l. Пусть $p \in \mathbf{C}^3$ — произвольная точка; обозначим через φ_p решение уравнения (7),

$$\varphi_p(t) = e^{\Lambda t}p. \tag{8}$$

Если $p \in \Gamma_l$, то $\varphi_p(2\pi i/\lambda_l) \in \Gamma_l$. Преобразование

$$\Delta_l : \Gamma_l \to \Gamma_l, \quad p \to \varphi_p\left(\frac{2\pi i}{\lambda_l}\right) \tag{9}$$

называется *преобразованием монодромии* $\Gamma_l \to \Gamma_l$.

Определим теперь преобразование монодромии Δ одной трансверсали на другую; это преобразование будет неоднозначным, и мы определим только одну ветвь преобразования Δ, выбор ветви для дальнейшего не важен. Обозначим пересечения трансверсали Γ_l с инвариантными плоскостями (z_l, z_3) и (z_1, z_2) уравнения (7) через $\tilde{\gamma}_l$ и γ_l соответственно, $l = 1, 2$. Пусть $p \in \gamma_1$ и $q \in \gamma_2 \cap \varphi_p$. Определен естественный голоморфизм **) Δ: $(\Gamma_1, p) \to (\Gamma_2, q)$ (комплексная функция последования); образ и прообраз при голоморфизме Δ принадлежит одному решению.

2.2. Явный вид преобразований монодромии. Пусть $\zeta_j^1 = z_j|_{\Gamma_1}$, $j = 2, 3$, и $\zeta_j^2 = z_j|_{\Gamma_2}$, $j = 1, 3$; $\nu_{jk} = \exp(2\pi i \lambda_j/\lambda_k)$. Тогда преобразования монодромии Δ_1 и Δ_2 имеют вид

$$\Delta_1 \colon \zeta^1 = \begin{pmatrix} \zeta_1^1 \\ \zeta_2^1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \nu_{21} & \\ & \nu_{31} \end{pmatrix} \zeta^1, \quad \Delta_2 \colon \zeta^2 = \begin{pmatrix} \zeta_1^2 \\ \zeta_2^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \nu_{12} & \\ & \nu_{32} \end{pmatrix} \zeta^2. \tag{10}$$

Замечание. Гиперболичность означает, что собственные числа ν_{jk} преобразований монодромии по модулю отличны от 1. Условие Зигеля означает, что эти преобразования суть комплексные гиперболические повороты плоскости $\mathbf{C}^2$, т. е. собственные числа каждого из преобразований лежат по разные стороны единичной окружности. Это обстоятельство решающим образом отличает случай Зигеля от случая Пуанкаре. Заметим также, что прямые γ_l и $\tilde{\gamma}_l$ инвариантны относительно преобразования Δ_l: $\Gamma_l \to \Gamma_l$; одна из них растягивается, другая сжимается.

Пусть теперь $p' = (1, \zeta_2^1, \zeta_3^1) \in \Gamma_1$. Тогда пересечение $\varphi_{p'} \cap \Gamma_2$ состоит из счетного числа точек вида $(\zeta_2^{1-\lambda_1/\lambda_2}, 1, \zeta_2^{1-\lambda_3/\lambda_2}\zeta_3^1)$ Отображение

*) Здесь $e_j = (0, \ldots, 0, 1_j, 0, \ldots, 0)$ — j-й орт в пространстве $\mathbf{C}^n$.

**) Через (X, x) обозначается окрестность точки x в пространстве X; через f: $(X, x) \to (Y, y)$ обозначается отображение, переводящее x в y. Разные окрестности точки x в пространстве X обозначаются через $(X, x)'$, $(X, x)_1$ и т. д.

$\Delta\colon (\Gamma_1, p) \to (\Gamma_2, q)$ имеет вид

$$(\zeta_2^1, \zeta_3^1) \mapsto (\zeta_2^{1-\lambda_1/\lambda_2}, \zeta_2^{1-\lambda_3/\lambda_2}\zeta_3^1); \tag{11}$$

при этом выбрана такая ветвь степенной функции, что $\Delta(p) = q$.

