МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

НОВАЯ СЕРИЯ

ТОМ СЕМЬДЕСЯТ ВОСЬМОЙ

ВЫПУСК ТРЕТИЙ

Т. 78 (120) : 3

МОСКВА 1969

УДК 517.9

Возникновение предельных циклов при возмущении уравнения $\frac{dw}{dz} = -\frac{R_z}{R_w}$, где $R(z, w)$ — многочлен

Ю. С. Ильяшенко (Москва)

1. Введение

В настоящей работе изучается возмущение

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{R_z + tA}{R_w + tB} \tag{1}$$

уравнения

$$\frac{dw}{dz} = + \frac{R_z}{R_w}, \tag{2}$$

где $R(z, w)$ — многочлен степени $n+1$, $A(z, w)$ и $B(z, w)$ — многочлены степени n с комплексными коэффициентами, t — комплексный параметр; уравнение рассматривается в плоскости C^2.

Решениями уравнения (2) являются кривые $\varphi_c = \{R(z, w) = c\}$. Точка (z, w) является особой точкой уравнения (2), если она удовлетворяет условию $R_z(z, w) = R_w(z, w) = 0$. Решения φ_c, не проходящие через особые точки, являются одномерными комплексными многообразиями. Уравнение (2) имеет не более n^2 особых точек.

Через B_{n+1} обозначим пространство коэффициентов всех многочленов степени $n+1$, через B''_{n+1} — пространство всех многочленов $R \in B_{n+1}$, для которых уравнение (2) имеет n^2 различных особых точек P_i, через B'_{n+1} — пространство тех многочленов $R \in B''_{n+1}$, для которых точки P_i лежат на разных решениях (другими словами, значения $R(P_i)$ различны). Через Ω_n обозначим пространство форм $A\,dz + B\,dw$, где $A, B \in B_n$.

Основным средством для изучения возмущения (1) послужит

Теорема 1. *Пусть R — произвольный многочлен из B'_{n+1} и ω — произвольная форма из Ω_n. Пусть $\int_\gamma \omega = 0$ для каждого $c \in C^1$ и каждой замкнутой кривой $\gamma \subset \varphi_c$. Тогда форма ω точна.*

Особую точку уравнения (1) назовем центром, если слоение ее окрестности на решения топологически эквивалентно слоению окрестности точки $(0, 0)$ на кривые $zw = \text{const}$ (или, что то же, $z^2 + w^2 = \text{const}$). Легко доказать, что для каждого $R \in B''_{n+1}$ все особые точки P_i уравнения (2) являются центрами (см. [2]).

Следствие 1 (Теорема о разрушении центра). *Пусть R — произвольный многочлен из B'_{n+1}, P — особая точка уравнения (2) и $A(P) =$*

$= B(P) = 0$. *Тогда либо форма* $A\,dz + B\,dw \in \Omega_n$ *точна, либо точка* P *не является центром для уравнения* (1) *ни при каком достаточно малом* t, *кроме* $t = 0$.

Следствие 2. *Пусть* R — *многочлен из* B'_{n+1} *с действительными коэффициентами, для которого уравнение* (2) *имеет* K *центров* P_i *на действительной плоскости* E^2. *Тогда для любого набора из* $N = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ *замкнутых линий уровня* φ_i *многочлена* R, *каждая из которых обходит только одну из точек* P_i, *можно подобрать такое возмущение* (1) *уравнения* (2), *что каждый цикл* φ_i *порождает предельный цикл**.

В смысле числа предельных циклов для уравнения вида

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P}{Q}, \quad P, Q \in B_n \tag{3}$$

этот результат не представляет ничего нового: в работе Н. Ф. Отрокова [3] доказывается, что уравнение такого вида может иметь $M = \frac{n^2 + 5n - 14}{2}$ предельных циклов. Однако в работе Н. Ф. Отрокова все эти M циклов лежат в окрестности одной особой точки; следствие 2 позволяет расположить их значительно более свободным образом.

Нам понадобятся некоторые понятия, связанные с уравнениями вида (3), введенные в работе [1], и некоторые результаты относительно слоения плоскости C^2 на кривые φ_c (работа [2]). К изложению этих понятий и связанных с ними лемм мы и переходим.

2. Комплексная функция последования. Тождественные и предельные циклы

Пространство коэффициентов всех пар многочленов P, Q степени n и, тем самым, всех уравнений вида (3) обозначим через A_n; каждому уравнению вида (3) соответствует точка $\alpha \in A_n$.

Решение φ уравнения α вида (3) с начальным условием (ξ, η) можно рассматривать как, вообще говоря, неоднозначную по z функцию $w(z, \xi, \eta, \alpha)$.

Пусть γ_z — направленная кривая на плоскости z с началом в точке ξ. Через $\Delta_{\gamma_z}(\eta, \alpha)$ обозначается результат продолжения функции $w(z, \xi, \eta, \alpha)$ над кривой γ_z с началом в точке (ξ, η), в случае, если он определен однозначно. Функцию $\Delta_{\gamma_z}(\eta, \alpha)$ будем называть функцией последования**. По теореме об аналитической зависимости решения от параметра, функция $\Delta_{\gamma_z}(\eta, \alpha)$ аналитична по η и α в некоторой окрестности $U^{\eta}_{\eta_0} \times U^{\alpha}_{\alpha_0}$ точки (η_0, α_0), в которой она определена***.

---

* Определение понятия «цикл φ_i порождает предельный цикл» см. на стр. 364.

** В работе [1] функцией последования называется функция $\Delta\gamma_z(\eta, \alpha) - \eta$.

*** В обозначении окрестности индекс внизу указывает, окрестность какой точки берется, а индекс вверху — какой параметр меняется.

Циклом l на решении $\varphi = w(z, \xi, \eta, \alpha_0)$ называется замкнутая, вещественно одномерная кривая, негомотопная нулю на φ *. Пусть $(\xi_0, \eta_0) \in l$ не является точкой ветвления решения φ, как накрывающей над плоскостью z; такую точку всегда можно найти, так как точки ветвления лежат на кривой $Q(z, w) = 0$ и расположены на решении дискретно. Обозначим через l_z проекцию цикла l на плоскость z, выберем на l_z произвольное направление и будем считать точку ξ_0 началом петли l_z. Пусть цикл l не проходит через точки ветвления решения φ. Тогда можно определить функцию последования $\Delta_l(\eta, \alpha) = \Delta_{l_z}(\eta, \alpha)$, аналитическую в $U^{\eta}_{\eta_0} \times U^{\alpha}_{\alpha_0}$. В случае, когда l проходит через точки ветвления решения φ, выберем цикл $l' \ni (\xi_0, \eta_0)$, гомотопный l на φ **, не проходящий через точки ветвления φ, и положим по определению $\Delta_l(\eta, \alpha) = \Delta_{l'}(\eta, \alpha)$. Корректность этого определения следует из леммы.

Лемма. *Если циклы l и l' с началом (ξ_0, η_0) гомотопны на φ и функции последования $\Delta_l(\eta, \alpha)$ и $\Delta_{l'}(\eta, \alpha)$ определены, то $\Delta_l(\eta, \alpha) = \Delta_{l'}(\eta, \alpha)$.*

Это утверждение доказывается тем же методом, что и лемма 3 работы [1].

Тем самым функция последования определена для любого цикла l; она зависит, вообще говоря, от выбора начальной точки $(\xi_0, \eta_0) \in l$.

Условие $\Delta_l(\eta, \alpha_0) = \eta$ эквивалентно тому, что накрывающая над l_z на решении уравнения α_0 с началом (ξ_0, η) замкнута; в частности, поскольку l — цикл, $\Delta_l(\eta_0, \alpha_0) = \eta_0$. Циклы подразделяются на предельные и тождественные в зависимости от характера множества нулей функции $\Delta_l(\eta, \alpha_0) - \eta$ в окрестности точки (η_0, α_0). Точнее,

1) цикл l называется предельным, если η_0 — изолированный по η нуль функции $\Delta_l(\eta, \alpha_0) - \eta$;

2) цикл l называется тождественным по η (соответственно по η и α), если $\Delta_l(\eta, \alpha_0) \equiv \eta$ в $U^{\eta}_{\eta_0}$ (соответственно $\Delta_l(\eta, \alpha) \equiv \eta$ в $U^{\eta}_{\eta_0} \times U^{\alpha}_{\alpha_0}$).

В силу аналитичности по η функции $\Delta(\eta, \alpha_0) - \eta$ всякий цикл является либо предельным, либо тождественным по η.

Замечания. 1. Свойство цикла l быть предельным или тождественным не зависит от того, какая точка $(\xi_0, \eta_0) \in l$ выбрана при определении функции последования.

2. Можно сделать более сильное утверждение: все циклы, свободно гомотопные данному, являются одновременно предельными или тождественными.

3. Первая вариация и достаточное условие возникновения предельного цикла при возмущении (1) уравнения (2)

Фиксируем $R \in B_{n+1}$ и $(A, B) \in B_n$ и обозначим через $\alpha(t)$ уравнение (1). Решение $w(z, \xi_0, \eta_0, \alpha(t))$ аналитически зависит от t; «i-ю вариацию» по t определим равенством

$$w_i(z, \xi_0, \eta_0) = \left. \frac{\partial^i w(z, \xi_0, \eta_0, \alpha(t))}{\partial t^i} \right|_{t=0}.$$

---

* В определении цикла на решении (см. [1], стр. 210) последнее требование отсутствует.

** В дальнейшем мы будем говорить о циклах l, гомологичных или гомотопных данному циклу l_0, всегда считая, что l_0 и l лежат на одном решении и гомологичны (гомотопны) на этом решении.

«i-я вариация» является неоднозначной аналитической функцией от z. Одно из ее значений при $z=\xi_0$ равно 0; будем считать его начальным. Вычислим первую вариацию $w_1(z, \xi_0, \eta_0)$, точнее, результат продолжения $\Delta_{\gamma_{\xi_0,z}}(w_1, \eta)$ функции w_1 над кривой $\gamma_{\xi_0,z}$*, лежащей на плоскости z.

Введем обозначение:

$$-\frac{R_z(z, w)+tA(z, w)}{R_w(z, w)+tB(z, w)}=f(z, w, t).$$

Пусть $w(z, \eta_0)$ — решение уравнения $\alpha(0)$ с начальным условием (ξ_0, η_0), не являющимся точкой ветвления функции $w(z, \eta_0)$ по z. Решая уравнение в вариациях в окрестности $U^z_{\xi_0}$, в которой функция $w(z, \eta_0)$ допускает однозначное продолжение, получаем

$$w_1(z_0, \xi_0, \eta_0)=\exp\left\{\int\limits_{[\xi_0,z_0]} f'_w\,dz\right\}\int\limits_{[\xi_0,z_0]} f'_t\cdot\exp\left\{-\int\limits_{[\xi_0,z]} f'_w\,d\xi\right\}dz;$$

все подынтегральные функции берутся в точках $(z\in U^z_{\xi_0}, w=w(z, \eta_0), t=0)$, причем значение $w(z, \eta_0)$ получено продолжением из точки (ξ_0, η_0) над отрезком $[\xi_0, z]$.

В работе [1] замечается, что

$$\exp\left\{\int\limits_{[\xi_0,z]} f'_w\,d\xi\right\}=\frac{R_w(\xi_0, \eta_0)}{R_w(z, w(z, \eta_0))};$$

в этом можно убедиться непосредственной проверкой**. Следовательно,

$$w_1(z_0, \xi_0, \eta_0)=\frac{R_w(\xi_0, \eta_0)}{R_w(z_0, w(z_0, \eta_0))}\int\limits_{[\xi_0,z_0]}\frac{R_zB-R_wA}{R_w^2}\cdot\frac{R_w}{R_w(\xi_0, \eta_0)}\,dz=$$

$$=\frac{1}{R_w(z_0, w(z_0, \eta_0))}\int\limits_{[\xi_0,z_0]}\left(\frac{R_z}{R_w}B-A\right)dz=-\frac{1}{R_w(z_0, w(z_0, \eta_0))}\int\limits_{\widehat{[\xi_0,z_0]}} A\,dz+B\,dw,$$

где $\widehat{[\xi_0, z_0]}$ — накрывающая на $w(z, \eta_0)$ над отрезком $[\xi_0, z_0]$ с началом (ξ_0, η_0), $z\in U^z_{\xi_0}$. Аналитически продолжая правую и левую части предыдущего равенства, получим:

$$\Delta_{\gamma_{\xi_0,z_0}}(w_1, \eta_0)=-\frac{1}{R_w(z_0, \Delta_{\gamma_{\xi_0,z_0}}(w(z_0, \eta)))}\int\limits_{\widehat{\gamma_{\xi_0,z_0}}} A\,dz+B\,dw,$$

где $\widehat{\gamma_{\xi_0,z_0}}$ — накрывающая над кривой γ_{ξ_0,z_0} на решении $w(z, \eta_0)$ с началом (ξ_0, η_0), а $\Delta_{\gamma_{\xi_0,z_0}}(w(z, \eta_0))$ — результат продолжения $w(z, \eta_0)$ с начальным значением η_0 над кривой γ_{ξ_0,z_0}.

---

* Две точки при обозначении кривой указывают: первая — начало, вторая — конец кривой.

** Эта формула в работе [1] (стр. 221) записана в других обозначениях.

Нас будет интересовать случай, когда $\gamma_{\xi_0, z_0} = l_z$ — проекция направленного цикла $l(\eta_0)$ с началом (ξ_0, η_0), лежащего на решении $w(z, \xi_0, \eta_0)$ и не проходящего через точки ветвления $w(z, \xi_0, \eta_0)$ по z. Тогда

$$\Delta_{l_z}(w_1, \eta_0) = -\frac{1}{R_w(\xi_0, \eta_0)} \int\limits_{l(\eta_0)} A\, dz + B\, dw.$$

Заметим, что для всех η из некоторой окрестности $U^{\eta}_{\eta_0}$ накрывающая $l(\eta)$ над l_z с началом (ξ_0, η) на $w(z, \eta)$ есть цикл; поэтому при $\eta \in U^{\eta}_{\eta_0}$

$$\Delta_{l_z}(w_1, \eta) = -\frac{1}{R_w(\xi_0, \eta)} \int\limits_{l(\eta)} A\, dz + B\, dw. \tag{4}$$

Мы можем теперь сформулировать достаточное условие возникновения предельного цикла.

Лемма 1. *Пусть* $\int\limits_{l(\eta_0)} A\, dz + B\, dw = 0$ и $\int\limits_{l(\eta)} A\, dz + B\, dw \not\equiv 0$ *в* $U^{\eta}_{\eta_0}$. *Тогда существует аналитическая, может быть, неоднозначная* функция* $\eta(t)$, *определенная в некоторой окрестности* U^t_0, *все значения которой в нуле равны* η_0, *и такая, что для каждого* $t \in U^t_0$ *накрывающая над* l_z *на решении* $w(z, \xi_0, \eta(t), \alpha(t))$ *есть предельный цикл.*

Мы будем говорить, что цикл $l(\eta_0)$ порождает предельный цикл.

