Функциональный анализ и его приложения,
1984, т. 18, вып. 2, 40—50.

УДК 513.836 + 517.919

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ СО СВОЙСТВОМ КОНЕЧНОСТИ И КОМПЛЕКСНЫЕ АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ

А. Г. Хованский

Из алгебры известно, что число компонент поверхности уровня полинома конечно и явно оценивается по его степени. Близкая ситуация известна в анализе [1]: число компонент в кубе поверхности уровня вещественной аналитической функции конечно. Явной оценки в этом случае нет, однако есть равномерная ограниченность по параметру: у функции, аналитически зависящей от параметра, пробегающего другой куб, число компонент поверхности уровня равномерно ограничено [2].

Явную оценку числа компонент удается найти для некоторых интегральных многообразий (называемых разделяющими решениями) алгебраических распределений гиперплоскостей. Разделяющее решение уравнения Пфаффа (см. [3, 7] и п. 1) — это ограничивающее область интегральное многообразие распределения коориентированных гиперплоскостей, коориентация которых совпадает с коориентацией границы области. Свойства разделяющих решений напоминают свойства поверхностей уровня. Так, число компонент разделяющего решения уравнения Пфаффа с полиномиальными коэффициентами конечно и оценивается по степеням коэффициентов. О теоремах такого рода и их применениях к алгебре и теории элементарных функций можно прочесть в [3—7] (см. также п. 1).

Разделяющие решения можно рассматривать и для уравнений Пфаффа с аналитическими коэффициентами. При помощи таких решений в пп. 2, 3 конструируется класс вещественно аналитических многообразий. Для сконструированных многообразий справедливы теоремы конечности (см. п. 4). Явных оценок тут нет, зато есть равномерная ограниченность по параметрам.

П р и м е р. Рассмотрим в открытом кубе пространства $\mathbb{C}^n$ однозначную ветвь I абелева интеграла. Из теорем конечности п. 4 вытекает, что число компонент комплексной поверхности уровня $I = c$ этой функции конечно и ограничено единой константой, не зависящей от выбора уровня c. Теорема о комплексных абелевых интегралах приводится в п. 5. Эта теорема возникла в результате обдумывания аналогичного результата А. Н. Варченко о вещественных абелевых интегралах [8]. Статья [8] побудила меня повторить конструкцию многообразий Пфаффа, используя уравнения Пфаффа не только с полиномиальными, но и с аналитическими коэффициентами.

Я признателен В. И. Арнольду, А. Н. Варченко, А. М. Габриэлову и Е. И. Коркиной за многочисленные полезные обсуждения.

1. Разделяющие решения уравнений Пфаффа

Пусть M — гладкое многообразие (возможно несвязное и неориентируемое) и α — 1-форма на нем. Важную роль для дальнейшего играет следующее

О п р е д е л е н и е. Подмногообразие коразмерности один в M называется *разделяющим решением уравнения Пфаффа* $\alpha = 0$, если: а) ограничение формы α на подмногообразие тождественно равно нулю; б) подмногообразие не проходит через особые точки уравнения (т. е. в каждой точке подмногообразия форма α в касательном пространстве к M не обращается в нуль), в) подмногообразие является границей области в M, причем коориентация, определенная формой, совпадает с коориентацией границы области (т. е. на векторах, приложенных в точках подмногообразия и выходящих из области, форма α положительна).

П р и м е р. Неособая поверхность уровня $H = c$ функции H является разделяющим решением уравнения Пфаффа $dH = 0$ (она ограничивает область $H < c$).

Для разделяющих решений справедлив следующий вариант теоремы Ролля.

У т в е р ж д е н и е 1. *Между двумя точками пересечения связной гладкой кривой с разделяющим решением уравнения Пфаффа есть точка контакта, т. е. точка, в которой касательный вектор к кривой лежит в гиперплоскости* $\alpha = 0$.

В полном объеме это утверждение нам не понадобится. Докажем лишь следующую лемму.

Л е м м а 1. *Утверждение 1 справедливо, если кривая пересекает разделяющее решение трансверсально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соседних точках пересечения значения формы α на касательных векторах кривой, направленных по ее ориентации, имеют разные знаки. Поэтому форма α обращается в нуль в некоторой промежуточной точке.

З а м е ч а н и е. Если в условиях утверждения 1 уравнение Пфаффа вполне интегрируемо, то можно отказаться от требования гладкости кривой. *Достаточно лишь требовать, чтобы кривая в каждой точке имела касательный вектор.* Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши получаются из этого утверждения в случае, когда многообразие является плоскостью, а уравнение Пфаффа определяет на ней семейство параллельных прямых.

С л е д с т в и е 1. *Пусть в условиях леммы 1 кривая имеет B некомпактных компонент связности и N точек контакта с распределением $\alpha = 0$. Тогда число точек пересечения кривой с разделяющим решением не превосходит $N + B$.* (В условиях следствия 1 число компактных компонент кривой никак не ограничивается и может быть бесконечным).