Пусть $\xi^l = \ln \zeta^l/2\pi i$ — карта на универсальной накрывающей $\widetilde{\Gamma}_l$ над $\Gamma_l \setminus (\gamma_l \cup \widetilde{\gamma}_l)$, $l = 1, 2$. Преобразование Δ продолжается до преобразования

$$\widetilde{\Delta}\colon \widetilde{\Gamma}_1 \to \widetilde{\Gamma}_2, \quad \xi^1 \mapsto \xi^2(\xi^1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} & 0 \\ -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2} & 1 \end{pmatrix} \xi^1. \tag{12}$$

2.3. Топологическая инвариантность преобразований монодромии. Решение $\psi(t)$ системы

$$\dot{w} = Mw, \quad w \in \mathbf{C}^3 \tag{13}$$

с начальным условием $\psi(0) = p$ обозначим через ψ_p. Для системы (13) при каждой нумерации переменных возникают орты e_l', сепаратрисы φ_l', трансверсали Γ_l', прямые γ_l' и $\widetilde{\gamma}_l'$, накрывающие $\widetilde{\Gamma}_l'$ и преобразования монодромии $\Delta_l'\colon \Gamma_l' \to \Gamma_l'$, а по выборе точек $p \in \gamma_1'$ и $q \in \gamma_2' \cap \psi_p$ — и преобразовани $\Delta'\colon (\Gamma_1', p) \to (\Gamma_2', q)$.

Лемма 1. *Пусть уравнения* (7) *и* (13) *топологически сопряжены гомеоморфизмом H, сохраняющим ориентацию на решениях. Тогда переменные w можно перенумеровать так, что сопрягающему гомеоморфизму H соответствуют гомеоморфизмы $h_l\colon (\Gamma_l, e_l) \to (\Gamma_l', e_l')$, сопрягающие соответствующие преобразования монодромии, а именно диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_l, e_l) & \xrightarrow{\Delta_l} & (\Gamma_l, e_l)_1 \\ {\scriptstyle h_l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_l} \\ (\Gamma_l', e_l') & \xrightarrow{\Delta_l'} & (\Gamma_l', e_l')_1 \end{array} \tag{14}$$

коммутативна; кроме того, при подходящем выборе точек p, q, $\widetilde{p}$ и $\widetilde{q}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_1, p) & \xrightarrow{\Delta} & (\Gamma_2, q) \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_2} \\ (\Gamma_1', \widetilde{p}) & \xrightarrow{\Delta'} & (\Gamma_2', \widetilde{q}) \end{array} \tag{15}$$

также коммутативна.

Доказательство. Сепаратрисы φ_l и φ_l' — единственные решения уравнений (7) и (13), которые при добавлении к ним особой точки 0 превращаются в открытые топологические диски, вложенные в $\mathbf{C}^3$ (это следует из гиперболичности). Поэтому гомеоморфизм H переводит сепаратрисы в сепаратрисы. Переменные w_j перенумерованы так, что $H(\varphi_l) = \varphi_l'$. Плоскость (z_k, z_l), и только она, состоит из решений, предельное множество которых есть $\varphi_k \cup \varphi_l \cup 0$. Поэтому

$$H(z_k, z_l) = (w_k, w_l). \tag{16}$$

Выберем теперь окрестность $(\mathbf{C}^3, e_l)$ так, что слоение ее на решения уравнения (7) топологически эквивалентно прямому произведению $(\Gamma_l, e_l) \times (\varphi_l, e_l)$, где $(\Gamma_l, e_l) = (\mathbf{C}^3, e_l) \cap \Gamma_l$ и $(\varphi_l, e_l) = (\mathbf{C}^3, e_l) \cap \varphi_l$ — односвязные области, причем $H(\varphi_l, e_l) \ni e_l'$. Пусть π_l: $(\mathbf{C}^3, e_l) \to (\Gamma_l, e_l)$ — проектирование вдоль решений уравнения (7), и пусть $H(\mathbf{C}^3, e_l) = (\mathbf{C}^3, e_l')$. Сужая, если нужно, окрестность (Γ_l, e_l), получаем, что определено однозначное проектирование π_l': $(\mathbf{C}^3, e_l') \to (\Gamma_l', e_l')$ вдоль решений уравнения (13); здесь $(\Gamma_l', e_l') = (\mathbf{C}^3, e_l') \cap \Gamma_l'$. Гомеоморфизм h_l определяется диаграммой

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^3, e_l) & \xrightarrow{H} & (\mathbf{C}^3, e_l') \\ {\scriptstyle \pi_l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_l'} \\ (\Gamma_l, e_l) & \xrightarrow{h_l} & (\Gamma_l', e_l'). \end{array}$$

В силу (16), $h_l(\gamma_l, e_l) = (\gamma_l', e_l')$ и $h_l(\tilde{\gamma}_l, e_l) = (\tilde{\gamma}_l', e_l')$. Точки p и q выбираем так, что $p' \overset{\text{def}}{=} H(p) \in (\mathbf{C}^3, e_1')$ и $q' \overset{\text{def}}{=} H(q) \in (\mathbf{C}^3, e_2')$. Пусть $\tilde{p} = \pi_1' p'$ и $\tilde{q} = \pi_2' q'$. Коммутативность диаграмм (14) и (15) немедленно следует из определения гомеоморфизмов h_l, Δ_l и Δ и того, что гомеоморфизм H сопрягает уравнения (7) и (13) «в целом».

