MORSE THEORY

by

J. MILNOR

Based on lecture notes by
M. SPIVAK and R. WELLS

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1963

513,83
M60

1969 г.

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА"

Дж. МИЛНОР

ТЕОРИЯ МОРСА

Перевод с английского
В. И. АРНОЛЬДА

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1965

Но $V-(V\cap P)$ — неособое алгебраическое подмногообразие в аффинном пространстве CP_n-P. Поэтому из 7.2 вытекает, что последняя группа при $r\leqslant k-1$ равна нулю, что и требовалось доказать.

Утверждение 7.3 допускает следующее уточнение.

Теорема 7.4 (Лефшец). *В предположениях следствия 7.3 относительная гомотопическая группа $\pi_r(V, V\cap P)$ равна нулю при $r<k$.*

Доказательство. Доказательство основано на предположении, что некоторую окрестность U пересечения $V\cap P$ можно деформировать в $V\cap P$ внутри V. Это можно доказать, например, с помощью теоремы, утверждающей, что всякое алгебраическое многообразие триангулируемо[1]).

Вместо функции $L_p: V-(V\cap P)\to \mathbf{R}$ мы используем $f:V\to\mathbf{R}$, где

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\in V\cap P,\\ 1/L_p(x) & \text{при } x\notin P.\end{cases}$$

Так как критические точки L_p имеют индекс, не превосходящий k, индекс критических точек f не меньше, чем $2k-k=k$. Функция f не имеет вырожденных критических точек, в которых $\varepsilon\leqslant f<\infty$. Следовательно, V имеет гомотопический тип $V^\varepsilon=f^{-1}[0, \varepsilon]$ с конечным числом приклеенных клеток размерности не меньше k.

Выберем ε столь малым, что $V^\varepsilon\subset U$. Обозначим через I^r единичный r-куб. Тогда каждое отображение пары $(I^r, \dot I^r)$ в $(V, V\cap P)$ можно деформировать в отображение

$$(I^r, \dot I^r)\to(V^\varepsilon, V\cap P)\subset(U, V\cap P),$$

так как $r<k$; стало быть, можно его деформировать в отображение в $V\cap P$. Это завершает доказательство.

[1]) См. Van der Waerden B. L., Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939, приложение к гл. 4. — *Прим. перев.*

Глава II

КРАТКИЙ КУРС РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 8. Ковариантное дифференцирование

Цель этой главы — дать краткое изложение основных понятий римановой геометрии, которые понадобятся в дальнейшем. Более подробные сведения читатель найдет в книгах [19, 27, 41].

Пусть M — гладкое многообразие.

Определение. *Аффинная связность* в точке $p\in M$ есть функция, сопоставляющая каждому касательному вектору $X_p\in TM_p$ и каждому векторному полю Y новый касательный вектор

$$X_p\vdash Y\in TM_p,$$

называемый *ковариантной производной*[1]) Y по направлению X_p. Требуется, чтобы этот вектор был билинейной функцией от X_p и от Y.

Далее, если

$$f: M\to\mathbf{R}$$

— некоторая действительная функция и fY обозначает векторное поле

$$(fY)_q=f(q)\,Y_q,$$

то требуется, чтобы операция $\vdash$ удовлетворяла условию

$$X_p\vdash(fY)=((X_pf)\,Y_p)+(f(p)\,X_p\vdash Y)$$

(как обычно, через X_pf обозначена производная f по направлению X_p).

Глобальная аффинная связность (или просто *связность*) на M есть функция, сопоставляющая каждой точке

[1]) Вектор $X\vdash Y$ в книге Номидзу [27] обозначается через ∇_XY. Это обозначение подчеркивает, что дифференциальный оператор X действует на векторном поле Y.

$p \in M$ аффинную связность $\vdash_p$ в точке p, удовлетворяющую следующему условию гладкости:

(1) Если X и Y — гладкие векторные поля на M, то векторное поле $X \vdash Y$, определенное формулой

$$(X \vdash Y)_p = X_p \vdash_p Y,$$

должно быть тоже гладким.

Заметим, что

(2) $X \vdash Y$ есть билинейная функция X и Y,

(3) $(fX) \vdash Y = f(X \vdash Y)$,

(4) $X \vdash (fY) = ((Xf)\,Y) + (f(X \vdash Y))$.

Условия (1), (2), (3), (4) можно принять за определение связности.