Доказательство. Функция последования $\Delta_{l_z}(\eta, \alpha(t)) = \Delta_{l_z}(\eta, t)$ аналитична в некоторой окрестности $U^{\eta}_{\eta_0} \times U^t_0$. Условие $\Delta_{l_z}(\eta, t) = \eta$ равносильно тому, что накрывающая над l_z на решении уравнения $\alpha(t)$ с начальным условием (ξ_0, η) есть цикл; он является предельным в случае, когда нули функции $\Delta_{l_z}(\eta, t) - \eta$ при фиксированном t изолированы по η. Поскольку $\Delta_{l_z}(\eta, 0) \equiv \eta$, разность $\Delta_{l_z}(\eta, t) - \eta$ допускает в $U^{\eta}_{\eta_0} \times U^t_0$ следующее разложение по степеням t:

$$\Delta_{l_z}(\eta, t) - \eta = \sum t^i \Delta_{l_z}(w_i, \eta) = t\,[\Delta_{l_z}(w_1, \eta) + t\Delta_{l_z}(w_2, \eta) + \ldots];$$

многоточием обозначены члены высших степеней по t. Поскольку $\Delta_{l_z}(w_1, \eta_0) = 0$ и $\Delta_{l_z}(w_1, \eta) \not\equiv 0$, к функции

$$\Delta_{l_z}(w_1, \eta) + t\Delta_{l_z}(w_2, \eta) + \ldots$$

можно применить подготовительную теорему Вейерштрасса, что и доказывает лемму.

Замечание. Поскольку по условию $R_w(\xi_0, \eta_0) \neq 0$, в окрестности $U^{\eta}_{\eta_0}$ можно в качестве координаты ввести $c = R(\xi_0, \eta)$; тогда функция $\int\limits_{l(\eta(c))} A\, dz + B\, dw$ сделается аналитической по c в окрестности точки $c = R(\xi_0, \eta_0)$

* Для однозначности функции $\eta(t)$ достаточно условия $\left(\int\limits_{l(\eta)} A\, dz + B\, dw\right)'_{\eta}\Bigg|_{\eta=\eta_0} = 0.$

и, как будет показано ниже, допускает естественное аналитическое продолжение.

Приведем теперь некоторые понятия и результаты о слоении плоскости C^2 на линии уровня многочлена $R \in B''_{n+1}$.

4. Исчезающие циклы и правильные системы исчезающих циклов

Линия уровня многочлена R задается либо значением c многочлена, либо точкой $P \in C^2$, через которую она проходит, и обозначается соответственно через $\varphi(c, R)$, $\varphi(P, R)$ или φ_c, φ_P, когда многочлен R фиксирован.

По определению, многочлен $R \in B''_{n+1}$ имеет n^2 особых точек P_i, каждая из которых является центром. Это значит, что в окрестности P_i топологической (и даже аналитической) заменой можно ввести координаты (ξ, η), в которых слоение $R = c$ запишется в виде $\xi\eta = c'$. На слоях φ_c, близких к φ_{P_i}, возникают циклы $\delta_i(c)$, которые в системе ξ, η задаются уравнениями $\xi = \rho e^{i\varphi}$, $\eta = \frac{c'}{\rho e^{i\varphi}}$. Циклы $\delta_i(c)$ называются локальными исчезающими в точке P_i. Мы определим теперь исчезающие циклы для произвольного слоя φ_c.

Положим $R(P_i) = b_i(R) = b_i$. Многочлен $R \in B''_{n+1}$ задает на многообразии $C^2 \setminus \bigcup\limits_1^{n^2} \varphi_{P_i}$ структуру косого произведения с базой $B = C^1 \setminus \bigcup\limits_1^{n^2} b_i$ и слоем φ_{c_0}, $c_0 \in B$. Тогда каждый класс гомотопных кривых $\{\lambda_{c_1, c_2}\} \subset B$ однозначно задает класс гомотопных отображений $\{\Delta_{\lambda_{c_1, c_2}} : \varphi_{c_1} \to \varphi_{c_2}\}$ слоя φ_{c_1} на слой φ_{c_2}.

Замечание 1. Если $l(c_1)$ — цикл на φ_{c_1}, то цикл $l(c_2) = \Delta_{\lambda_{c_1, c_2}}(l(c_1))$ определен с точностью до свободной гомотопии.

Фиксируем точки $d_i \in B$, близкие к точкам b_i, и пусть $\delta_i(d_i)$ — локальные исчезающие циклы, определенные выше. Фиксируем произвольную точку $c_0 \in B$ и кривые $\lambda_{d_i, c_0} \subset B$. Положим $\delta_i(c_0) = \Delta_{\lambda_{d_i, c_0}}(\delta_i(d_i))$.

Обозначим через $\hat{B}$ универсальную накрывающую над B с отображением проектирования $\pi : \hat{B} \to B$, точки которой изображаются классами гомотопных кривых $\{\lambda_{c_0, c}\} \subset B$. Для каждой точки $\hat{c} \in \hat{B}$, изображаемой кривой $\lambda_{c_0, c}$, определен цикл $\delta_i(\hat{c}) = \Delta_{\lambda_{c_0, c}}(\delta_i(c_0))$.

Замечание 2. Обозначим индекс пересечения циклов $l_1, l_2 \subset \varphi_c$ через (l_1, l_2). Легко видеть, что $(\delta_i(c_0), \delta_j(c_0)) = (\delta_i(\hat{c}), \delta_j(\hat{c}))$.

Система исчезающих циклов $\delta_i(\hat{c})$ называется правильной, если любые два цикла δ_i и δ_j можно соединить цепочкой $\delta_{i_0} = \delta_i$, $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_k} = \delta_j$ так, что $(\delta_{i_{l-1}}, \delta_{i_l}) = \pm 1$ для всех $l = 1, \ldots, k$.

Из замечания 2 следует, что если система $\delta_i(c_0)$ правильная, то для любого $\hat{c} \in \hat{B}$ система $\delta_i(\hat{c})$ тоже правильная.

Лемма 2. *Для каждого многочлена $R \in B'_{n+1}$ кривые λ_{c_0, d_i} можно выбрать так, что система циклов $\delta_i(c_0)$ будет правильной.*

Доказательство. Легко видеть, что множество $B_{n+1} \setminus B'_{n+1}$ является конечным объединением комплексных подпространств коразмерности не меньше 1 и потому не разделяет пространства B_{n+1}. Отсюда следует, что любые две точки $R_0 \in B''_{n+1}$ и $R_1 \in B'_{n+1}$ можно соединить непрерывной кривой, все точки которой, кроме конца, лежат в B'_{n+1}. Ниже мы приведем пример многочлена $R_0 \in B''_{n+1}$, на неособом слое $\varphi_{c'_0}$ которого система исчезающих циклов $\delta_i(c'_0, R_0)$ является правильной. Покажем, что этого достаточно для доказательства леммы 2. Переход от правильной системы $\delta_i(c'_0, R_0)$ к системе $\delta_i(c_0, R)$ сделаем аналогично переходу от системы $\delta_i(c_0)$ к системе $\delta_i(\hat{c})$.

Введем обозначения:

$$\mathfrak{C} = \{(z, w, R) \mid R \in B''_{n+1},\ R(z, w) \neq b_i(R)\}, \qquad \mathfrak{B} = \{(c, R) \mid R \in B''_{n+1},\ c \neq b_i(R)\}.$$

Отображение $\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} : (z, w, R) \mapsto (R(z, w), R)$ задает расслоение $\mathfrak{C}$ с базой $\mathfrak{B}$ и слоем $\varphi(c'_0, R_0)$. Каждый класс гомотопных кривых $\{\gamma_{(c_1,R_1),(c_2,R_2)}\} \subset \mathfrak{B}$ однозначно задает класс гомотопных отображений $\{\Delta_{\gamma_{(c_1,R_1),(c_2,R_2)}} : \varphi(c_1, R_1) \to \varphi(c_2, R_2)\}$ слоя $\varphi(c_1, R_1)$ на слой $\varphi(c_2, R_2)$.

Замечания. 1. Если $l_{1,2}(c_1, R_1)$ — циклы на $\varphi(c_1, R_1)$, а $l_{1,2}(c_2, R_2)$ — их образы при отображении $\Delta_{\gamma_{c_1,R_1),(c_2,R_2)}}$, то $(l_1(c_1, R_1), l_2(c_1, R_1)) = (l_1(c_2, R_2), l_2(c_2, R_2))$.

2. Если кривые $\gamma_1 = \gamma_{(c_1,R_1),(c_2,R_2)}$ и $\gamma_2 = \gamma'_{(c_1,R_1),(c_2,R_2)}$ гомотопны в $\mathfrak{B}$ и цикл $l \subset \varphi(c_1, R_1)$, то $\Delta_{\gamma_1}(l) = \Delta_{\gamma_2}(l)$. (Здесь и далее в доказательстве леммы равенство циклов означает, что они свободно гомотопны.)

Фиксируем произвольный многочлен $R_1 \in B'_{n+1}$ и $c_0 \neq b_1(R_1)$. Соединим точки (c'_0, R_0) и (c_0, R_1) непрерывной кривой $\gamma = \gamma_{(c'_0,R_0),(c_0,R_1)} = \{(c_0(s), R(s)) \mid s \in [0, 1]\} \subset \mathfrak{B}$, причем так, что $R(s) \in B'_{n+1}$ при $s \neq 0$.

Пусть $\delta_i(c'_0, R_0)$ — правильная система исчезающих циклов на слое $\varphi(c'_0, R_0)$; положим

$$\delta_i(c_0, R_1) = \Delta_\gamma(\delta_i(c'_0, R_0)). \tag{5}$$

Если доказать, что циклы $\delta_i(c_0, R_1)$ — исчезающие, то в силу замечания 2 система $\delta_i(c_0, R_1)$ будет правильной.

По мере того, как многочлен R пробегает кривую $\{R(s)\}$, точка $b_i(R)$ пробегает непрерывную кривую $b_i(s)$. Выберем непрерывные кривые $\gamma_i = \{d_i(s), R(s)\}$ так, чтобы для каждого $s \in [0, 1]$ на слое $\varphi(d_i(s), R(s))$ можно было определить локальный исчезающий цикл $\delta_i(d_i(s), R(s))$. Очевидно,

$$\Delta_{\gamma_i}(\delta(d_i(0), R_0)) = \delta(d_i(1), R_1). \tag{6}$$

Пусть $\lambda_{d_i(0),c'_0}$ — кривые на плоскости C, с помощью которых определены циклы $\delta_i(c'_0, R_0)$; $\lambda_{d_i(0),c'_0} = \{c_i(\tau) \mid \tau \in [0,1]\}$. Выберем кривые $\lambda_i(s) = \lambda_{d_i(s),c_0(s)} = \{c_i(\tau, s) \mid \tau \in [0, 1]\}$ так, что функция $c_i(\tau, s)$ непрерывна по совокупности переменных, $\lambda(0) = \lambda_{d_i(0),c'_0}$ и $\lambda_i(s)$ не проходит через $b_j(s)$ ни при каких

$s\in[0, 1]$, $i, j = 1, \ldots, n^2$. Это можно сделать, так как $b_i(s) \neq b_j(s)$ при $s \neq 0$. Циклы $\delta_i(c_0, R_1)$, определенные по формуле (5), являются исчезающими и порождаются кривыми $\lambda_i(1)$, т. е.

$$\delta_i(c_0, R_1) = \Delta_{\lambda_i(1)}(\delta_i(d_i(1), R)). \tag{7}$$

Действительно, $\delta_i(c_0, R_1) = \Delta_\gamma(\delta_i(c_0', R_0)) = \Delta_{\lambda_i(0)\gamma}(\delta_i(d_i(0), R_0))$; с другой стороны, $\Delta_{\lambda_i(1)}(\delta_i(d_i(1), R_1)) = \Delta_{\gamma_i\lambda_i(1)}(\delta_i(d_i(0), R_0))$. По построению семейства кривых $\lambda_i(s)$ получаем, что кривые $\gamma_i\lambda_i(1)$ и $\lambda_i(0)\gamma$ гомотопны в $\mathfrak{B}$; равенство (7) следует теперь из замечания 2 на стр. 366.

Построение правильной системы $\delta_i(c_0', R_0)$. Возьмем $n+1$ многочлен первой степени r_i с действительными коэффициентами так, что прямые $l_i \subset E^2: r_i = 0$ находятся в общем положении, и рассмотрим расслоение действительной плоскости E^2 на линии уровня многочлена $R_0 = \prod_{i=1}^{n+1} r_i$. Линия $R_0 = 0$ является объединением прямых l_i; каждая точка $P_{ij} = l_i \cap l_j$ является седлом на E^2; в каждом многоугольнике M_l, ограниченном прямыми l_i, внутри которого $R_0 \neq 0$, находится по крайней мере одна особая точка Q_l, являющаяся центром на плоскости E^2. Всех седел получится $\frac{n(n+1)}{2}$; всех центров Q_l будет $\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 1$; всех таких особых точек будет n^2. Следовательно, слоение плоскости C^2 на линии уровня многочлена R_0 не имеет особых точек, кроме перечисленных, в частности, в каждом многоугольнике M_l нет особых точек, кроме центра Q_l.

По условию, $R_0(P_{ij}) = 0 \neq R_0(Q_l)$; занумеруем точки P_{ij}, Q_l в единую последовательность P_i; по мере надобности будем также использовать старую нумерацию. Положим $R_0(P_i) = b_i$ и выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < |b_i|$ для тех i, для которых $b_i \neq 0$; на слое φ_c при $|c - b_i| < \varepsilon$ в окрестности точки P_i лежит локальный исчезающий цикл. В качестве точки c_0' выберем это ε; положим

$$d_{ij} = \varepsilon, \quad d_l = b_l - \varepsilon \operatorname{sign} b_l.$$

Тогда все циклы $\delta_l(d_l)$ изображаются замкнутыми кривыми на плоскости E^2. Кривые $\lambda_{d_i, c_0'}$ на плоскости C построим следующим образом:

$\lambda_{d_{ij}, c_0'}$ состоит из одной точки $c_0' = d_{ij} = \varepsilon$;

$\lambda_{d_l, c_0'}$ состоит из отрезка $[b_{l-\varepsilon, \varepsilon}]$ при $b_l > 0$;

$\lambda_{d_l, c_0'}$ состоит из отрезка $[b_l + \varepsilon, -\varepsilon]$ и полуокружности с центром в нуле, началом $-\varepsilon$ и концом ε при $b_l < 0$.

Пусть многоугольник M_l имеет вершины P_{ij}^k, $k = 1, \ldots, K$. Легко видеть, что цикл $\delta_l(c_0')$ имеет ровно по одной точке пересечения с циклами $\delta_{ij}^k(c_0')$, и, следовательно, $(\delta_l, \delta_{ij}^k) = \pm 1$.