Следствие 1 является основой для всех оценок этого параграфа. Условие контакта кривой с распределением может оказаться очень вырожденным. Формулируемое ниже утверждение 2 позволяет шевелить условие контакта. Она доставляет вариант следствия 1, более удобный для применения.

Сначала несколько определений и лемм. Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — гладкое отображение многообразий одинаковой размерности. *Верхним числом прообразов* (в.ч.п.) точки $a \in N^n$ называется наименьшее число C, для которого можно указать окрестность точки a, в которой все регулярные значения отображения f имеют не больше чем C прообразов.

Л е м м а 2. *Пусть у точки $a \in N^n$ существует в.ч.п., равное C, тогда:* 1) *у всех достаточно близких к a точек существует в.ч.п. и оно $\leqslant C$;* 2) *число невырожденных прообразов точки a не превосходит C.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Очевидно. 2) Пусть среди прообразов точки a есть $C + 1$ невырожденный прообраз. Тогда по теореме о неявной функции близкие к a точки имеют по меньшей мере $C + 1$ прообраз.

Гладкую положительную функцию ρ на M назовем *выстилающей*, если она стремится к нулю на «бесконечности» в M, т. е. если отображение $\rho^{-1}\colon M \to \mathbf{R}^1$ собственно. С гладким отображением F n-мерного многообразия M^n в $(n-1)$-мерное многообразие N^{n-1} свяжем отображение $F_\infty\colon M^n \to N^{n-1} \times \mathbf{R}^1$, определенное формулой $F_\infty = (F, \rho)$.

Лемма 3. *Пусть в.ч.п. точки* $(a, 0) \in N^{n-1} \times \mathbf{R}^1$ *для отображения* F_∞ *существует и не превосходит* $2B$. *Тогда прообраз любого достаточно близкого к* a *регулярного значения отображения* F *является гладкой кривой, имеющей не более* B *некомпактных компонент.*

Доказательство. На каждой некомпактной компоненте кривой функция $\rho - \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, имеет не менее двух нулей. Дальше доказательство заканчивается как в лемме 2.

Пусть на многообразиях M^n и N^{n-1} фиксированы формы объема v^n и w^{n-1}. Обозначим через $*$ отображение n-форм на M в функции, определенное соотношением $(*\tau^n)\, v^n = \tau^n$. Пусть $\alpha = 0$ — уравнение Пфаффа на M^n и Γ — его разделяющее решение. С гладким отображением $F\colon M^n \to N^{n-1}$ свяжем два отображения из M^n в $N^{n-1} \times \mathbf{R}^1$: первое отображение $F_\infty = (F, \rho)$ и второе отображение $F_\alpha = (F, *(\alpha \wedge F^* w^{n-1}))$.

Утверждение 2. *Пусть в.ч.п. точки* $(a, 0) \in N^{n-1} \times \mathbf{R}^1$ *для отображений* F_∞ *и* F_α *существуют и не превосходят соответственно* $2B$ *и* N. *Тогда в.ч.п. точки* $a \in N^{n-1}$ *для ограничения отображения* F *на разделяющее решение* Γ *существует и не превосходит* $N + B$.

Доказательство. Пусть точка b является регулярным значением как для отображения F, так и для его ограничения на разделяющее решение Γ. Тогда в двух последовательных точках пересечения кривой $F^{-1}(b)$ с разделяющим решением Γ функция $*(\alpha \wedge F^* w^{n-1})$ принимает значения разных знаков. На участке кривой, лежащей между двумя последовательными пересечениями, она принимает все промежуточные значения. Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 3 и леммой 2.

Замечание. Утверждение 2 дает оценку в.ч.п. точки $a \in N^{n-1}$ для отображения $F|_\Gamma$, не зависящую от выбора разделяющего решения Γ уравнения $\alpha = 0$.

Определение. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — упорядоченный набор 1-форм на многообразии M. Скажем, что подмногообразие $\Gamma \subset M$ является *разделяющим решением* упорядоченной *системы уравнений Пфаффа* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, если существует цепочка подмногообразий $M = \Gamma_0 \supset \ldots \supset \Gamma_k = \Gamma$, в которой каждое следующее многообразие Γ_i является разделяющим решением уравнения Пфаффа $\alpha_i = 0$ на предыдущем многообразии Γ_{i-1}, причем первое многообразие совпадает с M, последнее — с Γ.

Пусть на многообразии M^n фиксирована выстилающая функция ρ и форма объема v^n вместе с соответствующей операцией $*$. Пусть на многообразии M задана упорядоченная система из k уравнений Пфаффа $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Рассмотрим гладкое отображение F многообразия M^n в гладкое $(n-k)$-мерное многообразие N^{n-k} с формой объема w^{n-k}. Ниже описывается конструкция, сопоставляющая каждому отображению F из M^n в N^{n-k} набор из 2^k отображений M^n в $N^{n-k}\,\mathbf{R}^k$. Конструкция зависит от следующих данных: от форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, задающих систему уравнений Пфаффа; от форм объема на M^n и N^{n-k}, от отображения F и от выстилающей функции ρ. При этом выполняется следующая