В локальных координатах $u^1, \ldots, u^n$, заданных в координатной окрестности $U \subset M$, связность $\vdash$ определяется n^3 гладкими действительными функциями Γ^k_{ij}, заданными на U, как это объяснено ниже. Обозначим через ∂_k векторное поле $\frac{\partial}{\partial u^k}$ на U. Тогда каждое векторное поле X на U единственным образом записывается в виде

$$X = \sum_{k=1}^{n} x^k \partial_k,$$

где x^k — действительные функции на U. В частности, векторное поле $\partial_i \vdash \partial_j$ можно записать в виде

$$(5) \qquad \partial_i \vdash \partial_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k.$$

Функции Γ^k_{ij} полностью определяют связность на U. В самом деле, для любых двух векторных полей $X = \sum x^i \partial_i$ и $Y = \sum y^j \partial_j$ можно вычислить $X \vdash Y$ согласно правилам (2), (3), (4); получается формула

$$(6) \qquad X \vdash Y = \sum_k \Bigl(\sum_i x^i y^k_{,i}\Bigr) \partial_k,$$

где символом $y^k_{,i}$ обозначается действительная функция

$$y^k_{,i} = \partial_i y^k + \sum_j \Gamma^k_{ij} y^j.$$

Обратно, для любых гладких действительных функций Γ^k_{ij} на U можно определить $X \vdash Y$ формулой (6). Выполнение условий (1), (2), (3), (4), (5) очевидно.

С помощью связности $\vdash$ можно определить ковариантную производную векторного поля вдоль кривой в M. Введем сначала некоторые определения.

Параметризованная кривая в M есть гладкая функция c действительного переменного t со значениями

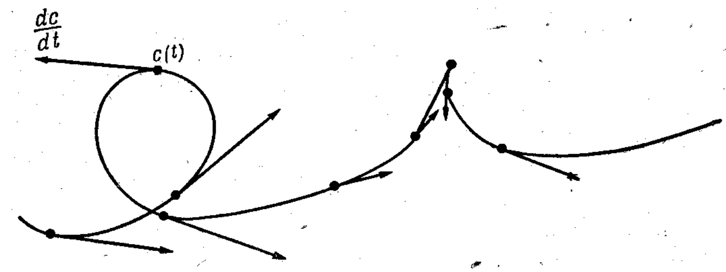


Рис. 9.

в M. *Векторное поле V вдоль* кривой c есть функция, сопоставляющая каждому $t \in \mathbf{R}$ касательный вектор

$$V_t \in TM_{c(t)}.$$

Эта функция должна быть гладкой в следующем смысле: для каждой гладкой функции f на M соответствие

$$t \to V_t f$$

должно определять гладкую функцию на $\mathbf{R}$.

Например, векторное поле *скорости* $\frac{dc}{dt}$ кривой c есть векторное поле вдоль c, определенное правилом

$$\frac{dc}{dt} = c_* \frac{d}{dt}.$$

Здесь $\frac{d}{dt}$ обозначает стандартное векторное поле на действительной оси и

$$c_* : T\mathbf{R}_t \to TM_{c(t)}$$

— гомоморфизм касательных пространств, индуцированный отображением c (см. рис. 9).

Предположим теперь, что на M задана аффинная связность. Тогда каждому векторному полю V вдоль c соответствует новое векторное поле $\frac{DV}{dt}$ вдоль c, называемое *ковариантной производной* поля V. Операция

$$V \to \frac{DV}{dt}$$

характеризуется следующими тремя аксиомами:

(а) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$; линейность

(б) если f — гладкая действительная функция на $\mathbf{R}$, то

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}; \quad \text{Правило Лейбница}$$

(в) если поле V индуцировано векторным полем Y на M, т. е. если $V_t = Y_{c(t)}$ при каждом t, то $\frac{DV}{dt}$ равно $\frac{dc}{dt} \vdash Y$ (т. е. ковариантной производной поля Y в направлении вектора скорости кривой c). $\frac{DY}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y$

Лемма 8.1. *Существует одна и только одна операция $V \to \frac{DV}{dt}$, удовлетворяющая трем перечисленным условиям.*

Доказательство. Выберем на M локальную систему координат и пусть $u^1(t), \ldots, u^n(t)$ — координаты точки $c(t)$. Векторное поле V единственным образом записывается в виде

$$V = \sum v^j \partial_j,$$

где $v^1, \ldots, v^n$ — действительные функции на $\mathbf{R}$ (или на подходящем открытом подмножестве в $\mathbf{R}$), а $\partial_1, \ldots, \partial_n$ — стандартные векторные поля в координатной окрестности. Из (а), (б) и (в) вытекает, что

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial v^j}{\partial t}\partial_j + v^j \frac{dc}{dt} \vdash \partial_j\right) =$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt}\Gamma^k_{ij}v^j\right)\partial_k.$$

$\frac{DV}{dt} = \frac{D(\sum v^j \partial_j)}{dt}$

$\sum \partial$

Обратно, нетрудно проверить, что определенная этим равенством операция $\frac{DV}{dt}$ удовлетворяет условиям (а), (б) и (в).