Исходя из этого, для любых двух циклов $\delta_i(c_0')$ и $\delta_j(c_0')$ легко построить соединяющую их цепочку, что и доказывает лемму 2.

5. Теорема Пуанкаре* и следствия из нее

Пусть $R \in \mathrm{B}'_{n+1}$ и точки d_i выбраны так, что $|b_i - d_i| < |b_i - b_j|$ при $i \neq j$; слой φ_{c_0}, кривые λ_{d_i, c_0} и циклы $\delta_i(c_0) \subset \varphi_{c_0}$ те же, что в п. 4.

Пусть точка $\hat{c} \in \hat{B}$ изображается кривой $\lambda_{c_0, c}$. Канонической петлей μ_i с началом $\hat{c}$, обходящей точку b_i, назовем кривую $\lambda_{c, d_i} \nu_i \lambda_{c, d_i}^{-1}$, где $\lambda_{c, d_i} = \lambda_{c_0, c}^{-1} \lambda_{d_i, c_0}^{-1}$, ν_i — ориентированная по часовой стрелке окружность $|c - b_i| = |d_i - b_i|$. Поскольку $|b_j - b_i| > |b_i - d_i|$, все точки b_j, $j \neq i$, лежат вне окружности ν_i.

Теорема Пуанкаре. *Пусть μ_i — каноническая петля с началом $\hat{c}$, обходящая точку b_i. Тогда в классе $\{\Delta_{\mu_i} : \varphi_c \to \varphi_c\}$ существует такое отображение Φ, что*

а) Φ *тождественно на* $\varphi_c \setminus U_{\delta_i(\hat{c})}$, *где* $U_{\delta_i(\hat{c})}$ — *окрестность* $\delta_i(\hat{c})$ *на* φ_c; *очевидно* $U_{\delta_i(\hat{c})}$ *гомеоморфна кольцу* $Z = \{s, e^{i\varphi} \mid s \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]\}$;

б) *на* $U_{\delta_i(\hat{c})}$ имеем: $\Phi = f^{-1} g f$, *где* f — *гомеоморфизм* $U_{\delta_i(\hat{c})}$ *на* Z, *переводящий* $\delta_i(\hat{c})$ *в положительно ориентированную окружность* $\left\{\frac{1}{2}, e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi]\right\}$; $g : Z \to Z$ — *отображение, осуществляющее «перекручивание»* $Z : g(s, e^{i\varphi}) = (s, e^{i(\varphi - 2\pi s)})$.

Нас будут интересовать образы $\Delta_{\mu_i}(l)$ циклов $l \subset \varphi_c$ при отображении $\Delta_{\mu_i} : \varphi_c \to \varphi_c$.

Из приведенной формулировки непосредственно следует

Теорема Пуанкаре о гомологическом классе цикла $\Delta_{\mu_i}(l)$. *Обозначим индекс пересечения циклов δ_i и l через (δ_i, l); тогда* $\Delta_{\mu_i}(l) \approx l + (\delta_i, l)\,\delta_i$ (знак $\approx$ означает «гомологичен»).

Лемма 3. *Пусть $\hat{c} \in \hat{B}$ — произвольная точка, $\delta_i(\hat{c})$ — правильная система исчезающих циклов и $\{\hat{c}^k\} = \pi^{-1}\{\pi\hat{c}\}$. Тогда для каждого i_0 множество циклов $\delta_{i_0}(\hat{c}^k) \subset \varphi_{\pi\hat{c}}$ порождает группу $H_1(\varphi_{\pi\hat{c}}, \mathbf{Z})$.*

Доказательство. Из результатов А. Б. Жижченко [2] следует, что исчезающие циклы $\delta_i(\hat{c})$, $i = 1, \ldots, n^2$, порождают группу $H_1(\varphi_{\pi\hat{c}}, \mathbf{Z})$. Мы докажем, что для каждого $\delta_i(\hat{c})$ среди циклов $\delta_i(\hat{c}^k)$ существует цикл, гомологичный либо $\delta_i(\hat{c})$, либо — $\delta_i(\hat{c})$.

Если $(\delta_i, \delta_{i_0}) = \pm 1$, то это утверждение следующим образом немедленно получается из теоремы Пуанкаре. Пусть μ_i и μ_{i_0} — канонические петли с началом $\hat{c}$. Тогда

$$\Delta_{\mu_i}(\delta_{i_0}) \approx \delta_{i_0} + (\delta_i, \delta_0)\,\delta_i,$$

$$\Delta_{\mu_{i_0}\mu_i}(\delta_{i_0}) \approx \delta_{i_0} + (\delta_i, \delta_{i_0})(\delta_i + (\delta_{i_0}, \delta_i)\,\delta_{i_0}) \approx (\delta_i, \delta_{i_0})\,\delta_i = \pm\,\delta_i.$$

* См. [2]; мы формулируем теорему Пуанкаре для нужного нам частного случая.

По лемме 2 систему циклов $\delta_i(\hat{c})$ можно считать правильной. Поэтому, если $(\delta_i, \delta_{i_0}) \neq \pm 1$, существует цепочка $\delta_{i_0}, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_k} = \delta_i$ такая, что $(\delta_{i_{l-1}}, \delta_{i_l}) = \pm 1$. По доказанному выше для каждого $l = 1, \ldots, k$ либо $\delta_{i_l} \in \{\delta_{i_0}(\hat{c}^k)\}$, либо — $\delta_{i_l} \in \{\delta_{i_0}(\hat{c}^k)\}$, что и доказывает лемму.

Мы располагаем теперь необходимым аппаратом, чтобы применять теорему 1 к изучению возмущения (1). Докажем сначала саму теорему.

6. Теорема 1. *Пусть* $R \in \mathrm{B}'_{n+1}$ *и* $\omega \in \Omega_n$. *Если для каждого* c *и каждой замкнутой кривой* $\gamma \subset \varphi_c$ *имеем* $\int\limits_\gamma \omega = 0$, *то* ω — *точная форма.*

Доказательство. Возьмем прямую $z = z_0$, не проходящую через особые точки уравнения (1), и введем $(n+1)$-значную функцию $w(c)$, обратную к функции $c = R(z_0, w)$. Функция $w(c)$ задает w-координаты точек $\mathcal{P}_i(c)$ пересечения слоя φ_c с прямой $z = z_0$; значения функции $w(c)$ в точке c_0 обозначим через $w_i(c_0)$, $i = 1, \ldots, n+1$. Функция $w(c)$ ветвится в точках $c = a_i$, $i = 1, \ldots, n$; значения a_i соответствуют слоям φ_{a_i}, касающимся прямой $z = z_0$.

Определим $(n+1)$-значную функцию $F_\omega(z, w)$. Соединим точку $Q = (z, w)$ с точками $\mathcal{P}_i(c) = (z_0, w_i(R(z, w)))$ кривыми $\gamma_{\mathcal{P}_i, Q}$ и положим $(F_\omega(z, w))_i = (F_\omega(Q))_i = \int\limits_{\gamma_{\mathcal{P}_i, Q}} \omega$. (Всюду в этом пункте будем считать, что $\gamma_{\mathcal{P}Q} \subset \varphi_Q$.)

По условию значение $(F_\omega(z, w))_i$ однозначно определяется выбором точки $\mathcal{P}_i$ и не зависит от кривой $\gamma_{\mathcal{P}_i, Q}$. Функция $F_\omega(z, w)$ аналитична, ветвится на слоях φ_{a_i} и растет не быстрее $|z|^{n+1} + |w|^{n+1}$. Очевидно,

$$(F_\omega(z, w))_i - (F_\omega(z, w))_j = \int\limits_{\gamma_{\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j}} \omega. \tag{8}$$

Фиксируем точку $c_0 \in C$, $c_0 \neq a_i$. Пусть $w_i(c)$, $c \in U^c_{c_0}$, — росток функции, полученный продолжением функции $w(c)$ из значения $w_i(c_0)$ в $U^c_{c_0}$. Определим функцию $W(c)$ как продолжение ростка $w_1(c) - w_2(c)$ на всю сферу CP^1, пусть S — ее риманова поверхность, рассматриваемая как накрывающая над сферой CP^1. Поверхность S имеет $n(n+1)$ листов, ветвится над точками $c = a_i$ и над точкой $c = \infty$. Над точкой $c = \infty$ поверхность S имеет n точек ветвления $p_1, \ldots, p_n$ порядка $n+1$. Следовательно, c как функция на S имеет n полюсов порядка $n+1$ в точках $p_1, \ldots, p_n$.

Определим, наконец, $n(n+1)$-значную функцию $f_\omega(c)$. Пусть $c \in U^c_{c_0}$ и $\mathcal{P}_i(c)$ — точка с координатами $(z_0, w_i(c))$. Определим $f_\omega(c)$ как продолжение на сферу CP^1 ростка

$$f_\omega(c) = \int\limits_{\gamma_{\mathcal{P}_2(c), \mathcal{P}_1(c)}} \omega, \qquad c \in U^c_{c_0}. \tag{9}$$

Замечания. 1. Функция $f_\omega(c)$ однозначна на римановой поверхности S.

2. Из сравнения степеней многочленов A, B и R следует, что при $c \to \infty$ функция $f_\omega(c)$ растет не быстрее линейной. Поэтому единственными особенностями функции $f_\omega(c)$ на S могут быть полюса порядка не выше $n+1$ в точках $p_1, \ldots, p_n$.

Функцию $f_\omega(c)$ будем называть **функцией ветвления для** $F_\omega(z, w)$, так как из равенства $f_\omega(c) \equiv 0$ и формул (8), (9) следует, что $F_\omega(z, w)$ однозначна.

Пусть Φ_n — линейное пространство функций $f_\omega(c)$, построенных для всех $\omega \in \Omega_n$, удовлетворяющих условию теоремы, Ω_n' — пространство точных форм $\omega \in \Omega_n$. Определено линейное отображение $\varphi: \Omega_n' \to \Phi_n$, так как точные формы удовлетворяют условиям теоремы.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать:

1. Из $f_\omega(c) \equiv 0$ следует: $d\omega = 0$.

2. φ — эпиморфизм, точнее,

2а. $\dim(\Omega_n'/\mathrm{Ker}\,\varphi) \geqslant n$.

2б. $\dim \Phi_n \leqslant n$.

Доказательство 1. Пусть $f_\omega(c) \equiv 0$, тогда функция $F_\omega(z, w)$ однозначна. Так как $F_\omega(z, w)$ растет не быстрее $|z|^{n+1} + |w|^{n+1}$, то $F_\omega(z, w) \in B_{n+1}$. Продифференцируем F_ω, в силу уравнения $\frac{dw}{dz} = -\frac{R_z}{R_w}$, получим: $-(F_\omega)_z R_w + (F_\omega)_w R_z = -AR_w + BR_z$ или $R_z(B - (F_\omega)_w) = R_w(A - (F_\omega)_z)$. Если $R \in B_{n+1}''$, то R_z и R_w взаимно просты; тогда, учитывая, что $\deg(B - (F_\omega)_w) = \deg(A - (F_\omega)_z) = n$, получаем: $B - (F_\omega)_w = \lambda R_w$, $A - (F_\omega)_z = \lambda R_z$, т. е. $\omega = d(F_\omega + \lambda R)$.

Доказательство 2а. Пусть $\omega \in \mathrm{Ker}\,\varphi$; как показано выше, отсюда следует, что $\omega = d(F_\omega + \lambda R + \mu)$, где λ и μ — комплексные константы. По определению $F_\omega(z_0, w) \equiv 0$. Пространство всех многочленов $M \in B_{n+1}$, представимых в виде $F + \lambda R + \mu$, где $F(z_0, w) \equiv 0$, обозначим через $\widetilde{B}_{n+1}$, пространство их дифференциалов — через $\widetilde{\Omega}_n$. Мы доказали, что $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \widetilde{\Omega}_n$.

Имеем: $\dim B_{n+1} - \dim \widetilde{B}_{n+1} = n$, так как условие $F(z_0, w) \equiv 0$ выделяет в B_{n+1} подпространство коразмерности $n+2$, а λ и μ — произвольные константы. Но $n = \dim B_{n+1} - \dim \widetilde{B}_{n+1} = \dim \Omega_n' - \dim \widetilde{\Omega}_n \leqslant \dim(\Omega_n'/\mathrm{Ker}\,\varphi)$.

Утверждение 2а доказано.

Доказательство 2б. Докажем, что функция $f_\omega(c)$ однозначно определяется своими n значениями $\int\limits_{\gamma \mathscr{P}_1(c_0), \mathscr{P}_i(c_0)} \omega$, $i = 2, \ldots, n+1$, для некоторого $c_0 \neq a_i, \infty$.

Эти n значений определяют остальные значения $f_\omega(c_0)$:

$$\int\limits_{\gamma \mathscr{P}_i(c_0), \mathscr{P}_j(c_0)} \omega = \int\limits_{\gamma \mathscr{P}_1(c_0), \mathscr{P}_j(c_0)} \omega - \int\limits_{\gamma \mathscr{P}_1(c_0), \mathscr{P}_i(c_0)} \omega.$$

Пусть точке c_0 соответствуют точки $q_i \in S$, $i = 1, \ldots, n(n+1)$, и пусть $\forall i: f_{\omega_1}(q_i) = f_{\omega_2}(q_i)$. Тогда $f_{\omega_1-\omega_2}(q_i) = 0$. Из замечания 2 следует, что в этом случае функция $\frac{f_{\omega_1-\omega_2}}{c - c_0}$ регулярна на S. Отсюда $\frac{f_{\omega_1-\omega_2}}{c - c_0} = \mathrm{const}$, т. е. $f_{\omega_1-\omega_2} = \lambda(c - c_0)$. Но при $\lambda \neq 0$ этого не может быть, так как для каждой точки $q_0 \in S$, где поверхность S ветвится над CP^1, имеем: $f_\omega(Q_0) = 0$ при любом ω. Но $(c - c_0)(q_0) \neq 0$, так как точки q_i, где $c(q_i) = c_0$, не являются точками ветвления поверхности S над CP^1, поскольку $c_0 \neq a_i, \infty$. Теорема доказана.