Теорема 1. *Для любого разделяющего решения* Γ *системы уравнений Пфаффа и для любой точки* $a \in N^{n-k}$ *в.ч.п. точки* a *для ограничения отображения* F *на* Γ *явно оценивается через набор из* 2^k *в.ч.п. точки* $(a, 0) \in N^{n-k} \times \mathbf{R}^k$ *для сконструированных ниже* 2^k *отображений из* M^n *в* $N^{n-k} \times \mathbf{R}^k$. *Оценка содержательна, если все* 2^k *в.ч.п. существуют. Она не зависит от выбора разделяющего решения* Γ *системы уравнений Пфаффа.*

Доказательство теоремы заключается в предъявлении набора отображений и в ссылке на утверждение 2. И то и другое делается пошагово. На каждом шаге число уравнений Пфаффа уменьшается на единицу. По условию многообразие Γ является разделяющим решением уравнения $\alpha_k = 0$ на многообразии Γ_{k-1}. На этом многообразии ограничение функции ρ является выстилающей функцией, а форма $v^n/\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1}$ является формой объема. Операция $\tilde{*}$ для этой формы определяется соотношением $\tilde{*}\, \tau^{n-k+1} = *\,(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-n} \wedge \tau^{n-k+1})\,|_\Gamma$. Согласно утверждению 2, в.ч.п. точки a для отображения $F\,|_\Gamma\colon \Gamma \to N^{n-k}$ оценивается через в.ч.п. точки $(a, 0)$ в $N^{n-k} \times \mathbf{R}^1$ следующих двух отображений: для ограничения на Γ_{k-1} отображения (F, ρ) и для ограничения на Γ_{k-1} отображения $(F, *\,(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1} \wedge F^* w^{n-k}))$. Этот процесс нужно продолжить. Для оценки в.ч.п. точки $(a, 0) \in N^{n-k} \times \mathbf{R}^1$ для каждого из двух построенных отображений Γ_{k-1} в $N^{n-k} \times \mathbf{R}^1$ нужно построить по два отображения Γ_{k-2} в $N^{n-k} \times \mathbf{R}^2$ и воспользоваться утверждением 2 и т. д.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 1 многообразия M^n и N^{n-k} суть $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^{n-k}$, формы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ имеют полиномиальные коэффициенты (т. е. $\alpha_i = \sum P_{ij} dx_j$, где P_{ij} — полиномы) и отображение F полиномиально. Тогда верхнее число прообразов, фигурирующее в теореме 1, существует и явно оценивается через степени полиномов, являющихся коэффициентами форм α_i и компонентами отображения F.*

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 1, выбрав стандартные формы объема в $\mathbf{R}^n$ и в $\mathbf{R}^{n-k}$ и выстилающую функцию $\rho = 1/(1 + \Sigma x_i^2)$. Теорема 1 сводит оценку числа решений трансцендентной системы уравнений к оценке числа решений 2^k полиномиальных уравнений, которую в свою очередь можно получить из теоремы Безу.

Применения следствия 2 можно найти в [3—7]. В следующем пункте описывается другая ситуация, в которой теорема 1 доказывает лишь существование оценок, но не может дать их явного вида.

2. Разделяющие решения на неособых полуаналитических множествах

С аналитическим многообразием M, являющимся полуаналитическим множеством в вещественном проективном пространстве, свяжем кольцо $\mathfrak{A}_M$ функций, аналитических на M и мероморфно продолжающихся на $\bar{M}$ (т. е. $f \in \mathfrak{A}_M$, если у каждой точки из $\bar{M}$ найдется окрестность в проективном пространстве и мероморфная функция в этой окрестности, ограничение которой на M совпадает с f). С кольцом $\mathfrak{A}_M$ свяжем алгебру Ω_M внешних форм, порожденную функциями из кольца $\mathfrak{A}_M$ и их дифференциалами.

Определение. Аналитическое многообразие $M \subseteq \mathbf{R}P^N$ назовем *простым*, если: 1) M является полуаналитическим множеством в $\mathbf{R}P^N$; 2) кольцо $\mathfrak{A}_M$ содержит выстилающую функцию, т. е. положительную функцию на M, которая при стремлении к границе стремится к нулю; 3) на M существует такая форма объема, что отношение любой формы старшей степени из Ω_M к этой форме объема является функцией из $\mathfrak{A}_M$.

Пример. 1) Пространство $\mathbf{R}^N$, стандартно вложенное в $\mathbf{R}P^N$, доставляет простейший пример простого многообразия. Кольцо $\mathfrak{A}_{\mathbf{R}^N}$ содержит все рациональные функции на $\mathbf{R}^N$. 2) Произведение двух простых многообразий является простым многообразием (при любом алгебраическом вложении произведения проективных пространств в проективное пространство).