Определения этого параграфа и утверждение леммы обобщаются с очевидными модификациями на случай произвольного n; нам понадобится это обобщение для $n = 2$.

§ 3. Второе доказательство теоремы Ладиса

Изучим сначала гомеоморфизм, сопрягающий два комплексных гиперболических поворота.

3.1. Гомеоморфизм, сопрягающий линейные отображения $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)$. Имеет место очевидное

Предложение 1. *Пусть* ν: $(\mathbf{C}^1, 0)_1 \to (\mathbf{C}^1, 0)_1'$ *и* ν': $(\mathbf{C}^1, 0)_2 \to (\mathbf{C}^1, 0)_2'$ — *два линейных отображения, сопряженные гомеоморфизмом* h, *сохраняющим естественную ориентацию* *), *причем* ν: $\zeta \mapsto \nu\zeta$, ν': $\omega \mapsto \nu'\omega$, $|\nu| \neq 1$. *Пусть* Ω_l — *универсальная накрывающая над* $(\mathbf{C}', 0)_l \setminus 0$, $l = 1, 2$; $\xi = \dfrac{\ln\zeta}{2\pi i}$ *и* $\eta = \dfrac{\ln\omega}{2\pi i}$ — *естественные карты на* Ω_1 *и* Ω_2 *соответственно. Пусть* $\tilde{h}: \Omega_1 \to \Omega_2$ — *естественное поднятие гомеоморфизма* h *(определенное с точностью до сдвига на целое число). Тогда существуют такие* λ *и* λ', $\nu = \exp 2\pi i\lambda$, $\nu' = \exp 2\pi i\lambda'$, *что*

$$\tilde{h}(\xi) = \eta(\xi) = A\xi + f(\xi), \tag{17}$$

где $f(\xi)$ — *ограниченная функция,* A: ${}^R\mathbf{C} \to {}^R\mathbf{C}$ — *линейный оператор, причем*

$$A1 = 1 \text{ и } A\lambda = \lambda'. \tag{18}$$

Замечание. Произвол в выборе гомеоморфизма $\tilde{h}$ сказывается только на виде функции f.

3.2. Лемма 2. *Пусть* h^0: $(\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ — *гомеоморфизм, тождественный на координатном кресте и коммутирующий с гиперболическим поворотом* N: $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$,

$$\zeta \to \begin{pmatrix} \nu_1 & \\ & \nu_2 \end{pmatrix}\zeta, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad h^0(\zeta) = (h_1^0, h_2^0).$$

*) В дальнейшем предполагается, что все гомеоморфизмы $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)'$, фигурирующие в разделах 3.1—3.4, сохраняют естественную ориентацию.

Тогда функция $h_l^0(\zeta)/\zeta_l$, $l=1, 2$, *непрерывна в* $(\mathbf{C}^2, 0)\setminus 0$ *и равна* 1 *на координатном кресте.*

Доказательство. Пусть $l=2$. Равенство $h_2^0(p)/\zeta_2(p)=1$ при $p=(0, \zeta_2)\neq 0$ следует из условия леммы. Пусть теперь $p=(\zeta_1, 0)\in(\mathbf{C}^2, 0)$ — произвольная точка на оси ζ_1, Q — фундаментальная область преобразования $\zeta_2\mapsto\nu_2\zeta_2$ на оси ζ_2. Выберем окрестность $(\mathbf{C}^2, Q)$ так, что при $r\in(\mathbf{C}^2, Q)$

$$\left|\frac{h_2^0(r)}{\zeta_2(r)}-1\right|<\varepsilon. \tag{19}$$

Выберем такую окрестность $(\mathbf{C}^2, p)$, что для каждой точки $q\in(\mathbf{C}^2, p)$ существует степень N^s преобразования N, переводящая точку q в окрестность $(\mathbf{C}^2, Q)$; это возможно, поскольку N — гиперболический поворот. Заметим теперь, что

$$\frac{h_2^0(\mathrm{N}^s q)}{\zeta_2(\mathrm{N}^s q)}=\frac{h_2^0(q)}{\zeta_2(q)},$$

поскольку h^0 и N коммутируют и N линейно. Из соотношения (19) следует теперь, что при $q\in(\mathbf{C}^2, p)$ имеем $\left|\frac{h_2^0(q)}{\zeta_2(q)}-1\right|<\varepsilon$, что и требовалось.