7. Теорема 2 и ее следствия

Пусть $R \in \mathrm{B}'_{n+1}$, B и $\hat{B}$ — те же, что в п. 4, Ω_n и Ω'_n — пространства всех соответственно точных, форм $A\,dz + B\,dw$ с коэффициентами $A, B \in \mathrm{B}_n$. Имеем: $\dim \Omega_n = (n+1)(n+2)$, $\dim \Omega'_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1$, размерность факторпространства $\Omega''_n = \Omega_n/\Omega'_n$ равна $N + 1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + 1$. Выберем базис в Ω''_n и по представителю $\omega_j \in \Omega_n$, $j = 1, \ldots, N+1$, каждого из элементов базиса. Для каждого $i = 1, \ldots, n^2$ определена аналитическая на $\hat{B}$ функция $\zeta_{ij} = (\delta_i(\hat{c}), \omega_j) = \int\limits_{\delta_i(\hat{c})} \omega_j$. Это определение корректно, поскольку цикл $\delta_i(\hat{c})$ определен однозначно с точностью до свободной гомотопии, а интеграл $\int\limits_{\delta'_i(\hat{c})} \omega_j$ по теореме Коши одинаков на всех циклах, свободно гомотопных $\delta_i(\hat{c})$. Функции ζ_{ij} задают отображение $f_i: \hat{B} \to C^{N+1}$, $\hat{c} \mapsto (\zeta_i(\hat{c})) = (\zeta_{i1}(\hat{c}), \ldots, \zeta_{iN+1}(\hat{c}))$, образом которого является неприводимая кривая $\hat{B}_i \subset C^{N+1}$. Поскольку цикл $\delta_i(\hat{c})$ — исчезающий, замыкание кривой $\hat{B}_i$ содержит точку $0 = (0, \ldots, 0)$.

Теорема 2. *Кривая $\hat{B}_i$ не лежит ни в какой гиперплоскости $H \subset C^{N+1}$.*

Доказательство. Предположим противное. Поскольку замыкание $\hat{B}_i$ содержит точку 0, гиперплоскость $H \supset \hat{B}_i$ задается уравнением $\sum\limits_{j=1}^{N+1} \alpha_j \zeta_j = 0$.

Это значит, что

$$\sum \alpha_j \int\limits_{\delta_i(\hat{c})} \omega_j = \int\limits_{\delta_i(\hat{c})} \omega \equiv 0 \quad \text{на } \hat{B},$$

причем форма $\omega = \sum \alpha_j \omega_j$ не точна в силу выбора форм ω_j. Но по лемме 3 циклы $\delta_i(\hat{c}^k)$ порождают группу $H_1(\varphi_{\pi\hat{c}}, \mathbf{Z})$; поэтому из равенства $\int\limits_{\delta_i(\hat{c}^k)} \omega = 0$ для каждого k следует, что $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$ для каждой замкнутой кривой $\delta \subset \varphi_{\pi\hat{c}}$; поэтому ω удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, точна; получено противоречие.

Замечание. Поскольку кривая $\hat{B}_i$ неприводима, условия: «кривая $\hat{B}_i$ не лежит ни в какой гиперплоскости» и «любая окрестность любой точки из замыкания $\hat{B}_i$ не лежит ни в какой гиперплоскости» эквивалентны.

Мы докажем теперь следствие 2 в несколько более общей форме, чем оно сформулировано во введении.

Следствие 2′. *Пусть* $R \in \mathrm{B}'_{n+1}$. *Возьмем произвольный набор индексов* $i_1, \ldots, i_N$, $N = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$, *среди них могут встречаться одинаковые), и произвольный набор точек* $\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_N \in \hat{B}$. *Это задает набор исчезающих циклов* $\delta_{i_k}(\hat{c}_k)$, $k = 1, \ldots, N$. *Для каждого такого набора можно, вообще говоря, единственным образом подобрать возмущение* (1) *так, что каждый из циклов* $\delta_{i_k}(\hat{c}_k)$ *породит предельный.*

Доказательство. Рассмотрим кривые $\hat{B}_{i_k} = f_{i_k}(\hat{B})$ в пространстве C^{N+1}; через точки $f_{i_k}(\hat{c}_k)$, $k = 1, \ldots, N$, и точку 0 проведем гиперплоскость $\sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j \zeta_j = 0$. Рассмотрим форму

$$\omega = \sum \alpha_j \zeta_j = A\,dz + B\,dw. \tag{10}$$

По определению отображений f_i имеем $\int_{\delta_i(\hat{c})} \omega = \sum \alpha_j \zeta_{ij}(\hat{c})$. По теореме 2 $\int_{\delta_i(\hat{c})} \omega \not\equiv 0$; по выбору ω имеем $\int_{\delta_{i_k}(\hat{c}_k)} \omega = 0$. В возмущении (1) возьмем многочлены A и B, задаваемые формулой (10). По лемме 1 каждый из циклов $\delta_{i_k}(\hat{c}_k)$ порождает предельный цикл, и следствие 2′ доказано.

Замечания. 1. Поскольку $N+1$ точка в C^{N+1}, вообще говоря, однозначно определяет гиперплоскость, возмущение (1) определено, вообще говоря, однозначно.

2. Формы ω_j можно взять с действительными коэффициентами, тогда, если циклы $\delta_{i_k}(\hat{c}_k)$ лежат на действительной плоскости E^2, многочлены в форме (10) имеют действительные коэффициенты. Следствие 2, сформулированное во введении, немедленно получается теперь из следствия 2′.

Следствие 1. План доказательства. Пусть $R \in \mathrm{B}'_{n+1}$, P_i — особая точка уравнения (2), $A(P_i) = B(P_i) = 0$. Предположим, что существует последовательность $t_k \to 0$ такая, что для всех уравнений $\alpha(t_k)$ точка P_i является центром. Тогда оказывается, что точка P_i является центром для всех уравнений $\alpha(t)$ при достаточно малом t, и поэтому $\int_{\delta_i(c)} \omega \equiv 0$ при $c \in U^c_{R(P_i)}$. Отсюда по теореме 2 будет следовать, что форма ω точна. Трудность заключается в том, что окрестности $(U^{z,w}_{P_i})_k$, в которых слоение на решения уравнения $\alpha(t_k)$ топологически эквивалентно слоению $\xi\eta = \mathrm{const}$, могут иметь пересечение только в одной точке P_i.

Доказательство следствия 1. Аналитической заменой введем в окрестности точки P_i координаты ξ, η, в которых слоение $R = \mathrm{const}$ записывается в виде $\xi\eta = \mathrm{const}$, $|\xi| < 1$, $|\eta| < 1$. Слои $\xi = 0$ и $\eta = 0$ являются сепаратрисами особой точки P_i уравнения (2). Возьмем произвольную точку $(\xi_0, 0)$, $|\xi_0| = \rho < 1$, и положительно ориентированную петлю $l_\xi : |\xi| = \rho$ на плоскости $\eta = 0$. По теореме об аналитической зависимости сепаратрисы от параметра, существует аналитическая функция $\eta(\xi, t)$, определенная в окрестности $\{|\xi| < 1\} \times U_0^t$, $\eta(\xi, 0) \equiv 0$, $\eta(0, t) \equiv 0$, такая, что при каждом фиксированном t кривая $\eta = \eta(\xi, t)$ является сепаратрисой особой точки $(0, 0)$ для уравнения $\alpha(t)$. Окрестность U_0^t выберем столь малой, что функция последования $\Delta_{l_\xi}(\eta, t)$ определена в окрестности $U_0^\eta \times U_0^t$. Пусть $l_{\xi,k}$ — положительно ориентированная петля $|\xi| = \varepsilon < \rho_k$ на плоскости $\eta = 0$. По предположению $(0, 0)$ — центр для уравнения $\alpha(t_k)$. Поэтому для достаточно малого ρ_k цикл на сепаратрисе $\eta = \eta(\xi, t_k)$, накрывающий над $l_{\xi,k}$, является тождественным по η. Из замечания 2 на стр. 362 следует, что цикл на той же сепаратрисе, накрывающий над l_ξ, также является тождественным по η, т. е. $\Delta_{l_\xi}(\eta, t_k) \equiv \eta$ при $\eta \in U^\eta_{\eta(\xi_0, t_k)}$. Но отсюда следует, что

$$\Delta_{l_\xi}(\eta, t_k) \equiv \eta \tag{11}$$

при $\eta \in U_0^\eta$, так как функция $\Delta_{l_\xi}(\eta, t_k)$ аналитична в U_0^η. Поскольку условие (11) выполняется при любом достаточно большом k и функция $\Delta_{l_\xi}(\eta, t)$ аналитична в $U_0^\eta \times U_0^t$, отсюда следует, что $\Delta_{l_\xi}(\eta, t) \equiv \eta$ в $U_0^\eta \times U_0^t$. Поэтому

$$0 \equiv \Delta_{l_\xi}(\eta, t) - \eta \equiv t\,[\Delta_{l_\xi}(\omega_1, \eta) + \ldots],$$

где многоточием обозначены члены высших степеней по t. Поэтому

$$\Delta_{l_\xi}(\omega_1, \eta) \equiv 0. \tag{12}$$

Заметим, что циклы на слоях $\xi\eta = \mathrm{const}$, накрывающие над l_ξ, — исчезающие, поэтому условие (12) равносильно условию $\int\limits_{\delta_i(c)} \omega \equiv 0$, $c \in U^c_{R(P_i)}$; по теореме 2 форма ω точна, и следствие 1 доказано.

Я пользуюсь случаем принести благодарность моему научному руководителю Е. М. Ландису, многократно обсуждавшему со мной эту работу.

(Поступила в редакцию 4/VI 1968 г.)

Литература

1. И. Г. Петровский и Е. М. Ландис, О числе предельных циклов уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q — многочлены 2-й степени, Матем. сб., **38** (**80**) (1955), 209—250.
2. А. Б. Жижченко, О группах гомологий алгебраических многообразий, Изв. АН СССР, серия матем., **25** (1961), 765—788.
3. Н. Ф. Отроков, О числе предельных циклов дифференциального уравнения в окрестности особой точки, Матем. сб., **34** (**76**) (1954), 127—144.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

НОВАЯ СЕРИЯ

ТОМ ВОСЬМИДЕСЯТЫЙ
ВЫПУСК ТРЕТИЙ
Т. 80 (122) : 3

МОСКВА 1969

УДК 517.92

Пример уравнений $\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{P_n(z, w)}{Q_n(z, w)}$, имеющих счетное число предельных циклов и сколь угодно большой жанр по Петровскому — Ландису

Ю. С. Ильяшенко (Москва)

1. В C^2 рассматривается уравнение

$$\frac{dw}{dz}=\frac{P_n(z, w)}{Q_n(z, w)},\tag{1}$$

где P и Q — многочлены степени n с комплексными коэффициентами. Основные понятия, связанные с этим уравнением, введены в работе [1]; мы будем пользоваться определениями и обозначениями работы [2].

Пусть R — произвольный многочлен из B'_{n+1}, линии уровня которого имеют $n+1$ различных бесконечно удаленных точек (пространство таких многочленов мы обозначим через $\widetilde{\mathrm{B}}_{n+1}$), $U\subset \mathrm{A}_n$ — произвольная окрестность уравнения

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{R_z}{R_w}.\tag{2}$$

Мы построим открытое множество $V\subset U$ так, что каждое уравнение $\alpha\in V$ имеет счетное число предельных циклов $l_k(\alpha)$, $k=1,\ldots$. Кроме того, в п. 8 для каждого натурального N будут построены уравнения $\alpha\in U$, имеющие жанр не менее N (определение жанра приведено на стр. 400).

Для общего уравнения $\alpha\in V$ циклы $l_k(\alpha)$ различны в следующем смысле:

Определение. Множество $\{l_k(\alpha)\}$ состоит из различных циклов, если циклы любого конечного подмножества $(l_{k_1},\ldots, l_{k_p})\subset\{l_k(\alpha)\}$, лежащие на решении φ уравнения α, не принадлежат никакой подгруппе группы $\pi_1(\varphi)$ с числом образующих $q<p$.

Конструкция основана на простом следствии теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Лемма 1. *Пусть K' — круг с центром p на действительной плоскости R^2 и Δ_1 — сжимающий гомеоморфизм круга K' на область $\Delta_1(K')\subset K'$, имеющий неподвижную точку p. Пусть Δ_2 — непрерывное отображение, определенное в гомеоморфной кругу окрестности K точки p, $\Delta_2(p)\neq p$ и $\Delta_2(K)\subset K'$. Тогда для каждого достаточно большого натурального k отображение $\Delta_2\Delta_1^k$* определено в области K и имеет неподвижную точку $p_k\in K$; $p_k\neq p_l$ при $k\neq l$.*

* Через $\Delta_2\,\Delta_1$ обозначается суперпозиция Δ_1 (Δ_2).

Доказательство. При достаточно большом k отображение Δ_1^k переводит круг K' внутрь K; следовательно, $\Delta_2\Delta_1^k(K)\subset K$ и теорема Брауэра дает существование неподвижной точки p_k для отображения $\Delta_2\Delta_1^k$. Точка p не является неподвижной точкой отображения $\Delta_2\Delta_1^k$, т. е. $p\neq p_k$. Действительно, $\Delta_1^{-k}(p)\neq\Delta_2(p)$, так как $\Delta_1^{-k}(p)=p$ (Δ_1 — гомеоморфизм), и $\Delta_2(p)\neq p$ по условию. Далее, $\Delta_2\Delta_1^l(p_k)=\Delta_1^{l-k}(p_k)\neq p_k$, при $l>k$, т. е. $p_k\neq p_l$. Лемма доказана.

2. Пусть l_z — ориентировочная кривая на плоскости z с началом ξ_0. Через $\{l_z, (\xi_0, \eta), \alpha\}$ обозначим накрывающую над l_z, полученную продолжением над l_z решения уравнения α с начальным условием (ξ_0, η).

Теорема 1. *Пусть*

$$R\in\widetilde{\mathrm{B}}_{n+1},$$

$\delta_1(c_0)$ *и* $\delta_2(c_0)$ — *ориентированные исчезающие циклы, для которых выполняется условие: существует такой исчезающий цикл* δ_{i_0}, *что*

$$(\delta_1, \delta_{i_0})\neq 0, \quad (\delta_2, \delta_{i_0})=0; \tag{3}$$

ω_1, $\omega_2\in\Omega_n$ — *произвольные формы с линейно независимыми дифференциалами;*

$p>0$ — *произвольное число.*

Тогда для каждого $\hat{c}\in\hat{B}$ *за исключением дискретного множества можно подобрать*

линейную комбинацию $\omega_{\hat{c}}=Adz+Bdw$ *форм* ω_1 *и* ω_2;

комплексный параметр $t_1:|t_1|<p$;

окрестность $V\subset \mathrm{A}_n$ *точки* $(-R_z-t_1A,\ R_w+t_1B)$;

окрестность K *точки* $\eta_0: K=\{|\eta-\eta_0|<p_1\}$ *где* (ξ_0, η_0) — *общее начало обхода циклов* $\delta_1(\hat{c})$ *и* $\delta_2(\hat{c})$ *так, что*

1) *для каждого* $\alpha\in V$ *и достаточно большого натурального* k *на решении уравнения* α *находится предельный цикл* $l_k(\alpha)=\{(\delta_2(\hat{c})\delta_1^k(\hat{c}))_z, (\xi_0, \eta_k(\alpha)), \alpha\}$, *причем* $\eta_k(\alpha)\in K$;

2) *из* V *можно исключить счетное объединение* N *аналитических подмножеств коразмерности не менее* 1 *так, что для каждого* $\alpha\in V\setminus N$ *циклы* $\{l_k(\alpha)\}$ *различны* *.