Теорема 2. *Пусть на простом n-мерном аналитическом многообразии M задана система уравнений Пфаффа $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, где α_i — 1-формы из Ω_M. Пусть, кроме того, фиксировано $n - k$ функций $f_1, \ldots, f_{n-k}$ из кольца $\mathfrak{A}_M$. Тогда существует такое число C, что для любого разделяющего решения Γ системы уравнений Пфаффа и для любых параметров $a_1, \ldots, a_{n-k}$ система уравнений $f_1 = a_1, \ldots, f_{n-k} = a_{n-k}$ имеет не более C невырожденных решений на Γ.*

Доказательство. Если уравнение Пфаффа нет вообще (т. е. если $k = 0$), то теорема 2 вытекает из теоремы Габриэлова [2]. Теорема 1 из п. 1 сводит общий случай к рассмотренному.

Замечание. Теорема Габриэлова в свою очередь допускает доказательство методом п. 1. Требуется лишь незначительная его модификация. В п. 1 мы избавляемся от особенностей малыми шевелениями. Вместо этого нужно рассматривать особые аналитические множества и их стратификации. Я рассчитываю вернуться к этому вопросу в одной из следующих публикаций.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 2 функции f_i полиномиально зависят от параметров. Тогда существует оценка числа решений системы, не зависящая от выбора параметров.*

Для доказательства достаточно применить теорему 1 к произведению многообразия на пространство параметров $\mathbf{R}^N$, системе уравнений Пфаффа $\pi_1^*\alpha_1 = \ldots = \pi_1^*\alpha_k = 0$ и набору функций $\pi_1^* f_1, \ldots, \pi_1^* f_{n-k}, \pi_2^* b_1, \ldots$ $\ldots, \pi_2^* b_N$. Здесь π_1, π_2 — проекции декартова произведения на первый и второй сомножители, b_j — координатные функции в $\mathbf{R}^N$.

Теоремы 2 достаточно для большинства приложений. Например, из нее вытекает центральное техническое утверждение (лемма 1 п. 3) статья [8]. Наша дальнейшая цель — построение категории многообразий, в которой работает эта теорема.

Остановимся на некоторых свойствах простых многообразий.

Конечное множество из N функций на многообразии назовем разделяющим, если эти функции задают вложение (без самопересечений и особенностей) многообразия в $\mathbf{R}^N$.

Утверждение 1. *Кольцо $\mathfrak{A}_M$ всякого простого многообразия содержит разделяющие множества.*

Доказательство. Вещественное проективное пространство вкладывается в $\mathbf{R}^N$.

Аффинной областью в простом многообразии называется область, выделенная условием $f \neq 0$, где $f \in \mathfrak{A}_M$.

Утверждение 2. 1) *Объединение и пересечение конечного числа аффинных областей является аффинной областью.* 2) *Дополнение к нулям формы из Ω_M является аффинной областью.* 3) *Каждая аффинная область $U \subseteq M \subseteq \mathbf{R}P^N$ является простым подмногообразием в $\mathbf{R}P^N$.*

Доказательство. Сумма квадратов функций обращается в нуль ровно в тех точках, где все функции равны нулю. Это доказывает, что объединение аффинных областей есть афинная область. Остальные утверждения доказываются столь же просто.

3. Многообразия Пфаффа

Определение. Аналитическое подмногообразие X коразмерности k в простом аналитическом многообразии M называется *простым подмногообразием Пфаффа*, если существует конечный набор аффинных областей U_i и конечный набор 1-форм $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik} \in \Omega_M$ такой, что

1) в области U_i существует разделяющее решение X_i системы уравнений Пфаффа $\alpha_{i1} = \ldots = \alpha_{ik} = 0$ такое, что пересечение подмногообразия X с областью U_i состоит из компонент связности многообразия X_i;

2) области U_i покрывают X.

Определение. Система уравнений определяет подмногообразие *некратным образом*, если 1) она определяет подмногообразие; 2) всякий ковектор, обращающийся в нуль на касательном пространстве к подмногообразию, является линейной комбинацией дифференциалов уравнений.

Утверждение 1. *Подмногообразие Y коразмерности m, некратно определенное конечной системой уравнений $f_1 = \ldots = f_N = 0$, $f_i \in \mathfrak{A}_M$ в подмногообразии Пфаффа $X \subseteq M$, является подмногообразием Пфаффа в M.*

Доказательство. Пусть U_i — покрытие, фигурирующее в определении подмногообразия Пфаффа X. С номером i и возрастающим набором индексов $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$, $1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_m \leqslant N$ свяжем область $U_{i,J}$, в которой форма $\alpha_{i1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{ik} \wedge df_{j_1} \wedge \ldots \wedge df_{j_m}$ не обращается в нуль. В этой области многообразие, определенное в X уравнениями $f_{j_1} = \ldots = f_{j_m} = 0$, является разделяющим решением системы $\alpha_{i1} = \ldots = \alpha_{ik} = df_{j_1} = \ldots = df_{j_m} = 0$ (при условии, что $m > 0$), а многообразие $Y \cap U_{i,J}$ состоит из его компонент связности.

Так же проверяется

Утверждение 2. *Произведение простых подмногообразий Пфаффа в простых многообразиях M_1 и M_2 является простым подмногообразием Пфаффа* в $M_1 \times M_2$.