3.3. Определение. Пусть окрестности $(\mathbf{C}^2, 0)_1$ и $(\mathbf{C}^2, 0)_2$ являются прямыми произведениями топологических дисков $D_1'\times D_2$ и $D_1'\times D_2'$, расположенных на координатных осях. *Декартовым гомеоморфизмом, сопрягающим два комплексных гиперболических поворота* $\mathrm{N}=\begin{pmatrix}\nu_1 & \\ & \nu_2\end{pmatrix}$: $(\mathbf{C}^2, 0)_1\to(\mathbf{C}^2, 0)_1'$ и $\mathrm{N}'=\begin{pmatrix}\nu_1' & \\ & \nu_2'\end{pmatrix}$: $(\mathbf{C}^2, 0)_2\to(\mathbf{C}^2, 0)_2'$, называется декартово произведение гомеоморфизмов h_l: $D_l\to D_l'$, сопрягающих умножения на ν_l и ν_l'.

Из леммы 2 получаем

Следствие. *Пусть* h: $(\mathbf{C}^2, 0)_1\to(\mathbf{C}^2, 0)_2$ — *гомеоморфизм, сопрягающий два комплексных гиперболических поворота. Тогда* $h=h^d\circ h^0$, *где* h^d — *некоторый декартов гомеоморфизм, сопрягающий эти повороты, а* h^0 *обладает тем же свойством, что одноименный гомеоморфизм в лемме* 2.

3.4. Переход к накрывающим. Пусть h — произвольный гомеоморфизм, сопрягающий два комплексных гиперболических поворота N и N' таких же, как в п. 3.3; ζ и ω — карты на $(\mathbf{C}^2, 0)_1$ и $(\mathbf{C}^2, 0)_2$ соответственно; Ω_l — универсальная накрывающая над областью $(\mathbf{C}^2, 0)_l$ с выкинутым координатным крестом, $l=1,2$; $\xi=\ln\zeta/2\pi i$ и $\eta=\ln\omega/2\pi i$ — естественные карты на Ω_1 и Ω_2. Области Ω_1 и Ω_2 содержат «квадранты» $K_\xi=\{\operatorname{Im}\xi_l<c\}$ и $K_\eta=\{\operatorname{Im}\eta_l<c\}$ соответственно, где c — некоторая вещественная константа. Определено, с точностью до переноса на целочисленный вектор, поднятие $\tilde{h}$: $\Omega_1\to\Omega_2$ гомеоморфизма h на Ω_1. В предложении 1 положим $\nu=\nu_l$, $\nu'=\nu_l'$, $l=1, 2$, и пусть A_l — соответствующий оператор ${}^R\mathbf{C}\to{}^R\mathbf{C}$. Получаем еще одно следствие леммы 2.

Следствие. *Гомеоморфизм* $\tilde{h}$ *имеет вид*

$$\tilde{h}(\xi)=\eta(\xi)=\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}\xi+g(\xi), \tag{20}$$

причем $g(\xi)$ *ограничено в области* K_ξ.

Доказательство. Поднятие $\tilde{h}^d$ декартова гомеоморфизма h^d, сопрягающего повороты N и N', имеет вид (20) в силу предложения 1.

Поднятие $\widetilde{h}^0$: $\xi \mapsto \xi + g_1(\xi)$ гомеоморфизма h^0, описанного в лемме 2, отличается от тождественного преобразования добавком $g_1(\xi)$, который, в силу леммы 2, стремится к нулю в области K_ξ, когда $|\xi| \to \infty$. Следствие 3.4 вытекает теперь из следствия 3.3.