Введем обозначение: $l_{z_k}=(\delta_2(\hat{c})\delta_1^k(\hat{c}))_z$. Существование предельного цикла $l_k(\alpha)=\{l_{z_k}, (\xi_0, \eta_k(\alpha)), \alpha\}$ равносильно существованию неподвижной точки $\eta_k(\alpha)$ у отображения $\Delta_k=\Delta_{l_{z_k}}:\eta\to\Delta_{l_{z_k}}(\eta, \alpha)$. Наши дальнейшие рассуждения будут связаны с неподвижными точками отображений Δ_k.

Доказательство удобно разбить на несколько предложений.

---

* Определение аналитического подмножества открытого множества приведено в книге [3], стр. 78.

Под размерностью здесь и в дальнейшем подразумевается комплексная размерность.

3. Пусть $\omega = Adz + Bdw$ — произвольная форма из Ω_n; l — ориентированная замкнутая кривая на слое φ_c. Обозначим:

$$(\omega, l) = \int_l \omega; \quad \alpha_t = (-R_z - tA, \ R_w + tB).$$

Предложение 1. *Пусть $l_1 = l_1(\hat{c}_1)$ и $l_2 = l_2(\hat{c}_1)$ — произвольные замкнутые ориентированные кривые на слое φ_{c_1}, $c_1 = \pi\hat{c}_1$, с началом обхода (ξ_0, η_0) и $R_w(\xi_0, \eta_0) \neq 0$, $\omega \in \Omega_n$, причем*

$$(\omega, l_1(\hat{c}_1)) = 0, \tag{3а}$$

$$(\omega, l_1(\hat{c}_1))'_{\hat{c}}\big|_{\hat{c}=\hat{c}_1} \neq 0, \tag{3б}$$

$$(\omega, l_2(\hat{c}_1)) \neq 0. \tag{3в}$$

Тогда

а) *существуют такие ρ_1, ρ_2, a и b, что для каждого натурального k функция $\Delta_{l_2 l_1^k}(\eta, \alpha_t)$ определена в области $K \times S$, где K — круг $|\eta - \eta_0| < \rho_1$, S — сектор: $|t| < \rho_2, \arg t \in (a, b)$;*

б) *для каждого $t \in S$ и для достаточно большого натурального k $(k > K(t))$ отображение $\eta \to \Delta_{l_2 l_1^k}(\eta, \alpha_t)$ имеет изолированную неподвижную точку $\eta_k \in K$, причем $\eta_k \neq \eta_l$ при $k \neq l$.*

Доказательство*. Из условия (3а) и неравенства $R_w(\xi_0, \eta_0) \neq 0$ следует**, что в некоторой окрестности $U_0 = U^{\eta}_{\eta_0} \times U^t_0$ множество неподвижных точек отображения $\Delta_1 : \eta \to \Delta_{l_1}(\eta, \alpha_t)$ при $t \in U^t_0 \setminus 0$ задается однозначной аналитической функцией $\eta(t)$, определенной в U^t_0; $\eta(0) = \eta_0$. Функция $\Delta_{l_1}(\eta, \alpha_t)$ в окрестности U_0 допускает представление:

$$\Delta_{l_1}(\eta, \alpha_t) = \eta + t(\eta - \eta(t))\,\Omega(\eta, t) = \eta(t) + (\eta - \eta(t))(1 + t\Omega(\eta, t)), \tag{4}$$

где $\Omega(\eta, t)$ — аналитическая функция, не равная нулю в U_0. Выберем ρ_1 столь малым, чтобы круг $K'' = \{|\eta - \eta_0| < 3\rho_1\}$ принадлежал $U^{\eta}_{\eta_0}$. Выберем ρ_2 столь малым, чтобы при $|t| < \rho_2$ отображение Δ_1 переводило круг $K' = \{|\eta - \eta(t)| < 2\rho_1\}$ внутрь круга K'' и чтобы выполнялось неравенство

$$|\eta_0 - \eta(t)| < \frac{\rho_1}{2}. \tag{5}$$

Отображение Δ_1 круга K'' аналитично и стремится к тождественному при $t \to 0$, поэтому отображение Δ_1 круга K' стремится к тождественному равномерно вместе с производными; следовательно, при достаточно малых t отображение $\Delta_1 : K' \to \Delta_1(K')$ — гомеоморфизм. Положим, наконец,

$$(a, b) = (-\arg\Omega(\xi_0, \eta_0) + \rho_3, \ -\arg\Omega(\xi_0, \eta_0) - \rho_3).$$

В силу непрерывности Ω в U_0, числа ρ_i, $i = 1, 2, 3$, можно выбрать столь малыми, что для любой точки $(\eta, t) \in K' \times S$ выполняется

---

* При доказательстве мы будем использовать результаты п. 3 работы [2].

** См. доказательство леммы 1 в [2] и примечание к этой лемме.

$$|1+t\Omega(\eta,\ t)| < 1 - C_1|t|, \tag{6}$$

где C_1 — некоторая положительная константа, т. е. отображение Δ_1 круга K' — сжимающее. Для каждого $t \in S$ отображение Δ_1 удовлетворяет теперь условиям леммы 1.

Рассмотрим отображение $\Delta_2: \eta \to \Delta_2(\eta,\ \alpha_t)$. При достаточно малом $t \neq 0$

$$\Delta_2(\eta(t),\ \alpha_t) \neq \eta(t). \tag{7}$$

Предположим противное. Тогда в силу аналитичности $\eta(t)$ и $\Delta_2(\eta,\ \alpha_t)$ имеем:

$$\Delta_2(\eta(t),\ \alpha_t) \equiv \eta(t).$$

С другой стороны,

$$\Delta_2(\eta,\ \alpha_t) = \eta + t\Delta_{l_2}(\omega_1,\ \eta) + O(t^2); \tag{8}$$

поэтому из предыдущего равенства следует, что

$$\Delta_{l_2}(\omega_1,\ \eta_0) = 0, \tag{9}$$

а это противоречит условию (3в), так как $\Delta_{l_2}(\omega_1,\ \eta) = \frac{1}{R_\omega(\xi_0,\ \eta_0)}(\omega,\ l_2) \neq$ $\neq 0$. Выберем теперь ρ_2 столь малым, чтобы выполнялись неравенство (7) и условие

$$\Delta_2(K) \subset K'. \tag{10}$$

Из условий (7) и (10) следует, что отображение Δ_2 для каждого $t \in S$ удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому отображение $\Delta_{l_2 l_1^k} = \Delta_2\Delta_1^k$ определено в $K \times S$. Итак, утверждение а) предложения 1 доказано.

Далее, по лемме 1 для каждого $t \in S$ существует такое $K(t)$, что при $k > K(t)$ отображение $\eta \to \Delta_{l_2 l_1^k}(\eta,\ \alpha_t) = \Delta_{l_2}\Delta_{l_1}^k(\eta,\ \alpha_t)$ имеет хотя бы одну неподвижную точку η_k. Это — изолированная неподвижная точка: в противном случае, в силу аналитичности функции $\Delta_{l_2 l_1^k}(\eta,\ \alpha_t)$,

$$\Delta_{l_2 l_1^k}(\eta,\ \alpha_t) \equiv \eta \text{ при } \eta \in K;$$

в частности, $\Delta_{l_2 l_1^k}(\eta(t),\ \alpha_t) \equiv \eta(t)$, т. е. $\Delta_2(\eta(t),\ \alpha_t) \equiv \eta(t)$ — противоречие.

Предложение 1 доказано.

4. Мы докажем теперь, что условиям (3а) — (3в) можно удовлетворить при достаточно общих предположениях.

Предложение 2. *Пусть ω_1 и ω_2 — произвольные формы из Ω_n с линейно независимыми дифференциалами;*

R — произвольный многочлен из $\widetilde{B}_{n+1}$;

$\delta_1(c_0)$ и $\delta_2(c_0)$ — ориентированные исчезающие циклы, для которых выполняется условие (3).

Тогда для каждого $\hat{c}_1 \in \hat{B}$, за исключением дискретного множества, выполняются условия (3а) — (3в), *если положить*:

$$\omega = \omega_{\hat{c}_1} = (\omega_2,\ \delta_1(\hat{c}_1))\,\omega_1 - (\omega_1,\ \delta_1(\hat{c}_1))\,\omega_2,$$

$$\delta_1(\hat{c}_1) = l_1,\ \delta_2(\hat{c}_1) = l_2.$$

Доказательство*. Исключительное множество является множеством нулей аналитической на $\hat{B}$ функции. Мы приведем к противоречию равенства:

$$(\omega_{\hat{c}_1}, \delta_1(\hat{c}))'|_{\hat{c}=\hat{c}_1} \overset{\hat{c}_1}{\equiv} 0, \tag{$\overline{3б}$}$$

$$(\omega_{\hat{c}_1}, \delta_2(\hat{c}_1)) \overset{\hat{c}_1}{\equiv} 0. \tag{$\overline{3в}$}$$

Этого будет достаточно для доказательства неравенств (3б) и (3в), так как кривая $\hat{B}$ неприводима.

Равенство (3а) следует из определения формы $\omega_{\hat{c}_1}$.

Доказательство (3б). Из условия ($\overline{3б}$) следует:

$$(\omega_2, \delta_1(\hat{c}))(\omega_1, \delta_1(\hat{c}))' - (\omega_1, \delta_1(\hat{c}))(\omega_2, \delta_1(\hat{c}))' \overset{\hat{c}}{\equiv} 0.$$

Это значит, что функции $(\omega_1, \delta_1(\hat{c}))$ и $(\omega_2, \delta_1(\hat{c}))$ линейно зависимы на $\hat{B}$, что противоречит теореме 2 работы [2].

Доказательство (3в). Пусть $\delta_1'(\hat{c}), \delta_2(\hat{c}), \ldots, \delta_{n^2}(\hat{c})$ — правильная система исчезающих циклов, содержащая $\delta_2(\hat{c})$. Обозначим для краткости:

$$(\omega_j, \delta_i(\hat{c})) = \delta_{ji}(\hat{c}) = \delta_{ji} \quad (j = 1, 2; \quad i = 2, \ldots, n^2).$$

Из условия ($\overline{3в}$) следует, что

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} \overset{\hat{c}}{\equiv} 0. \tag{11}$$

Докажем, что отсюда следует

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{1i} \\ \delta_{21} & \delta_{2i} \end{vmatrix} \overset{\hat{c}}{\equiv} 0 \tag{12}$$

для любого $i = 3, \ldots, n^2$ (для $i = 1, 2$ это тривиально). Пусть $i \geqslant 3$ и $(\delta_i, \delta_2) \neq 0$. Тогда, обходя каноническую петлю μ_i с началом $\hat{c}$, получим:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} + (\delta_i, \delta_1)\delta_{1i} & \delta_{12} + (\delta_i, \delta_2)\delta_{1i} \\ \delta_{21} + (\delta_i, \delta_1)\delta_{2i} & \delta_{22} + (\delta_i, \delta_2)\delta_{2i} \end{vmatrix} \overset{\hat{c}}{\equiv} 0,$$

т. е. учитывая (11):

$$(\delta_i, \delta_1)\begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{12} \\ \delta_{2i} & \delta_{22} \end{vmatrix} + (\delta_i, \delta_2)\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{1i} \\ \delta_{21} & \delta_{2i} \end{vmatrix} \overset{\hat{c}}{\equiv} 0. \tag{11'}$$

Из равенства (11) следует, что столбцы определителя, стоящего в левой части, пропорциональны: $\begin{pmatrix} \delta_{12} \\ \delta_{22} \end{pmatrix} = k(\hat{c})\begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \end{pmatrix}$; $k(\hat{c})$ — мероморфная на $\hat{B}$ функция, отличная от тождественного нуля или бесконечности по теореме 2 из [2]. Из (11') получаем теперь

$$((\delta_i, \delta_1)(-k(\hat{c})) + (\delta_i, \delta_2))\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{1i} \\ \delta_{21} & \delta_{2i} \end{vmatrix} \overset{\hat{c}}{\equiv} 0.$$

Предположим, что $\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{1i} \\ \delta_{12} & \delta_{2i} \end{vmatrix} \overset{\hat{c}}{\not\equiv} 0$; тогда

$$(\delta_i, \delta_1)(-k(\hat{c})) + (\delta_i, \delta_2) \overset{\hat{c}}{\equiv} 0. \tag{11''}$$

* При доказательстве предложения 2 мы будем использовать п. п. 4 и 5 работы [2].

Приведем это равенство к противоречию с условием (3). Из (11″) и условия $(\delta_i, \delta_2) \neq 0$ следует, что $k(\hat{c})$ равно некоторой (рациональной) постоянной k, т. е. $(\omega_1, \delta_2 - k\delta_1) \overset{\hat{c}}{\equiv} 0$. Обходя каноническую петлю μ_{i_0} с началом $\hat{c}$, получаем отсюда: $(\omega_1, \delta_2 - k\delta_1 - (\delta_{i_0}, \delta_2)\delta_{i_0}) \overset{\hat{c}}{\equiv} 0$; следовательно, $(\omega_1, \delta_{i_0}) \overset{\hat{c}}{\equiv} 0$, что противоречит теореме 2 из [2]. Формула (12) доказана для всех $i : (\delta_i, \delta_2) \neq 0$.

В случае, если $(\delta_i, \delta_2) = 0$, соединим циклы δ_2 и δ_i цепочкой $\{\delta_{i_l}\}$, $l = 1, \ldots, L$; $i_1 = 2$, $i_L = i$. Для циклов $\delta_{i_{l-1}}$, δ_{i_l} условие (3) выполняется: $(\delta_{i_{l-1}}, \delta_{i_{l-1}}) = 0$; $(\delta_{i_{l-1}}, \delta_{i_l}) = \pm 1$. Формула (12) доказывается для $i = i_L$ индукцией по l.

Из (11) и (12) следует, что $(\omega_{\hat{c}}, \delta(\hat{c})) \overset{\hat{c}}{\equiv} 0$ для любого исчезающего цикла $\delta(\hat{c})$. Поскольку, в силу результатов А. Б. Жижченко [4], исчезающие циклы порождают группу $H_1(\varphi_c, \mathbf{Z})$, получаем: $(\omega_{\hat{c}}, l) \overset{\hat{c}}{\equiv} 0$ для любой замкнутой кривой $l \subset \varphi_c$, $c = \pi\hat{c}$. Кроме того, $d\omega_{\hat{c}} \neq 0$. В случае, когда φ_c — неособая кривая, последние два утверждения противоречат лемме 2.

Лемма 2*. *Пусть $R \in \widetilde{\mathrm{B}}_{n+1}$ и $\omega \in \Omega_n$. Тогда из условия: $(\omega, l) = 0$ для любой замкнутой кривой l, лежащей на фиксированном неособом слое φ_c, следует, что $d\omega = 0$* **.