Определение. 1) Аналитическое многообразие X вместе с кольцом аналитических функций $\mathfrak{A}_X$ назовем *простым многообразием Пфаффа*, а функции кольца $\mathfrak{A}_X$ — *простыми функциями*, если существует вложение π многообразия X в простое аналитическое многообразие M такое, что $\pi(X)$ является простым подмногообразием Пфаффа в M, а кольцо $\mathfrak{A}_X$ индуцируется из кольца $\mathfrak{A}_M$ при вложении π. 2) Отображение одного простого многообразия Пфаффа в другое назовем *простым отображением*, если оно индуцирует гомоморфизм колец простых функций.

Композиция простых отображений является простым отображением. Однако отображение, обратное к простому, вообще говоря, не является простым. Нашей ближайшей целью является расширение колец функций на простых многообразиях Пфаффа с помощью добавления обратных отображений.

Определение. 1) Пусть M_1 и M_2 — два простых многообразия Пфаффа. *Отображение* f: $M_1 \to M_2$ мы назовем *допустимым*, если существует простое многообразие Пфаффа M и его простые отображения π_1: $M \to M_1$ и π_2: $M \to M_2$ такие, что проекция π_1 осуществляет аналитический диффеоморфизм между M и M_1, а $f = \pi_2\pi_1^{-1}$.

2) Функцию f: $M_1 \in \mathbf{R}^1$ на простом многообразии Пфаффа назовем *допустимой*, если существует простое многообразие Пфаффа M, его простое отображение π_1: $M \to M_1$ и простая функция g: $M \to \mathbf{R}^1$ такие, что π_1 — аналитический диффеоморфизм и $f = g\pi_1^{-1}$.

3) Многообразие M с проекцией π_1: $M \to M_1$, фигурирующее в 1), 2), назовем *разрешением* соответствующего *отображения* или *функции*.

Утверждение 3. *Конечное число допустимых функций и отображений имеют общее разрешение* (т. е. существует единое многообразие M с проекцией π_1: $M \to M_1$, на котором фиксированное конечное число допустимых функций и отображений многообразия становятся простыми).

Следствие 1. *На простом многообразии Пфаффа допустимые функции образуют кольцо.*

Доказательство следствия. Любые две допустимые функции можно рассматривать на общем разрешении. На этом разрешении над функциями можно производить арифметические операции.

Доказательство утверждения 3, а также всех остальных утверждений настоящего параграфа основано на сформулированном ниже легко проверяемом утверждении 4.

Пусть M_1, M_2, M_3 — гладкие многообразия и π_1: $M_1 \to M_3$, π_2: $M_2 \to M_3$ — гладкие отображения, образы которых трансверсально пересекаются в M_3 (т. е. если $\pi_1(a) = \pi_1(b) = c$, то образы касательных пространств в точках a и b к M_1 и M_2 порождают касательное пространство к M_3 в точке c).

Утверждение 4. *Множество точек* $(a, b) \in M_1 \times M_2$, *для которых* $\pi_1(a) = \pi_2(b)$ *является гладким подмногообразием. Далее, для лю-*

бого конечного разделяющего множества функций $\{f_i\}$ на M_3 система уравнений $\pi_1^* f_i(a) = \pi_2^* f_i(b)$ в $M_1 \times M_2$ определяет это подмногообразие некоторым образом.

Для доказательства утверждения 3 нужно вместе с двумя разрешениями π_1: $M_1 \to M$ и π_2: $M_2 \to M$ рассмотреть разрешение π: $\Gamma \to M$, где Γ — подмногообразие в $M_1 \times M_2$, определенное условием $\pi_1(a) = \pi_2(b)$, а π — проекция, определенная условием $\pi = \pi_1\rho_1 = \pi_2\rho_2$, где ρ_i — проекции произведения $M_1 \times M_2$ на сомножители. Утверждения 1 и 4 гарантируют, что π является разрешением.

Утверждение 5. *Пусть $\{f_i\}$ — конечное разделяющее множество допустимых функций на простом многообразии Пфаффа M. Отображение g простого многообразия Пфаффа K в M является допустимым, если и только если допустимы все функции $\{g^* f_i\}$.*

Доказательство. Пусть π: $\tilde{M} \to M$ — разрешение для функций $\{f_i\}$ и ρ: $\tilde{K} \to K$ — разрешение для функций $\{g^* f_i\}$. Подмногообразие в $\tilde{K} \times \tilde{M}$, определенное условием $g\rho(a) = \pi(b)$, вместе с проекцией его на K задает разрешение для отображения g: $K \to M$.

Утверждение 6. *Отображение одного простого многообразия Пфаффа в другое является допустимым, если и только если оно индуцирует гомоморфизм колец допустимых функций.*

Доказательство. Если к разделяющему множеству функций добавить еще одну функцию, то множество останется разделяющим. Поэтому утверждение 5 вытекает из утверждения 4.

Следствие 2. *Композиция допустимых отображений является допустимым отображением.*

Определение. *Область* на простом многообразии Пфаффа называется *допустимой*, если она является диффеоморфным образом при допустимом отображении некоторого простого многообразия Пфаффа. Это многообразие вместе с диффеоморфизмом называется *разрешением допустимой области. Отображение* или *функция на допустимой области* называются *допустимыми*, если они становятся допустимыми на разрешении области.