Векторное поле V вдоль c называется *параллельным векторным полем*, если его ковариантная производная $\frac{DV}{dt}$ тождественно равна нулю.

Лемма 8.2. *Пусть дана кривая c и касательный вектор V_0 в точке $c(0)$. Тогда существует одно и только одно параллельное векторное поле V вдоль кривой c, продолжающее V_0.*

Доказательство. Дифференциальные уравнения

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt}\Gamma^k_{ij}v^j = 0$$

имеют решение $v^k(t)$, однозначно определенное начальными данными $v^k(0)$. Так как эти уравнения линейны, решения можно определить для всех допустимых значений t (см. [10]).

Мы будем говорить, что вектор V_t получен из V_0 при помощи *параллельного перенесения* вдоль c.

Предположим теперь, что M — риманово многообразие. Скалярное произведение двух векторов X_p, Y_p обозначим через $\langle X_p, Y_p \rangle$.

Определение. Связность $\vdash$ на M *совместна* с римановой метрикой, если параллельное перенесение сохраняет скалярное произведение. Иными словами, для любой параметризованной кривой c и для любой пары P, P' параллельных векторных полей вдоль c скалярное произведение $\langle P, P' \rangle$ должно быть постоянным вдоль этой кривой.

Лемма 8.3. *Предположим, что связность совместна с метрикой. Пусть V, W — любые два векторных поля вдоль c. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Доказательство. Выберем векторные поля $P_1, \ldots, P_n$, параллельные вдоль c и ортонормальные в одной точке c (и, следовательно, в каждой точке c). Тогда данные поля V и W можно записать соответственно в виде $\sum v^i P_i$ и $\sum w^j P_j$ (где $v^i = \langle V, P_i \rangle$ есть действительная функция на $\mathbb{R}$). Следовательно, $\langle V, W \rangle = \sum v^i w^i$ и

$$\frac{DV}{dt} = \sum \frac{dv^i}{dt} P_i, \qquad \frac{DW}{dt} = \sum \frac{dw^j}{dt} P_j.$$

Следовательно,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \\ = \sum \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle,$$

что завершает доказательство.

Следствие 8.4. *Для любых векторных полей Y, Y' на M и для любого вектора $X_p \in TM_p$ имеем*

$$X_p \langle Y, Y' \rangle = \langle X_p \vdash Y, Y'_p \rangle + \langle Y_p, X_p \vdash Y' \rangle.$$

Доказательство. Выберем кривую c, имеющую при $t = 0$ вектор скорости X_p, и применим 8.3.

Определение 8.5. Связность $\vdash$ называется *симметричной*, если она удовлетворяет тождеству [1])

$$(X \vdash Y) - (Y \vdash X) = [X, Y].$$

(Как обычно, $[X, Y]$ означает скобку Пуассона $[X, Y] f = X(Yf) - Y(Xf)$ двух векторных полей.) Применяя это тождество к случаю $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ и учитывая, что

[1]) Следующая формулировка, по-видимому (а, может быть, и нет), интуитивно более понятна. Определим „вторую ковариантную производную" действительной функции f вдоль двух векторов X_p, Y_p как

$$X_p(Yf) - (X_p \vdash Y) f,$$

где Y — любое векторное поле, продолжающее Y_p. Можно проверить, что это определение не зависит от выбора Y (ср. ниже с доказательством леммы 9.1). Связность симметрична, если вторая производная симметрична как функция X_p и Y_p.

$[\partial_i, \partial_j] = 0$, получаем соотношение

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

Обратно, если $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, то с помощью формулы (6) нетрудно проверить, что связность $\vdash$ симметрична в рассматриваемой координатной окрестности.

Лемма 8.6. (Основная лемма римановой геометрии.) *Риманово многообразие допускает одну и только одну симметричную связность, совместную с его метрикой.* (См. [27, стр. 110], [19].)