Доказательство. Через $\overline{\varphi}_c$ обозначим проективное замыкание кривой φ_c. Кривая $\overline{\varphi}_c$ имеет $n+1$ бесконечно удаленных точек $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Пусть $p_0 \in \varphi_c$ — произвольная точка. Для каждого $q \in \varphi_c$ положим $F(q) = \int\limits_{\gamma_{p_0, q}} \omega$, $\gamma_{p_0, q} \subset \varphi_c$. По условию, F — однозначная аналитическая функция. Поскольку, $\deg A = \deg B = n$, функция F имеет в точках $p_1, \ldots, p_{n+1}$ полюса порядка не выше $n+1$; кроме того, $F(p_0) = 0$. Дивизор (F) функции F является кратным дивизора $\mathfrak{a} = p_0 \prod\limits_{i=1}^{n+1} p_i^{-(n+1)}$. Пусть Φ — пространство всех мероморфных функций F на $\overline{\varphi}_c$, дивизор которых делится на $\mathfrak{a}$. Ниже мы найдем $\dim \Phi$ по теореме Римана—Роха.

На подпространстве $\widetilde{\Omega}_n \subset \Omega_n$ форм, удовлетворяющих условию леммы, определено линейное отображение φ: $\widetilde{\Omega}_n \to \Phi$. Напомним, что пространство точных форм $\omega \in \Omega_n$ обозначается через Ω_n'. Очевидно, $\Omega_n' \subseteq \widetilde{\Omega}_n$, поскольку точные формы удовлетворяют условию леммы. Мы докажем, что

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \Phi = \dim \Omega_n',$$

и поэтому $\widetilde{\Omega}_n = \Omega_n'$.

* Эта лемма перекрывает теорему 1 работы [2] для случая $R \in \widetilde{\mathrm{B}}_{n+1}$.

** Лемма верна в том случае, когда слой φ_c — особый.

По теореме Римана — Роха

$$\dim \Phi = r[\mathfrak{a}] = d[\mathfrak{a}^{-1}] + i[\mathfrak{a}^{-1}] - g + 1$$

(обозначения взяты из книги Спрингера [5], гл. 10). По формуле Гурвица,

$$g = \frac{n(n-1)}{2}; \quad d[\mathfrak{a}^{-1}] = (n+1)^2 - 1; \quad i[\mathfrak{a}^{-1}] = 0,$$

так как $d[\mathfrak{a}^{-1}] > 2g - 2$; отсюда получаем

$$\dim \Phi = \frac{n^2 + 5n + 2}{2}.$$

Пусть теперь $\omega \in \operatorname{Ker} \varphi$, т. е. $\int\limits_{\gamma_{p_0, q}}^{q} \omega \equiv 0$. Дифференцируя это равенство, в силу уравнения (2), получаем:

$$-AR_w + BR_z|_{\varphi_c} = 0.$$

Поскольку $R \in \widetilde{\mathrm{B}}_{n+1}$ и, следовательно, многочлен $R - c$ неприводим, имеем

$$-AR_w + BR_z = (R - c)M,$$

где M — некоторый многочлен степени не более $n - 1$. Мы докажем, что $M \equiv 0$. Тогда, в силу взаимной простоты R_z и R_w, получим: $B = \lambda R_w$ и $A = \lambda R_z$, т. е. $\omega = \lambda dR$ и $\operatorname{Ker} \varphi = \{\lambda dR\}$.

Пусть $M \not\equiv 0$. Тогда $M = 0$ — алгебраическая кривая степени $n - 1$. Поскольку φ_c — неособый слой, система

$$R_z = 0, \; R_w = 0, \; R - c = 0$$

несовместна. Поэтому кривая $M = 0$ проходит через все n^2 точек пересечения кривых $R_z = 0$, $R_w = 0$. С другой стороны, кривая $R_z = 0$ степени n и кривая $M = 0$ степени $n - 1$ могут иметь не более чем $n(n-1)$ точек пересечения — противоречие. Итак, $\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$.

Наконец,

$$\dim \Omega_n' = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1 = \frac{n^2 + 5n + 2}{2} + 1 = \dim \Phi + \dim \operatorname{Ker} \varphi.$$

Лемма 2, а вместе с ней и предложение 2, доказаны.

Из предложений 1 и 2 следует первое утверждение теоремы для любого $\alpha = \alpha_t$, $t \in S$.

Для дальнейших рассмотрений мы фиксируем: форму $\omega_{\hat{c}_1} \in \Omega_n$ и точку $\hat{c}_1 \in \hat{B}$, для которых выполнены условия (3а)—(3в); точку (ξ_0, η_0): $R_w(\xi_0, \eta_0) \neq 0$, являющуюся общим началом обхода циклов $\delta_1(\hat{c}_1)$ и $\delta_2(\hat{c}_1)$; область $K \times S$, относительно которой будем считать, что встречающиеся ранее или в дальнейшем требования малости констант ρ_1, ρ_2 и ρ_3 выполнены. В частности, круг K будем считать столь малым, чтобы:

а) можно было определить следующее конформное вложение $K \to \hat{B}$: $(\xi_0, \eta_0) \mapsto \hat{c}_1$; (ξ_0, η) переходит в такую точку $\hat{c}(\xi_0, \eta) \in \hat{B}$, что $\pi \hat{c}(\xi_0, \eta) = R(\xi_0, \eta)$;

б) выполнялось неравенство:

$$(\omega_{\hat{c}_1},\ \delta_1(\hat{c}(\xi_0,\ \eta))) \neq 0 \text{ при } \eta \in K \setminus \eta_0. \qquad (3a')$$

5. Перейдем теперь к построению окрестности V и к доказательству различности циклов $l_k(\alpha)$ для общего $\alpha \in V$.

Фиксируем произвольное $t_1 \in S$, $|t_1| < \rho$ (ρ — константа, указанная в формулировке теоремы). Выше было доказано, что на решениях уравнения α_{t_1} существует счетное число предельных циклов $l_k(\alpha_{t_1}) = \{l_{z_k},\ (\xi_0,\ \eta_k),\ \alpha_{t_1}\}$, причем $(\eta_k,\ t_1) \in K \times S$.

Предложение 3. а) *Существует окрестность V точки α_{t_1}, в которой для каждого достаточно большого натурального k ($k > K$) определены аналитические, может быть, неоднозначные функции $\eta_k(\alpha)$ такие, что $l_k(\alpha) = \{l_{z_k},\ (\xi_0,\ \eta_k(\alpha)),\ \alpha\}$ — предельный цикл; одно из значений $\eta_k(\alpha_{t_1})$ равно η_k.*

б) *В секторе S для каждого достаточно большого натурального k ($k > K$) определены аналитические, может быть, неоднозначные, функции $\eta_k(t)$ такие, что $l_k(t) = \{l_{z_k},\ (\xi_0,\ \eta_k(t)),\ \alpha_t\}$ — предельный цикл; одно из значений $\eta_k(t_1)$ равно η_k.*

в) *Каждая ветвь функции $\eta_k(t)$ стремится к пределу $\eta_k(0)$, когда $t \to 0$ вдоль некоторой кривой $t(s) \subset S$.*

г) *Значения $\eta_k(0)$ различны для разных k.*

Из утверждения а) следует первая часть теоремы. Утверждения б), в) и г) будут использованы для доказательства второй части.

Доказательство а) и б). Докажем, что для достаточно большого натурального k

$$\Delta_k(\eta,\ \alpha) \neq \eta \qquad (13)$$

при $\eta \in \partial K = \{|\eta - \eta_0| = \rho_1\}$, $\alpha \in V$ (если окрестность V достаточно мала) или $\alpha = \alpha_t$, $t \in S$.

Пусть $\alpha = \alpha_t$, $t \in S$. Из (8), полагая $l_2 = \delta_2(\hat{c}_1)$, получаем:

$$\left|\Delta^{-1}_{\delta_2(\hat{c}_1)}(\eta,\ \alpha_t) - \eta\right| < C|t|,$$

где C — некоторая положительная константа.

Из (4) и (6), полагая $l_1 = \delta_1(\hat{c}_1)$, получаем:

$$\left|\Delta^k_{\delta_1(\hat{c}_1)}(\eta,\ \alpha_t) - \eta\right| > [1 - (1 - C_1|t|)^k]\,|\eta - \eta(t)| =$$

$$= C_1|t|\,[1 + (1 - C_1|t|) + \ldots + (1 - C_1|t|)^{k-1}]\,|\eta - \eta(t)|.$$

По условию, $|\eta - \eta_0| = \rho_1$, причем, в силу (5), $|\eta(t) - \eta_0| < \frac{\rho_1}{2}$; следовательно, $|\eta - \eta(t)| > \frac{\rho_1}{2}$.

Выберем теперь K столь большим, что при $k > K$

$$C_1[1 + (1 - C_1|t|) + \ldots + (1 - C_1|t|)^{k-1}]\,\frac{\rho_1}{2} > C$$

для каждого $t \in S$. Это можно сделать, если $\frac{\rho_1}{2\rho_2} > C$. Тогда

$$\Delta^k_{\delta_1(\hat{c}_1)}(\eta, \alpha_t) = \Delta_{\delta_1^k(\hat{c}_1)}(\eta, \alpha_t) \neq \Delta^{-1}_{\delta_2(\hat{c}_1)}(\eta, \alpha_t)$$

при $|\eta - \eta_0| = \rho_1$. Отсюда следует неравенство (13) для $\alpha = \alpha_t$.

Выберем теперь окрестность V столь малой, чтобы уравнение $\Delta_{\delta_1(\hat{c}_1)}(\eta, \alpha) = \eta$ задавало в окрестности V однозначную аналитическую функцию $\eta(\alpha)$. Это можно сделать, так как функция $\Delta_{\delta_1(\hat{c}_1)}(\eta, \alpha) - \eta$ при $\alpha = \alpha_t$ имеет однократный нуль по η в круге K. Тогда

$$\Delta_{\delta_1(\hat{c}_1)}(\eta, \alpha) = \eta(\alpha) + (\eta - \eta(\alpha))(1 + \Omega_1(\eta, \alpha)), \tag{4'}$$

где $\Omega_1(\eta(t_1), \alpha_{t_1}) = t_1\Omega(\eta(t_1), t_1)$ (см. формулу (4)).

Потребуем еще, чтобы выполнялись следующие условия:

$$|\eta_0 - \eta(\alpha)| < \frac{\rho_1}{2} \text{ при } \alpha \in V, \tag{5'}$$

$$|1 + \Omega_1(\eta, \alpha)| < (1 - C_1|t_1|) \text{ при } (\eta, \alpha) \in K' \times V, \tag{6'}$$

$$\Delta_{\delta_2(\hat{c}_1)}(\eta, \alpha) \in K' \text{ при } (\eta, \alpha) \in K \times V, \tag{10'}$$

$$\Delta_{\delta_2(\hat{c}_1)}(\eta(\alpha), \alpha) \neq \eta(\alpha) \text{ при } \alpha \in V. \tag{7'}$$

Все эти неравенства выполняются при $\alpha = \alpha_{t_1}$, следовательно, они выполняются и в некоторой окрестности точки α_{t_1}. Из (10'), (4') и (6') следует, что отображение: $\eta \to \Delta_k(\eta, \alpha)$ определено в $K \times V$. Неравенство (13) для $\alpha \in V$ доказывается теперь так же, как для $\alpha = \alpha_t$, $t \in S$.

Утверждения а)—в) мы докажем, используя следующее предложение:

Пусть $M \subset A_n$ — аналитическое подмногообразие пространства коэффициентов, круг $K = \{|\eta - \eta_0| < \rho_1\}$ — тот же, что и выше, $\Delta(\eta, \alpha)$ — аналитическая функция в $K \times M$. Пусть $\forall \alpha \in M$, $\Delta(\eta, \alpha) \overset{\eta}{\not\equiv} 0$, и

$$\Delta(\eta, \alpha) \neq 0 \text{ при } \alpha \in M, \quad \eta \in \partial K = \{|\eta - \eta_0| = \rho_1\} \tag{13'}$$

и, кроме того, $\Delta(\eta_1, \alpha_1) = 0$ для некоторой точки $(\eta_1, \alpha_1) \in K \times M$.

Тогда уравнение

$$\Delta(\eta, \alpha) = 0 \tag{14}$$

задает (неоднозначную) аналитическую функцию $\eta(\alpha)$, одно из значений которой в точке α_1 совпадает с η_1, допускающую аналитическое продолжение на все M.

Доказательство. По подготовительной теореме Вейерштрасса, в некоторой окрестности $U^\eta_{\eta_1} \times U^\alpha_{\alpha_1}$, $U^\alpha_{\alpha_1} \in M$ уравнение (14) задает (неоднозначную) аналитическую функцию $\eta(\alpha)$, все значения которой в точке α_1 равны η_1. Через M' обозначим множество тех точек $\alpha \in M$, в которые функция $\eta(\alpha)$ может быть аналитически продолжена. Пусть $M' \neq M$ и $\alpha_0 \in M \cap \partial M'$. Возьмем последовательность точек $\alpha_\nu \in M$, $\alpha_\nu \to \alpha_0$, и пусть $\eta(\alpha_0)$ — предельная точка для последовательности $\eta(\alpha_\nu)$. Очевидно, $|\eta(\alpha_0) - \eta_0| \leqslant \rho_1$; из (13') следует, что $|\eta(\alpha_0) - \eta_0| < \rho_1$. По подготовительной теореме Вейерштрасса все решения уравнения (14) в некоторой окрестности $U^{\eta}_{\eta(\alpha_0)}\times U^{\alpha}_{\alpha_0}$ задаются (неоднозначной) аналитической функцией $\tilde{\eta}(\alpha)$. Для достаточно большого ν имеем $(\eta(\alpha_\nu), \alpha_\nu)\in U^{\eta}_{\eta(\alpha_0)}\times U^{\alpha}_{\alpha_0}$. Функция $\eta(\alpha)$ удовлетворяет уравнению (14); поэтому в некоторой окрестности $U^{\eta}_{\eta(\alpha_\nu)}\times U^{\alpha}_{\alpha_\nu}$ ростки функций $\eta(\alpha)$ и $\tilde{\eta}(\alpha)$ совпадают. Следовательно, $\tilde{\eta}(\alpha)$ является аналитическим продолжением функции $\eta(\alpha)$ в окрестность $U^{\alpha}_{\alpha_0}$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Полагая $M=S$ (соответственно, $M=V$), $\Delta=\Delta_k-\eta$, получаем, что уравнение $\Delta_k(\eta, \alpha)-\eta=0$ при $k>K$ задает (неоднозначную) аналитическую функцию $\eta_k(\alpha)$, определенную в S (соответственно, в V); одно из значений $\eta_k(\alpha_{t_1})$ равно η_k.