3.5. Случай преобразований монодромии. Пусть $n = 2$ и уравнения (1) и (2) имеют гиперболический тип и топологически сопряжены. Тогда преобразования монодромии Δ_1 и Δ_1' — это просто умножения $(\mathbf{C}^1, 0) \to (\mathbf{C}^1, 0)' : \zeta \mapsto \nu_{21}\zeta$, $\nu_{21} = \exp 2\pi i\lambda_2/\lambda_1$ и $\omega \mapsto \nu_{21}'\omega$, $\nu_{21}' = \exp 2\pi i \mu_2/\mu_1$ соответственно, $|\nu_{21}| \neq 1$. В силу леммы 1, эти преобразования топологически сопряжены гомеоморфизмом h, к которому применимо предложение 1*). В [4] доказано, что числа λ и λ', упомянутые в предложении, в этом случае имеют геометрическую природу: это характеристические числа λ_2/λ_1 и μ_2/μ_1 соответствующих особых точек**), невещественные в силу гиперболичности.

Обозначим теперь через A_k^j линейное преобразование ${}^R\mathbf{C} \to {}^R\mathbf{C} : 1 \mapsto 1$, $\lambda_j/\lambda_k \mapsto \mu_j/\mu_k$. Ограничение гомеоморфизма H на инвариантную плоскость (z_l, z_k) сопрягает ограничения уравнений (7) и (13) на инвариантные плоскости (z_l, z_k) и (w_l, w_k).

Из предыдущих замечаний и следствия 3.4 получаем окончательно

$$\widetilde{h}_1(\xi^1) = \eta^1(\xi^1) = \begin{pmatrix} A_1^2 & \\ & A_1^3 \end{pmatrix}\xi^1 + g_1(\xi^1), \quad \widetilde{h}_2(\xi^2) = \eta^2(\xi^2) = \begin{pmatrix} A_2^1 & \\ & A_2^3 \end{pmatrix}\xi^2 + g_2(\xi^2), \tag{21}$$

причем $g_l(\xi^l)$ ограничены в области K_ξ $(l = 1, 2)$.

3.6. Вычисление. Мы извлекли, наконец, необходимую информацию их диаграммы (14); нам осталось использовать диаграмму (15): в окрестности (Γ_1, p)

$$\Delta' \circ h_1 = h_2 \circ \Delta.$$

Нам будет удобно поднять гомеоморфизмы h_1, h_2, Δ и Δ' на универсальные накрывающие $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_2$, $\hat{\Gamma}_1'$ и $\hat{\Gamma}_2'$ над $(\Gamma_1, p) \setminus \gamma_1$, $(\Gamma_2, q) \setminus \gamma_2$, $(\Gamma_1', \tilde{p}) \setminus \gamma_1'$ и $(\Gamma_2', \tilde{q}) \setminus \gamma_2'$ и записать равенство $\widetilde{\Delta}' \circ \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_2 \circ \widetilde{\Delta}$ в карте ξ^1, используя формулы (12) и (21). Получаем

$$\begin{pmatrix} -\,{}^R\!\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) A_1^2 & 0 \\ -\,{}^R\!\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) A_1^2 & A_1^3 \end{pmatrix}\xi^1 = \begin{pmatrix} -A_2^1\,{}^R\!\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) & 0 \\ -A_2^3\,{}^R\!\left(\frac{\mu_3}{\mu_2}\right) & A_2^3 \end{pmatrix}\xi^1 + O(1). \tag{22}$$

Область $\hat{\Gamma}_1$ в карте ξ^1 содержит подобласть $K_\xi = K_\xi^1 \times K_\xi^2$, где K_ξ^1 —

---

*) Гомеоморфизм h можно считать сохраняющим естественную ориентацию по следующей причине.

В [4] доказано, что гомеоморфизм H, сопрягающий два аналитических дифференциальных уравнения, либо одновременно сохраняет естественную ориентацию на всех решениях, либо одновременно меняет (для краткости назовем гомеоморфизм H в первом случае четным, а во втором — нечетным). В доказательстве теоремы Ладиса случай, когда H нечетный, сводится к случаю, когда H четный: нужно только заменить уравнение (13) на $(\overline{13})$: $\dot{w} = \overline{M}w$, а гомеоморфизм H — на $\overline{H} = I \circ H$, где I — инволюция $w \mapsto \overline{w}$.

В [4] доказано также, что если $n = 2$ и гомеоморфизм H, сопрягающий уравнения (1) и (2), четный, то соответствующий гомеорофмизм h трансверсали на трансверсаль, определенный в лемме 1, примененной к случаю $n = 2$, также четный (т. е. сохраняет естественную ориентацию).