Утверждение 7. *Пересечение конечного числа допустимых областей является допустимой областью.*

Доказательство утверждения 7 повторяет доказательство утверждения 3.

Теперь все готово для определения многообразия Пфаффа как результата склейки простых многообразий Пфаффа.

Определение. *Атласом Пфаффа* на гладком многообразии M называется его конечное открытое покрытие $M = \bigcup U_i$ вместе с диффеоморфизмами φ_i областей U_i в простые многообразия Пфаффа такими, что для всех i, j область определения диффеоморфизма $\varphi_i\varphi_j^{-1}$ является допустимой областью, а диффеоморфизм является допустимым отображением. *Два атласа* называются *эквивалентными*, если их объединение является атласом. *Структура многообразия Пфаффа* — это совокупность эквивалентных атласов.

Область Пфаффа — это такая область на многообразии Пфаффа, которая в каждой карте некоторого атласа является допустимой. Аналогично определяются *отображения* и *функции Пфаффа. Форма Пфаффа* — это такая форма, которая в каждой карте некоторого атласа лежит во внешней алгебре, порожденной функциями Пфаффа и их дифференциалами. *Векторное поле Пфаффа* — это дифференцирование кольца функций Пфаффа (не выводящее из этого кольца).

Перечислим некоторые свойства многообразий Пфаффа.

1. Вещественное алгебраическое многообразие обладает единственной структурой многообразия Пфаффа, совместной с алгебраической структу-

рой (т. е. такой, что среди областей Пфаффа содержатся все полуалгебраические области, а среди функций Пфаффа — все алгебраические функции).

2. Многообразие неособых точек полуаналитического множества обладает единственной структурой многообразия Пфаффа, совместной с аналитической структурой (т. е. такой, что среди областей Пфаффа содержатся все полуаналитические области, а среди функций Пфаффа — все аналитические функции, мероморфно продолжающиеся на границу области).

3. Касательное и кокасательное расслоение над многообразием Пфаффа и их тензорные произведения, декартовы произведения нескольких многообразий Пфаффа, пространства струй отображений одного многообразия Пфаффа в другое, обладают естественной структурой многообразий Пфаффа.

4. Дополнение до множества нулей некоторой функции Пфаффа или формы Пфаффа, дополнение до прообраза точки при отображении Пфаффа являются областями Пфаффа. Объединение и пересечение конечного числа областей Пфаффа, одна или несколько компонент связности области Пфаффа, являются областями Пфаффа.

5. Прообраз регулярного значения при отображении Пфаффа, подмногообразие, определенное некратным образом как пересечение нулевых поверхностей уровня конечного числа функций Пфаффа, являются подмногообразиями Пфаффа.

6. Подмногообразие, являющееся разделяющим решением системы уравнений $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, в котором α_i — формы Пфаффа, одна или несколько компонент такого подмногообразия, а также подмногообразие, допускающее описанное представление в каждой карте некоторого атласа Пфаффа, являются подмногообразиями Пфаффа.

7. Композиции отображений Пфаффа, их струйные расширения являются отображениями Пфаффа. Если график некоторого отображения одного многообразия Пфаффа в другое является подмногообразием Пфаффа в их декартовом произведении, то отображение является отображением Пфаффа. Если существует аналитическое обращение отображения Пфаффа, то оно является отображением Пфаффа.

Замечание. Конструкция многообразий Пфаффа из простых многообразий Пфаффа осуществлялась в два шага. На первом шаге расширялся запас допустимых функций на простых многообразиях при помощи обращения отображений, являющихся диффеоморфизмами. На втором шаге проводилась обычная склейка (склеивались простые многообразия с расширенным запасом функций). Оба шага конструкции можно применять к другому начальному запасу многообразий. Например, если начать с вещественных аффинных алгебраических многообразий, то среди склеенных объектов будут, например, находиться все вещественные алгебраические многообразия, а среди допустимых отображений — однозначные ветви над вещественными многообразиями многозначных алгебраических отображений. Вот другой пример. Вместо простых аналитических многообразий можно взять многообразие $\mathbf{R}^n$ с кольцом полиномов, вместо простых многообразий Пфаффа — разделяющие решения уравнений Пфаффа с полиномиальными 1-формами в $\mathbf{R}^n$. В результате применения двух шагов конструкции получится другая категория многообразий Пфаффа. В этой категории доказывается не только конечность компонент связности многообразия и т. д. (см. следующий пункт), а даются явные оценки сверху числа компонент связности и т. д. Подробнее об этой категории можно прочесть в [3, 7].