Циклы $l_k(t)$ при $t\in S$ и $l_k(\alpha)$ при $\alpha\in V$ — предельные; для $t\in S$ это следует из (7); для $\alpha\in V$ — из (7′); доказательство такое же, как в конце п. 3. Утверждения а) и б) доказаны.

Доказательство в). Соединим точку $t=t_1$ с точкой $t=0$ кривой $t(s)\subset S$, $s\in[0, 1]$, $t(1)=t_1$, $t_1(0)=0$, не проходящей через точки ветвления функций $\eta_k(t)$. Тогда продолжение функций $\eta_k(t)$ над кривой $t(s)\setminus 0\setminus t_1$ определено однозначно. Функция $\Delta_k(\eta, \alpha_t)$ определена в окрестности $K\times U_k$, $U_k=(U^t_0)_k$, причем $\Delta_k(\eta, \alpha_t)-\eta=t^m\tilde{\Delta}_k(\eta, \alpha_t)$, и $\forall\, t\in U_k$, $\tilde{\Delta}_k(\eta, \alpha_t)\overset{\eta}{\not\equiv}0$. Очевидно, уравнения $\tilde{\Delta}_k(\eta, \alpha_t)=0$ и $\Delta_k(\eta, \alpha_t)-\eta=0$ равносильны в $S\cap U_k\setminus 0$. Полагая $\Delta=\tilde{\Delta}_k$, $M=S\cup U_k$, получаем утверждение в).

Замечание. Для каждого $k>K$ мы построили однопараметрическое семейство циклов $l_k(s)$, лежащих на решениях уравнений $\alpha_{t(s)}$ и непрерывно зависящих от s; $l_k(1)=l_k(\alpha_{t_1})$; $l_k(0)$ лежит на решении $\varphi_k=\varphi_{\xi_0,\eta_k(0)}$ вырожденного уравнения (2). Будем говорить, что цикл $l_k(1)$ «садится» на решение уравнения (2). Согласно терминологии работы [2], цикл $l_k(0)$ порождает семейство предельных циклов.

Доказательство г). Предположим противное. Пусть циклы $l_{k_1}(0)$ и $l_{k_2}(0)$ лежат на одном решении $\varphi_{\xi_0,\eta_k(0)}$, $\eta_k(0)\in K$. Обозначим: $\hat{c}_{k_1}=\hat{c}(\xi_0, \eta_{k_1}(0))$ (см. конец п. 4). Тогда, поскольку каждый из них порождает семейство предельных циклов, $(\omega_{\hat{c}_1}, l_{\hat{k}_1}(0))=(\omega_{\hat{c}_1}, l_{k_2}(0))=0$. Это значит, что $(\omega_{\hat{c}_1}, \delta_2(\hat{c}_{k_1}))+k_1(\omega_{\hat{c}_1}, \delta_1(\hat{c}_{k_1}))=(\omega_{\hat{c}_1}, \delta_2(\hat{c}_{k_1}))+k_2(\omega_{\hat{c}_1}, \delta_1(\hat{c}_{k_1}))=0$. Из 3(а) и 3(в) следует, что $\hat{c}_{k_1}\neq\hat{c}_1$; поэтому равенство: $(\omega_{\hat{c}_1}, \delta_1(\hat{c}_{k_1}))=0$ противоречит неравенству (3а′) (см. стр. 395).

Утверждение г), а с ним и все предложение 3, доказаны.

6. Предложение 4. *Из окрестности V можно исключить счетное объединение N аналитических подмножеств коразмерности не меньше 1 так, что для каждого $\alpha\in V\setminus N$ циклы $l_k(\alpha)$ $(k>K)$ различны.*

Доказательство. Пусть $l_{k_i}(\alpha)$ $(i=1, \ldots, p)$ — циклы, лежащие на одном решении φ уравнения α и принадлежащие подгруппе группы $\pi_1(\varphi)$ с образующими $L_1, \ldots, L_q$, $q<p$. Тогда циклы $l_{k_i}(\alpha)$ $(i=1, \ldots, p)$ принадлежат подгруппе группы $H_1(\varphi, \mathbf{Z})$ с образующими $L_1, \ldots, L_q$ и, сле-

довательно, гомологически зависимы с целыми коэффициентами:

$$\sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha) \approx 0.$$

Введем обозначение: $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. По теореме Стокса, $\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha)\right) = 0$ для каждого $\omega \in \Omega$. Положим:

$$N_{a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}} = \left\{\alpha \in V \mid \left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha)\right) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega\right\}.$$

Функции $\eta_{k_i}(\alpha)$ — (неоднозначные) аналитические в окрестности V, следовательно, и $\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha)\right)$ — (неоднозначная) аналитическая функция в окрестности V для каждого $\omega \in \Omega$. Множество ее нулей есть аналитическое подмножество V. Тогда $N_{a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}}$ (пересечение таких множеств по всем $\omega \in \Omega$) есть тоже аналитическое подмножество V (может быть, пустое). Пусть N — объединение всех подмножеств $N_{a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}}$, т. е.

$$N = \bigcup_{p \in \mathbf{N}} \bigcup_{\substack{k_i \in \mathbf{N} \\ i=1, \ldots, p}} \bigcup_{a_{k_i} \in \mathbf{Z}} N_{a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}}.$$

Если ни одно из подмножеств $N_{a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}}$ не совпадает с V, то предложение 4 доказано.

Пусть $N_{a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}} = V$, т. е. $\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha)\right) \equiv 0$ в V $\forall \omega \in \Omega$. Функция $\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha_t)\right)$ — (неоднозначная) аналитическая в S и совпадает с $\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha)\right)$ на пересечении $S \cap V$. Поэтому $\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(\alpha_t)\right) \overset{t}{\equiv} 0$ $\forall \omega \in \Omega$. Из этого равенства при $t=0$ мы получим противоречие, а именно, докажем, что для любого набора чисел I_i и любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать форму $\omega = A\,dz$ так, что

$$|(\omega, l_{k_i}(0)) - I_i| < \varepsilon. \tag{15}$$

Воспользуемся следующей теоремой Штольценберга [6]:

а) Пусть l_i, $i = 1, \ldots, p$ — гладкие кривые в C^N. Тогда полиномиально выпуклая оболочка $\{\hat{l_i}\}$ множества $\{l_i\}$ есть $\{l_i\} \cup \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — одномерное аналитическое множество.

б) В случае, если $\mathcal{A} = \varnothing$, любая непрерывная функция на $\{l_i\}$ может быть равномерно аппроксимирована многочленом*.

* Эта теорема непосредственно следует из теоремы работы [6] и утверждения 4 из раздела «Технические комментарии».

Заменим кривые $l_{k_i}(0)$ на гомотопные им гладкие кривые, не проходящие через точки ветвления решения φ_{k_i}, как функции от z. Новые кривые будем по-прежнему обозначать через $l_{k_i}(0)$. Равенство

$$\left(\omega, \sum_{i=1}^{p} a_{k_i} l_{k_i}(0)\right) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

при этом сохранится по теореме Коши.

Докажем, что множество $\{l_{k_i}(0)\}$ полиномиально выпукло. Предположим противное. Пусть $\mathcal{A} \bigcup \{l_{k_i}\}$ — полиномиально выпуклая оболочка множества $\{l_{k_i}\}$, $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Пусть φ_{c_i} — линия уровня многочлена R, на которой лежит цикл l_{k_i}. Полином $\prod_{i=1}^{p}(R(z, w) - c_i)$ равен нулю на множестве $\bigcup_{1}^{p} \varphi_{c_i} \supset \bigcup_{1}^{p} l_{k_i}$ и отличен от нуля вне его. Поэтому $\mathcal{A} \subset \bigcup_{1}^{p} \varphi_{c_i}$. Поскольку циклы l_{k_i} лежат на разных слоях φ_{c_i} (п. г) предложения 3) и $\mathcal{A} \neq \varnothing$, существует связная компонента $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$, принадлежащая слою φ_{c_i} и такая, что $\partial \mathcal{A}_i = l_{k_i}$. Отсюда следует, что цикл l_{k_i} гомологичен нулю на φ_{c_i}. Но это невозможно, так как циклы δ_i, $i = 1, \ldots, n^2$, гомологически независимы. Действительно, их n^2, и они порождают группу $H_1(\varphi_{c_i}, \mathbf{Z})$, имеющую ранг n^2 $\left(\varphi_{c_i}\right.$ — кривая рода $\frac{n(n-1)}{2}$ с $n+1$ выколотыми точками$\left.\right)$.

Итак, к кривым $l_{k_i}(0)$ $(i = 1, \ldots, p)$ применимо утверждение б) теоремы Штольценберга. Пусть s — длина дуги на цикле $l_{k_i}(0)$, отсчитываемая от произвольной точки в направлении, предписанном ориентацией цикла $l_{k_i}(0)$, $z_i(s)$—z-координата точек цикла $l_{k_i}(0)$. Функция $z_i'(s)$ непрерывна и отлична от нуля, так как кривая $l_{k_i}(0)$ не проходит через точки ветвления решений η_{k_i} как функций от z. Положим

$$f_i(s) = \frac{I_i}{z_i'(s)}.$$

Приближая $f_i(s)$ для всех $i = 1, \ldots, p$ многочленом A с точностью до $\min \frac{\varepsilon}{2S_i}$, где S_i — длина цикла $l_{k_i}(0)$, получаем (15).

Предложение 4, а вместе с тем и вся теорема 1, доказаны.

7. Тем же методом можно построить счетное число предельных циклов для довольно общего уравнения $\alpha \in \mathrm{A}_n$. Приводимая ниже конструкция возникла в беседе Е. М. Ландиса с автором; мы изложим ее, не останавливаясь на деталях. Требования, налагаемые ниже на уравнение α, выполняются всюду в A_n, за исключением счетного числа вещественно аналитических многообразий вещественной коразмерности не менее 1.

Пусть P — особая точка уравнения α, φ — ее сепаратриса, δ — цикл, обходящий точку P на φ, с началом обхода в точке (ξ_0, η_0). Потребуем, чтобы $\Delta_\delta'(\eta_0) \neq 0$ и $|\Delta_\delta'(\eta_0)| \neq 1$. Тогда можно ориентировать цикл δ так, что $|\Delta_\delta'(\eta_0)| < 1$, и в некотором круге $K' = \{|\eta - \eta_0| < \rho\}$ отображение Δ_1: $\eta \to \Delta_\delta(\eta)$ удовлетворяет условиям леммы 1.

Для всякого $\alpha \in \mathrm{A}_n$, за исключением конечного числа вещественно-аналитических подмногообразий коразмерности не менее 1, решение φ плотно в C^2 (см. [7] и [8]). В частности, на φ существует вещественная кривая l с началом (ξ_0, η_0) и концом (ξ_0, η_1), $\eta_1 \in K'$, $\eta_1 \neq \eta_0$. Отображение Δ_2: $\eta \to \Delta_{l_z}(\eta)$ определено в окрестности K точки η_0 и непрерывно (даже аналитично), причем $\Delta_2(\eta_0) = \eta_1 \neq \eta_0$. Поэтому Δ_2 удовлетворяет условиям леммы 1, и на решениях уравнения α существует счетное число циклов $l_k = \{(l\delta^k)_z, (\xi_0, \eta_k), \alpha\}$; $\eta_k \in K$. Циклы l_k — предельные (доказательство такое же, как и в п. 3).

Однако доказательство различности циклов l_k, аналогичное приведенному выше, не проходит: циклы l_k не удается посадить на решения вырожденного уравнения.

Возникает вопрос: может быть, различность циклов l_k можно доказать, рассматривая только индивидуальное уравнение α?

8. Построим теперь уравнения со сколь угодно большим жанром.

Определение. Система замкнутых кривых l_{z_k} на плоскости z называется правильно расположенной, если кривые l_{z_k} — несамопересекающиеся и попарно не пересекающиеся.

Система циклов $l_k(\alpha)$ на решениях уравнения α называется правильно расположенной, если циклы $l_k(\alpha)$ можно так заменить свободно гомотопными циклами $\tilde{l}_k(\alpha)$, что система проекций $\tilde{l}_{z_k}(\alpha)$ будет правильно расположенной.

Система циклов $l_k(\alpha)$ называется правильной, если, кроме того, циклы $l_k(\alpha)$ негомотопны нулю и попарно негомотопны.

Жанром уравнения α называется максимальное число предельных циклов, из которых можно составить правильную систему *.

Теорема 2. *Для каждого натурального N существует такая область $V_N \subset \mathrm{A}_n$, что жанр общего уравнения $\alpha \in V_N$ не меньше N.*

Уравнение $\alpha^0 \in V_N$ найдем в виде α_t, $t \in S$, циклы $l_k(\alpha_t)$ — в виде

$$\{(\delta_2(\hat{c}_1)\,\delta_1^k(\hat{c}_1))_z,\ (\xi_0, \eta_k(t)),\ \alpha_t\}, \quad k = K, \ldots, K+N,$$

причем циклы $\delta_2(\hat{c}_1)$ и $\delta_1(\hat{c}_1)$ (точнее, кривые λ_{d_i, c_0}; см. [2], п. 4) будут выбраны так, что пересечение $\delta_1(\hat{c}_1) \cap \delta_2(\hat{c}_1)$ состоит из одной точки, и проекция $(\delta_2(\hat{c}_1))_z$ имеет некоторый специальный вид. В качестве области V_N возьмем затем окрестность точки α^0.

Доказательство теоремы 2. Фиксируем многочлен $R \in \widetilde{\mathrm{B}}_{n+1}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

---

* Определение жанра дано в неопубликованной работе Е. М. Ландиса. Определение правильной системы циклов, близкое к приведенному здесь, дано в статье [1], на стр. 215.

1°. Кривая $R_w=0$ (геометрическое место точек ветвления $(z_j(c), w_j(c))= = v_j(c)$ слоев φ_c) неприводима*.

2°. Для всех $c\in C^1$, за исключением конечного множества $\{b_l'\}$, слой φ_c имеет $n(n+1)$ двукратных точек ветвления, проекции которых на плоскость z различны: $z_i(c)\neq z_j(c)$ при $i\neq j$.

3°. В особых точках уравнения (2) $R_{w^2}\neq 0$, т. е. система

$$R_z=0,\ R_w=0,\ R_{w^2}=0$$

несовместна.

Для общего многочлена $R\in\widetilde{\mathrm{B}}_{n+1}$ эти требования выполняются.

Введем обозначение: $B'=C^1\setminus\{b_l'\}$. Определено расслоение области $C\times\{w=0\}\setminus\bigcup\limits_{c\in C^1}\{z_j(c)\}\setminus\bigcup\limits_{l}\{c=b_l\}$ с базой B' и слоем $\{w=0\}\setminus\{z_j(c)\}$, $c\in B'$. Каждой кривой $\lambda_{c_1,c_2}\subset B'$ соответствует класс гомотопных отображений $\Delta'_{\lambda_{c_1,c_2}}$: $\{w=0\}\setminus\{z_j(c_1)\}\to\{w=0\}\setminus\{z_j(c_2)\}$ и отображение $\Delta''_{\lambda_{c_1,c_2}}$: $\{v_j(c_1)\}\to\{v_j(c_2)\}$. Замкнутой кривой $l_z\subset\{w=0\}\setminus\{z_j(c_1)\}$ соответствует класс свободно гомотопных кривых $\{\Delta'_{\lambda_{c_1,c_2}}(l_z)\}\subset\{w=0\}\setminus\{z_j(c_2)\}$.