**) Родственное обстоятельство впервые замечено Н. Н. Ладисом.

область с компактным замыканием на оси ξ_1^1, а K_ξ^2 — область $\operatorname{Im} \xi_2^1 < c$, где c — некоторая вещественная константа. Приравнивая вторые компоненты в (22), имеем $A_1^3\xi_2^1 = A_2^3\xi_2^1 + O(1)$ в области K_ξ^1. Следовательно, $A_1^3 = A_2^3$. Это значит, что упорядоченные наборы $(\lambda_3/\lambda_1, \lambda_3/\lambda_2, 1)$ и $(\mu_3/\mu_1, \mu_3/\mu_2, 1)$ R-линейно эквивалентны (соответствующий оператор и есть A_1^3). Поскольку R-линейная эквивалентность упорядоченных наборов транзитивна, а наборы $(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1})$ и $(\lambda_3/\lambda_1, \lambda_3/\lambda_2, 1)$ даже $\mathbf{C}$-линейно эквивалентны, получаем, что упорядоченные наборы $(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1})$ и $(\mu_1^{-1}, \mu_2^{-1}, \mu_3^{-1})$ R-линейно эквивалентны, что и требовалось доказать.

§ 4. Третье доказательство

...существует седьмое доказательство, и уж самое надежное. И вам оно сейчас будет предъявлено.

М. А. Булгаков

В этом параграфе доказывается, что группы периодов топологически сопряженных уравнений (1) и (2) с образующими $2\pi i/\lambda_j$ и $2\pi i/\mu_j$ естественно изоморфны.

4.1. Основная конструкция. Рассмотрим по-прежнему уравнение (7); будем использовать построения § 2. Пусть

$$T = (T_1, T_2, T_3) \doteq (2\pi i/\lambda_1, 2\pi i/\lambda_2, 2\pi i/\lambda_3)$$

— набор периодов. Возьмем последовательность $k^m \in \mathbf{Z}^3$ такую, что

$$(k^m, T) = k_1^m T_1 + k_2^m T_2 + k_3^m T_3 \to 0 \tag{23}$$

и $k_1^m \to \infty$. В силу гиперболичности и условия Зигеля отсюда следует, что $k_j^m \to +\infty$, $j = 2, 3$.

Фиксируем произвольные точки $p \in \tilde{\gamma}_1 \setminus \gamma_1$, $q \in \gamma_1$ и $r = \Delta q \in \gamma_2$. Возьмем произвольную окрестность $U = (\Gamma_1, q)$ и ее образы $U_m = \Delta_1^{-k_1^m} U$. Без ограничения общности можно считать, что

$$|\nu_{21}| < 1 \tag{24}$$

(в противном случае мы заменили бы последовательность k^m на $-k^m$). В силу (24) и гиперболичности преобразования Δ_1 имеем $\underline{\lim}\operatorname{top} U_m = \tilde{\gamma}_1$. Поэтому существует такая последовательность точек $p_m \in \Gamma_1$, $p_m \to p$, что последовательность

$$q_m = \Delta_1^{k_1^m} p_m \tag{25}$$

стремится к q при $m \to \infty$. Положим

$$r_m = \Delta q_m. \tag{26}$$

Очевидно, $r_m \to r$ при $m \to \infty$.

Предложение 2. *Положим*

$$\Delta_2^{k_2^m} r_m = s_m. \tag{27}$$

Тогда существует предел $s = \lim\limits_{m\to\infty} s_m \in \tilde{\gamma}_2 \setminus \gamma_2$.

Доказательство. Достаточно доказать существование предела

$$\lim_{m\to\infty} z_3(s_m) \neq 0, \tag{28}$$

ибо соотношение $z_1(s_m) \to 0$ следует из (28) и гиперболичности Δ_2.

Пусть φ_a — решение уравнения (7) с начальным условием a, вообще говоря, неодносвязное; $\hat{\varphi}_a$ — универсальная накрывающая над φ_a с базисной точкой a. На накрывающей $\hat{\varphi}_a$ определена функция t_a — время — следующими равенствами:

$$dt_a = \left.\frac{dz_1}{\lambda_1 z_1}\right|_{\hat{\varphi}_a} = \ldots = \left.\frac{dz_n}{\lambda_n z_n}\right|_{\hat{\varphi}_a} t_a(a) = 0.$$