4. Теоремы конечности

Реализацией распределения линейных подпространств в касательном расслоении к многообразию Пфаффа называется выбор конечного покрытия многообразия областями Пфаффа вместе с заданием распределения в каждой области системой уравнений $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, где α_i — пфаффовы 1-формы (свои для каждой области). Интегральное многообразие распределения назовем *слоем, согласованным с реализацией*, если в каждой области покрытия оно состоит из компонент связности некоторого разделяющего решения соответствующей системы уравнений $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Пример. Пусть g — отображение Пфаффа многообразия в k-мерное многообразие. С отображением связано распределение, сопоставляющее каждой точке ядро дифференциала отображения. Ниже описывается реализация этого распределения, с которой согласованы все слои, являющиеся прообразами регулярных значений отображения. Покроем многообразие-образ конечным числом простых многообразий Пфаффа и в каждом из них выберем конечное разделяющее множество функций $\{f_i\}$. Каждое простое многообразие в свою очередь покроем областями U_I, где $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ — множество из k индексов, U_I — дополнение до нулей формы $\omega_I = df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}$. Покрытие многообразия-прообраза областями $g^{-1}U_I$, в каждой из которых фиксирована система $df_{i_1} = \ldots = df_{i_k} = 0$ и задает нужную реализацию распределения ядер дифференциала отображения g.

Теорема 3. *Пусть на пфаффовом многообразии, обладающем некоторым собственным вложением Пфаффа в* $\mathbf{R}^N$, *задано распределение с фиксированной реализацией. Тогда существует число C такое, что каждый слой распределения, согласованный с реализацией, имеет гомотопический тип клеточного комплекса, в котором число клеток* $\leqslant C$.

Следствие 1. *Пусть многообразие Пфаффа допускает собственное вложение Пфаффа в* $\mathbf{R}^N$. *Тогда сумма чисел Бетти многообразия конечна. Далее, для всякого отображения Пфаффа этого многообразия сумма чисел Бетти прообраза любого регулярного значения отображения равномерно ограничена* (вне зависимости от выбора регулярного значения).

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию $\varphi_a = \sum (f_i - a_i)^2$, где f_i — координатные функции, задающие собственное вложение многообразия в $\mathbf{R}^N$, и $a = (a_1, \ldots, a_N)$ — точка в $\mathbf{R}^N$. Согласно теории Морса [9], нам достаточно найти равномерную оценку числа невырожденных критических точек ограничения функции φ_a на слой распределения, не зависящую от выбора параметра a и слоя.

Для этого достаточно оценить число критических точек на части слоя, лежащей в области Пфаффа, в которой: 1) существует форма объема, равная $dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_m$, где m — размерность многообразия и g_i — некоторые функции Пфаффа в области; 2) существует выстилающая функция Пфаффа; 3) распределение задается системой уравнений $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. В критической точке ограничения φ_a на слой форма $\omega_a = d\varphi_a \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ обращается в нуль. Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ — множество из p положительных возрастающих индексов, где p — размерность слоя (т. е. $p + k = m$) и $i_p \leqslant m$. С множеством I свяжем систему уравнений $h_1 = \ldots = h_p = 0$ на разделяющем решении системы $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, где $h_j = * (\omega_a \wedge df_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{df}_{i_j} \wedge \ldots \wedge df_{i_p})$. Здесь отображение $*$ построено по форме объема в области, а значок ^ над дифференциалом функции df_{i_j} означает, что этот дифференциал в произведение не входит. Морсовская критическая точка ограничения функции на слой является невырожденным решением одной из построенных систем уравнений. Теперь теорема 3 вытекает из следствия 1 п. 2.

Теорема 4. *Число компонент связности прообраза любой точки при отображении Пфаффа конечно и допускает равномерную оценку, не зависящую от выбора точки в образе.*

Доказательство. Достаточно равномерно оценить в простом многообразии Пфаффа M число компонент связности множества решений системы уравнений $f_1 = a_1, \ldots, f_k = a_k$, где f_i — функция Пфаффа, a_i —

параметры. Для этого рассмотрим в многообразии $M \times \mathbf{R}^1$ множество, определенное системой $u(\rho - \varepsilon_1) = r$, $\sum (f_i - a_i)^2 = \varepsilon_2$, где u — координатная функция в $\mathbf{R}^1$, ε_1, ε_2, r — неотрицательные числа, ρ — выстилающая функция на M. Для почти всех r, ε_2 система определяет гладкое многообразие. Согласно теореме 3, сумма чисел Бетти этого многообразия в независимости от выбора параметров a_i, ε_j, r ограничено некоторым числом C. Используя компактность подмножества в M, определенного неравенством $\rho \geqslant \varepsilon_1 > 0$, и простые соображения общей топологии, легко показать, что оцениваемое число компонент связности не превосходит C.