Замечание. Пусть $l\in\varphi_{c_1}$ — замкнутая кривая и $l_z\subset\{w=0\}\setminus\{z_j(c_1)\}$ — ее проекция на плоскость z. По теореме о монодромии, каждой кривой $\tilde{l}_z\in \in\{\Delta'_{\lambda_{c_1,c_2}}(l_z)\}$ соответствует кривая $l(c_2)\subset\{\Delta_{\lambda_{c_1,c_2}}(l_z)\}\subset\varphi_{c_2}$, проекция которой на плоскость z равна $\tilde{l}_z$.

Множество отображений $\Delta''_{\lambda_{c_1,c_2}}$ транзитивно, т. е. для любых i и j существует такая кривая $\lambda_{c_1,c_2}\subset B'$, что $\Delta''_{\lambda_{c_1,c_2}}(v_i(c_1))=v_j(c_2)$. Для построения кривой λ_{c_1,c_2} достаточно соединить точки $v_i(c_1)$ и $v_j(c_2)$ кривой $\lambda\subset\{R_w=0\}$ так, что $R(\lambda)\subset B'$, и положить $\lambda_{c_1,c_2}=R(\lambda)$. Кривую λ можно найти в силу неприводимости кривой $R_w=0$.

Пусть P_i — особая точка уравнения (2); $R(P_i)=b_i$ и $d_i\in C^1$ — точка, близкая к b_i; на решении $\varphi(d_i)$ определен локальный исчезающий цикл $\delta(d_i)$. Из требования 3° на многочлен R следует, что цикл $\delta(d_i)$ можно так заменить на свободно гомотопный цикл $\tilde{\delta}(d_i)$, что проекция $\tilde{\delta}_z(d_i)$ на плоскость $\{w=0\}\setminus\{z_j(d_i)\}$ будет иметь вид $\mu_1(d_i)\mu_2(d_i)$. Здесь $\mu_1(d_i)= =\lambda_1\gamma_1\lambda_1^{-1}$, где γ_1 — малая положительно ориентированная окружность с центром $z_1(d_i)$; λ_1 — кривая с некоторым фиксированным началом ξ_0 и концом на γ_1. Аналогично определяется $\mu_2(d_i)=\lambda_2\gamma_2\lambda_2^{-1}$. Кроме того, цикл $\tilde{\delta}(d_i)$ можно выбрать так, что $\lambda_2\lambda_1^{-1}$ — несамопересекающаяся кривая. Такое построение проделаем для всех особых точек P_i уравнения (2). Выберем теперь точки P_1, P_2, d_1 и d_2 так, чтобы существовала кривая $\lambda_{d_2d_1}\subset B'\cap B$, для которой $\Delta''_{\lambda_{d_2d_1}}(v_1(d_2))=v_1(d_1)$ и $\Delta''_{\lambda_{d_2d_1}}(v_2(d_2))\neq v_2(d_1)$**.

* Всюду в дальнейшем рассматриваются точки ветвления слоя φ_c как функции от z.

** Это можно сделать. В противном случае инволютивное конформное отображение $v_1(d)\to v_2(d)$, определенное на кривой $R_w=0$ в окрестности точки P_1, можно было бы продолжить до инволютивного конформного отображения всей кривой $R_w=0$ на себя. Это отображение имело бы n^2 неподвижных точек P_i; но $n^2>2g+2\geqslant(n-1)(n-2)+2$ (g — род кривой $R_w=0$) — противоречие (см. [5], стр. 332).

Пусть $c_0 \in B$ — общее начало кривых, изображающих точки накрывающей $\hat{B}$ (см. [2], п. 4); соединим точки d_1 и c_0 кривой $\lambda_{d_1,c_0} \subset B' \cap B$ и положим $\hat{c}_1 \sim \lambda^{-1}_{d_1,c_0}$. Цикл $\widetilde{\delta}_1(d_1)$ можно обозначить теперь через $\delta_1(\hat{c}_1)$. В классе $\{\Delta'_{\lambda_{d_2,d_1}}(\mu_1(d_2)\mu_2(d_2)\}$ можно выбрать кривую вида $\mu_1(d_1)\mu_3(d_1)$, $z_2(d_1) \neq z_3(d_1)$; при этом $\mu_1(d_1)\mu_3(d_1)$ и $(\delta_1(\hat{c}_1))_z$ пересекаются в двух точках в окрестности $z_1(d_1)$. Пусть $\delta_2(\hat{c}_1) \in \{\Delta_{\lambda_{d_2,d_1}}(\widetilde{\delta}_2(d_2))\}$, причем $(\delta_2(\hat{c}_1))_z = \mu_1(d_1)\mu_3(d_1)$ (см. замечание, стр. 401). Тогда циклы $\delta_2(\hat{c}_1)$ и $\delta_1(\hat{c}_1)$ пересекаются в одной точке в окрестности $v_1(d_1)$ и, следовательно,

$$(\delta_2(\hat{c}_1),\ \delta_1(\hat{c}_1)) = \pm 1. \tag{16}$$

Пусть (ξ_0, η_0) — точка пересечения циклов $\delta_1(\hat{c}_1)$ и $\delta_2(\hat{c}_1)$. Поскольку $(\delta_1(\hat{c}_1))_z$, $(\delta_2(\hat{c}_1))_z \subset \{w = 0\} \setminus \{z_j(c_1)\}$, имеем: $R_w(\xi_0, \eta_0) \neq 0$. Выберем окрестность $K = \{\,|\eta - \eta_0| < \rho_1\}$ столь малую, что выпуклая оболочка множества $R(K) = \{R(\xi_0, \eta) \mid \eta \in K\}$ не содержит точки $b_1 = R(P_1)$. Как было сказано выше, $R \in \widetilde{\mathrm{B}}_{n+1}$. Кроме того, из равенства (16) следует, что для циклов $\delta_1(\hat{c}_1)$ и $\delta_2(\hat{c}_1)$ выполняется условие (3): в качестве цикла δ_{i_0} можно взять цикл $\delta_2(\hat{c}_1)$. Поэтому применима теорема 1. Для каждого достаточно большого k, $k > K$, существует такая точка $\eta_k \in K$, что цикл $l_k(0) = \{(\delta_2(\hat{c}_1)\delta_1^k(\hat{c}_1))_z,\ (\xi_0, \eta_k),\ \alpha_0\}$ порождает семейство предельных циклов $l_k(t) = \{(\delta_2(\hat{c}_1)\delta_1^k(\hat{c}_1))_z,\ (\xi_0, (\eta_k(t)),\ \alpha_t\}$, $t \in (U_0^t)_k$. Пусть $K \to \hat{B}$ — отображение, определенное на стр. 394. Положим: $\hat{c}_k$ — образ точки η_k при этом отображении; $c_k = \pi\hat{c}_k$; $U_0 = \bigcap_{k=K}^{K+N} (U_0^t)_k$. Пусть S — тот же сектор, что в теореме 1. Для общего $t \in U_0 \cap S$ циклы $l_k(t)$, $k = K, \ldots, K+N$, различны; следовательно, они различны и для общего $t \in U_0$. Мы докажем сейчас, что для достаточно малых t эти циклы правильно расположены.

Из теоремы Пуанкаре ([2]), п. 5) следует:

Теорема Пуанкаре о гомотопическом классе цикла. Пусть $\mu_i \subset \hat{B}$ — каноническая петля с началом $\hat{c}$, обходящая точку b_i, и циклы $l(\hat{c})$ и $\delta_i(\hat{c})$ имеют одну точку пересечения. Тогда цикл $\Delta_{\mu_i}(l)$ свободно гомотопен циклу $l(\hat{c})\,\delta_i(\hat{c})^{(\delta_i,\, l)}$, а цикл $\Delta_{\mu_i^{-1}}(l)$ — циклу $l(\hat{c})\,\delta_i(\hat{c})^{-(\delta_i,\, l)}$.

Замечание. Из условия теоремы следует, что $(\delta_i, l) = \pm 1$.

Пусть $\delta_1(\hat{c}_1)$ и $\delta_2(\hat{c}_1)$ — циклы, построенные выше, $\gamma \ni R(\xi_0, \eta_0) = \pi\hat{c}_1$ — окружность с центром b_i, ориентированная положительно или отрицательно, в зависимости от того, положителен или отрицателен индекс пересечения $(\delta_1(\hat{c}_1),\ \delta_2(\hat{c}_1))$. Кривые $\lambda_{d_1,c_K} \subset B \cap B'$ и $\lambda_{c_k,c_{k+1}} \subset B \cap B'$ выберем так, что замкнутые кривые $\lambda_{d_1,c_K}[c_K, d_1]$ и $\lambda_{c_k,c_{k+1}}[c_{k+1}, c_k]$ свободно гомотопны на $B \cap B'$ кривым γ^k и γ соответственно ($k = K, \ldots, K+N$). По теореме Пуанкаре о гомотопическом классе цикла имеем: цикл $l_k(0)$ свободно гомотопен циклу $\Delta_{\lambda_k}(\delta_2(\hat{c}_1))$; здесь $\lambda_k = \lambda_{d_1,c_K}$ при $k = K$, $\lambda_k = \lambda_{d_1,c_K}\prod_{l=k}^{k-1}\lambda_{c_k,c_{k+1}}$, при $k=K+1, \ldots, K+N$. Напомним, что проекция $(\delta_2(\hat{c}_1))_z$ имеет специальный вид, описанный на стр. 401. Окрестность K выберем столь малой, что множества $\{z_j(c_k)\}$ попарно не пересекаются при разных k. Очевидно, что имеет место следующее

Предложение. *Для любого натурального N в классах $\{\Delta'_{\lambda_k}(\delta_2(\hat{c}_1))_z\}$, $k=K, \ldots, K+N$, можно выбрать представителей $\tilde{l}_{z_k}$ так, что система $\{\tilde{l}_{z_k}\}$ правильно расположена.*

В классах $\Delta_{\lambda_k}(\delta_2(\hat{c}_1))$ выберем представителей $\tilde{l}_k(0)$ с проекциями $\tilde{l}_{z_k}$. Это можно сделать в силу замечания стр. 401. Циклы $\tilde{l}_k(0)$ свободно гомотопны циклам $l_k(0)$. Каждый из циклов $l_k(0)$ порождает семейство предельных циклов $l_k(t)$, определенное при $t \in U_0$. По лемме 3′ из [9], каждый из циклов $\tilde{l}_k(0)$, $k=K, \ldots, K+N$ порождает семейство предельных циклов $\tilde{l}_k(t)$, определенное при $t \in V_0^t \subset U_0$, причем циклы $\tilde{l}_k(t)$ и $l_k(t)$ свободно гомотопны. Поэтому циклы $l_k(t)$, $k=K, \ldots, K+N$, правильно расположены. Кроме того, для общего $t \in V_0^t$ циклы $\tilde{l}_k(t)$ различны, так как циклы $l_k(t)$ различны. Итак, для каждого $t \in V_0^t \setminus 0$ на решениях уравнения α_t имеется система из N правильно расположенных предельных циклов; для общего $t \in V_0^t$ эти циклы различны и, следовательно, негомотопны нулю и попарно негомотопны. Тем самым для общего $t \in V_0^t$ уравнение α_t имеет жанр не менее N.

Пусть уравнение α^0 имеет жанр не менее N и $\{l_k(\alpha^0)\}$ $(k=1, \ldots, N+1)$ — правильная система ориентированных предельных циклов с началом обхода (ξ_k, η_k). Без ограничения общности можно считать, что циклы $l_k(\alpha^0)$ не проходят через точки ветвления решений уравнения α^0. Для каждого k функция $\Delta_{l_k}(\eta, \alpha) - \eta$, определенная в окрестности $(U^\alpha_{\alpha^0} \times U^\eta_{\eta_k})_k$, имеет в точке (η_k, α^0) нуль, изолированный по η. По подготовительной теореме Вейерштрасса, в некоторой окрестности $(V^\alpha_{\alpha_0})_k \subset (U^\alpha_{\alpha^0})_k$ определена такая (неоднозначная) аналитическая функция $\eta_k(\alpha)$, что $l_k(\alpha) = \{l_{z_k}, (\xi_k, \eta_k(\alpha)), \alpha\}$ — предельный цикл. Циклы $l_k(\alpha)$ определены в области $V_N = \bigcap_{k=1}^{N+1} (V^\alpha_{\alpha^0})_k$, правильно расположены и различны для общего уравнения $\alpha \in V_N$, так как они различны для одного $\alpha = \alpha^0 \in V_N$. Поэтому жанр общего уравнения $\alpha \in V_N$ больше N, что и требовалось доказать.

Рассуждения, изложенные в последнем абзаце, близки к доказательству леммы 10 из работы [1].

Теорема 2 показывает, что жанр не является инвариантом общего уравнения $\alpha \in A_n$.

Приношу глубокую благодарность моему научному руководителю Е. М. Ландису за постоянное внимание и плодотворные обсуждения этой работы; благодарю также В. М. Алексеева, который внимательно прочитал эту работу и сделал большое количество ценных замечаний. Кроме того, беседа с В. М. Алексеевым послужила толчком к написанию этой статьи.

(Поступила в редакцию 4/II 1969 г.)

Литература

1. И. Г. Петровский и Е. М. Ландис, О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены второй степени, Матем. сб., 38 **(70)** (1955), 209—250.
2. Ю. С. Ильяшенко, Возникновение предельных циклов при возмущении уравнения $\frac{dw}{dz}=-\frac{R_z}{R_w}$, где $R(z, w)$ — многочлен, Матем. сб., **78** **(120)** (1969), 360—373.
3. Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Москва, Физматгиз, 1962.
4. А. Б. Жижченко, О группах гомологий алгебраических многообразий, Изв. АН СССР, серия матем. **25** (1961), 765—788.
5. Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, Москва, ИЛ, 1960.
6. G. Stolzenberg, Uniform approximation on smooth curves, Acta Math., **115**, № 3—4 (1966), 185—198.
7. М. Г. Худай-Веренов, Об одном свойстве решений одного дифференциального уравнения, Матем. сб., **56** (98) (1962), 301—308.
8. Ю. С. Ильяшенко, Плотность индивидуального решения и эргодичность семейства решений уравнения $\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)}$, Матем. заметки, **4** (1968), 741—750.
9. И. Г. Петровский и Е. М. Ландис, Поправки к статьям «О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены второй степени» и «О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — полиномы», Матем. сб., **48** **(90)** (1959), 253—255.