Положим для краткости $\hat{\varphi}_m = \hat{\varphi}_{p_m}$, $t_m = t_{p_m}$. Точки q_m, r_m и s_m естественно рассматривать как точки на накрывающей $\tilde{\varphi}_m$, поскольку равенство (25) определяет естественный путь, соединяющий на решении φ_{p_m} точки p_m и q_m (а именно k_1^m-кратную накрывающую над положительно ориентированной окружностью на сепаратрисе φ_1); равенства (26) и (27) аналогично определяют пути, соединяющие на φ_{p_m} точки q_m с r_m и r_m с s_m. Поэтому функция t_m корректно определена во всех перечисленных точках. Пусть $\tau_m = t_m(r_m) - t_m(q_m)$. В силу формулы (26), $\tau_m \to t_q(r) \overset{\text{def}}{=} \tau_0$. Заметим еще, что $t_a(\Delta_l a) = T_l$ при $a \in \Gamma_l$ (возвращение на трансверсаль Γ_l происходит за время T_l). Теперь мы можем доказать (28):

$$z_3(s_m) = \exp \lambda_3 t_m(s_m) = z_3(p_m) \exp \lambda_3 (k_1^m T_1 + \tau_m + k_2^m T_2) =$$
$$= z_3(p_m) \exp \lambda_3 (-k_3^m T_3 + \tau_0 + o(1)).$$

Последнее равенство использует соотношение (23). Итак,

$$\lim z_3(s_m) = z_3(p) \exp \lambda_3 \tau_0; \tag{29}$$

предложение 2 доказано.

4.2. Образ основной конструкции. Пусть, как и раньше, уравнения (7) и (13) сопряжены гомеоморфизмом H; для любой точки $a \in \mathbb{C}^3$ положим $H(a) = a'$.

Замечание. Точки p', q', r', s' лежат в инвариантных плоскостях уравнения (13), соответствующих инвариантным плоскостям уравнения (7), содержащих точки p, q, r, s.

Определены универсальные накрывающие $\hat{\psi}_{a'}$, $\hat{\psi}_m = \hat{\psi}_{p'_m}$ и временные функции $t'_{a'}$, t'_m — так же, как для уравнения (7),

$$t'_m(p'_m) = 0, \quad dt'_m = \left.\frac{dw_1}{\mu_1 w_1}\right|_{\hat{\psi}_m}.$$

Пусть теперь точки p и q близки к e_1; тогда точка r, а в силу соотношения (29) и точка s близки к e_2. Следовательно, точки p и q можно выбрать так, что все точки p_m, q_m при достаточно больших m принадлежат окрестности (Γ_1, e_1), упомянутой в лемме 1, а точки r_m и s_m — окрестности (Γ_2, e_2). Тогда точки p'_m, q'_m и r'_m, s'_m принадлежат окрестностям $(\mathbb{C}^3, e_1)'$ и $(\mathbb{C}^3, e_2)'$. Пусть, наконец, π'_l: $(\mathbb{C}^3, e'_l) \to (\Gamma'_l, e'_l)$ — проектирования вдоль решений, те же, что и в лемме 1, и пусть $\tilde{p} = \pi'_1 p'$, $\tilde{p}_m = \pi'_1 p'_m$, $\tilde{q} = \pi'_1 q'$, $\tilde{q}_m = \pi'_1 q'_m$, $\tilde{r} = \pi'_2 r'$, $\tilde{r}_m = \pi'_2 r_m$, $\tilde{s} = \pi'_2 s'$, $\tilde{s}_m = \pi'_2 s_m'$.

В силу леммы 1,

$$\tilde{q}_m = \Delta_1'^{k_1^m} \tilde{p}_m, \quad \tilde{r}_m = \Delta' \tilde{q}_m, \quad \tilde{s}_m = \Delta_2'^{k_2^m} \tilde{r}_m, \tag{30}$$

т. е. точки $\tilde{q}_m, \tilde{r}_m, \tilde{s}_m$ получаются из точек $\tilde{p}_m$ с помощью основной конструкции. Наконец, в силу непрерывности отображений H и π_l'

$$\tilde{p} = \lim \tilde{p}_m, \quad \tilde{q} = \lim \tilde{q}_m, \quad \tilde{r} = \lim \tilde{r}_m, \quad \tilde{s} = \lim \tilde{s}_m.$$