5. Абелевы интегралы

Пусть X и Λ — неособые комплексные квазипроективные алгебраические многообразия, $\pi : X \to \Lambda$ — регулярное на X рациональное отображение, являющееся топологическим локально тривиальным расслоением. Фиксируем регулярную рациональную r-форму на X, замкнутую на любом слое расслоения. Интеграл такой формы по r-мерному циклу, лежащему в слое и непрерывно меняющемуся при переходе от слоя к слою, является многозначной аналитической функцией на базе Λ, параметризующей слои. Такие комплексно аналитические функции на Λ называются многозначными абелевыми функциями. Алгебраическая функция доставляет пример абелевой функции (X и Λ могут иметь одинаковую размерность, цикл может быть точкой, а форма — функцией). Однозначной абелевой функцией называется ветвь многозначной абелевой функции над некоторой фиксированной областью $U \subset \Lambda$, являющейся вещественно-полуалгебраическим множеством (при рассмотрении комплексного многообразия Λ как вещественного многообразия вдвое большей размерности). Подчеркнем, что в определение однозначной абелевой функции входит фиксация области, на которой она рассматривается. Абелевым отображением в $\mathbf{C}^N$ вещественной полуалгебраической области U комплексного многообразия называется отображение, все компоненты которого однозначные абелевы функции. Пусть образ области U при абелевом отображении f лежит в алгебраическом многообразии (это многообразие может совпадать с $\mathbf{C}^N$), в некоторой области V которого задано абелево отображение g. Тогда в области $f^{-1}(V) \cap U$ определена суперпозиция абелевых отображений. Продолжая этот процесс можно строить суперпозиции абелевых отображений вместе с их областями определения.

Теорема 5. *Прообраз любой точки для суперпозиции абелевых отображений имеет конечное число компонент связности (в области определения суперпозиции). Это число ограничено единой константой, не зависящей от выбора точки в многообразии — образе.*

Доказательство. Из локального описания абелевых функций, проведенного в статье [8], вытекает, что овеществление абелева отображения является отображением Пфаффа. Поэтому теорема 5 вытекает из теоремы 4. Наметим вывод пфаффовости абелева отображения из его локального описания. Рассмотрим плоскость комплексного переменного z, разрезанную, например, по лучу отрицательных вещественных чисел. Овеществление ветви функции $\ln z$ в разрезанной плоскости является отображением Пфаффа. Действительно, $\operatorname{Re} \ln z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{Im} \ln z = \operatorname{arctg} y/x + 2k\pi$, где $z = x + iy$. Логарифм, корень и арктангенс — простейшие функции Пфаффа. Овеществление ветви функции z^α является отображением Пфаффа, если и только если α является вещественным числом (при вещественном α вещественная и мнимая часть функции z^α выражаются через вещественную степенную функцию и арктангенс, при комплексном α к этим функциям добавляются функции типа $\sin \ln x$, осциирующие около нуля).

Согласно [8], локально абелева функция на некотором разрешении выражается через аналитические функции, логарифмы и функции z^{α} при рациональных α. Поэтому ее овеществление является отображением Пфаффа.

Замечание 1. Рассмотрим одномерный комплексный диск, пересекающий многообразие ветвления многозначной абелевой функции в одной точке. С обходом вокруг этой точки в диске связан оператор монодромии. Вещественность показателей α эквивалентна тому, что все собственные числа оператора монодромии лежат на единичной окружности. Именно это свойство абелевых функций [10, 11] отвечает за их свойства конечности. В теореме 5 вместо абелевых функций можно было бы рассматривать более общие функции, удовлетворяющие уравнениям типа Фукса, для которых собственные числа операторов локальной монодромии лежат на единичной окружности.

Замечание 2. Однозначную вещественно-аналитическую ветвь вещественной или мнимой части многозначной абелевой функции можно рассматривать над подмногообразиями Пфаффа и, в частности, над полуалгебраическими областями вещественно алгебраических подмногообразий. Для таких однозначных ветвей абелевых функций и их суперпозиций справедливо утверждение теоремы 5 (его доказательство остается прежним). Теорема 5 в этой расширенной формулировке содержит результат статьи [8].

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Lojasiewics S.* Ensembles semi-analytiques. I. H. E. S., Bures-sur-Ivette, 1965.
2. *Габриэлов А. М.* О проекциях полуалгебраических множеств.— Функц. анализ, 1970, т. 4, вып. 2, с. 18—22.
3. *Хованский А. Г.* Об одном классе систем трансцендентных уравнений.— ДАН СССР, 1980, т. 255, № 4, с. 804—807.
4. *Khovanski A.* Theorem de Bezout pour les functions de Liouville. Preprint M/81/45 — IHES.— Bures-sur-Ivette: IHES.
5. *Hovansky A.* Sur les Racines complexes de systèmes d'equations algebriques ayant un petit nombre de monomes.— C. R. Acad. Sc., 1981, t. 292, s. I, p. 937—940.
6. *Хованский А. Г.* Циклы динамических систем и теорема Ролля.— Сиб. матем. ж. (1984), т. XXV, № 3, с. 198—203.
7. *Khovansky A. G.* Fewnomials and Pfaff manifolds. — Proc. of Intern. Congr. of Math., Warsaw, 1983.
8. *Варченко А. Н.* Оценка числа нулей вещественного абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы.— Функц. анализ, 1984, т. 18, вып. 2, 14—25.
9. *Милнор Дж.* Теория Морса.— М.: Мир, 1965.
10. *Брискорн Э.* Монодромия изолированных особенностей.— Математика, 1971, т. 15, вып. 4, с. 130—160.
11. *Deligne P.* Equations differentielles a points singuliers reguliers.— Lect. Notes Math., 1970, v. 163.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт системных исследований
ГКНТ и АН СССР

Поступила в редакцию
24 ноября 1983 г.