Обозначим через T_j' период $2\pi i/\mu_j$. Из соотношения (30) следует, что $t_m'(s_m) = k_1^m T_1' + k_2^m T_2' + O(1)$. С другой стороны, поскольку $w_3(\tilde{s}_m) \to \to w_3(\tilde{s}) \neq 0$, получаем, что последовательность $w_3(\tilde{s}_m) = w_3(\tilde{p}_m) \times \times \exp(\lambda_3 t_m'(\tilde{s}_m) + O(1))$ имеет ненулевой предел; следовательно, $t_m'(\tilde{s}_m) = = l_m T_3' + O(1)$, где l_m — некоторое целое число. Итак,

$$k_1^m T_1' + k_2^m T_2' = l_m T_3' + O(1). \tag{31}$$

4.3. Геометрическая интерпретация. Пусть $A: {}^R\mathbf{C} \to {}^R\mathbf{C}$—такое линейное преобразование, что $AT_1' = T_1$, $AT_2' = T_2$; положим $AT_3' = T_3''$. Докажем, что $T_3'' = T_3$. Равенство (31) эквивалентно равенству

$$k_1^m T_1 + k_2^m T_2 = l_m T_3'' + O(1). \tag{32}$$

Равенство (23) означает, что некоторая полоса между прямыми, параллельными вектору T_3, содержит все векторы $k_1^m T_1 + k_2^m T_2$; равенство (32) означает, что тем же свойством обладает полоса, параллельная вектору T_3''. Если векторы T_3 и T_3'' неколлинеарны над R, то упомянутые полосы пересекаются по ограниченному множеству (параллелограмму), что противоречит стремлению $k_l^m \to \infty$. Итак, $T_3'' = \alpha T_3$, $\alpha \in R$. Поскольку обе тройки T_1, T_2, T_3 и T_1', T_2', T_3' зигелевы, получаем $\alpha > 0$.

Нам осталось доказать, что $\alpha = 1$. Это следует из того, что периоды T_1, T_2, T_3 равноправны. Действительно, мы доказали также, что существует линейное преобразование $\tilde{A}: {}^R\mathbf{C} \to {}^R\mathbf{C}$, $T_2' \mapsto T_2$, $T_3' \to T_3$, $T_1' \to \to \alpha_1 T_1$, где $\alpha_1 > 0$. Но $\tilde{A} = A^0 \circ A$, где A^0: ${}^R\mathbf{C} \to {}^R\mathbf{C}$, $T_2 \mapsto T_2$, $T_1 \mapsto \mapsto \alpha_1 T_1$, $T_3 \to \alpha^{-1} T_3$; вектор T_1, неколлинеарный T_2 и T_3, собственный для A^0. Это возможно только тогда, когда $A^0 = \mathrm{id}$, и, следовательно, $\alpha = 1$, что и требовалось доказать.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 1 октября 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Guckenheimer J., Hartman's theorem for complex flows in the Poincare domain, Compositio Math. **24**, № 1, (19672), 75—82.
2. Зигель К. Л., О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия, Математика 5: 2 (1961), 119—128.
3. Ильяшенко Ю. С., Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной проективной плоскости, Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 6 (1978).
4. Ильяшенко Ю. С., Слоения на аналитические кривые, Матем. сб. 88 (1972), 558—577.
5. Ладис Н. Н., Топологическая эквивалентность гиперболических линейных систем, Дифф. уравнения **13**, № 2, (1977), 255—265.
6. Ладис Н. Н., Топологические инварианты комплексных линейных потоков, Дифф. уравнения **12**, № 12 (1976), 2159—2169.
7. Пяртли А. С., Рождение комплексных инвариантных многообразий вблизи особой точки векторного поля, зависящего от параметра, Функц. анализ **6**, вып. 4 (1972), 95—96.

Д-во предложения 1. По условию, $h(v\mathfrak{z}) = v'h(\mathfrak{z})$. При переходе к накрыв. получаем $\tilde{h}(\xi+\lambda) = \tilde{h}(\xi) + \lambda'$, $\tilde{h}(\xi+1) = \tilde{h}(\xi) + 1$. Положим $f = \tilde{h} - A$. Тогда, как легко видеть, $f(\xi+\lambda) = f(\xi)$, $f(\xi+1) = f(\xi)$. Периоды $\lambda, 1$ независимы, поэтому f - непрерывная двоякопериодич. функция $\Rightarrow$ ограниченность!

3.3. Д-во следствия. Пусть $h \circ N = N' \circ h$, $h^d \circ N' = N \circ h^d$. Тогда суперпозиция $h \circ h^d$ сопрягает N с N', причем она тождественна на координатном кресте, что и необходимо для использования леммы 2.