Доказательство единственности. Применяя 8.4 к векторным полям $\partial_i, \partial_j, \partial_k$ и полагая $\langle \partial_j, \partial_k \rangle = g_{jk}$, получаем тождество

$$\partial_i g_{jk} = \langle \partial_i \vdash \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \partial_i \vdash \partial_k \rangle.$$

Переставляя i, j и k, получим три линейных уравнения относительно трех величин

$$\langle \partial_i \vdash \partial_j, \partial_k \rangle, \quad \langle \partial_j \vdash \partial_k, \partial_i \rangle, \quad \langle \partial_k \vdash \partial_i, \partial_j \rangle$$

(трех, потому что $\partial_i \vdash \partial_j = \partial_j \vdash \partial_i$). Эти три уравнения имеют единственное решение; получается *первое тождество Кристоффеля*

$$\langle \partial_i \vdash \partial_j, \partial_k \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

Левая часть этого тождества равна $\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}$. Умножая на обратную к (g_{lk}) матрицу (g^{kl}), получаем *второе тождество Кристоффеля*

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{kl}.$$

Следовательно, связность однозначно определена метрикой.

Обратно, определив Γ_{ij}^l этой формулой, можно проверить, что полученная связность симметрична и совместна с заданной метрикой. Доказательство закончено.

В дальнейшем мы будем пользоваться другой характеристикой симметрии. Рассмотрим „параметризованную поверхность" в M, т. е. гладкую функцию

$$s: \mathrm{R}^2 \to M.$$

Под *векторным полем* V *вдоль* s понимается функция, сопоставляющая каждой точке $(x, y) \in \mathrm{R}^2$ касательный вектор

$$V_{(x, y)} \in TM_{s(x, y)}.$$

Например, два стандартных векторных поля $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ порождают векторные поля $s_* \frac{\partial}{\partial x}$ и $s_* \frac{\partial}{\partial y}$ вдоль s. Эти поля будут коротко обозначаться через $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial y}$; мы назовем их „полями векторов скорости" на s.

Для любого гладкого векторного поля V вдоль s *ковариантные производные* $\frac{DV}{\partial x}$ и $\frac{DV}{\partial y}$ — это новые векторные поля, которые строятся следующим образом. При любом фиксированном y_0 ограничение V на кривую

$$x \to s(x, y_0)$$

есть векторное поле вдоль этой кривой. Его ковариантная производная по x есть, по определению, $\left(\frac{DV}{\partial x}\right)_{(x, y_0)}$. Тем самым $\frac{DV}{\partial x}$ определена вдоль всей параметризованной поверхности s.

Например, можно образовать по две ковариантные производные каждого из векторных полей $\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{\partial s}{\partial y}$. Производные $\frac{D}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}$ и $\frac{D}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}$ — это просто векторы ускорений соответствующих координатных кривых. Однако смешанные производные $\frac{D}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y}$ и $\frac{D}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial x}$ не могут быть описаны так просто.

Лемма 8.7. *Если связность симметрична, то*

$$\frac{D}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{D}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial x}.$$

Доказательство. Достаточно выразить обе производные с помощью локальной системы координат.

§ 9. Тензор кривизны

Тензор кривизны R аффинной связности $\vdash$ измеряет асимметрию второй ковариантной производной $\partial_i \vdash (\partial_j \vdash Z)$ по i и j. По трем заданным векторным полям X, Y, Z определим новое векторное поле[1]) $R(X, Y)Z$:

$= -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$

$$R(X, Y)Z = (-X \vdash (Y \vdash Z)) + \\ + (Y \vdash (X \vdash Z)) + ([X, Y] \vdash Z).$$

Лемма 9.1. *Значение* $R(X, Y)Z$ *в точке* $p \in M$ *зависит лишь от векторов* X_p, Y_p, Z_p *в этой точке, а не от их значений в близких точках. Далее, соответствие*

$$X_p, Y_p, Z_p \to R(X_p, Y_p)Z_p$$

является трилинейным отображением $TM_p \times TM_p \times \times TM_p$ *в* TM_p.

Коротко говоря, лемма утверждает, что R есть „тензор".

Доказательство. Очевидно, $R(X, Y)Z$ есть трилинейная функция X, Y и Z. Если заменить X кратным fX, то три члена $-X \vdash (Y \vdash Z)$, $Y \vdash (X \vdash Z)$, $[X, Y] \vdash Z$ заменяются соответственно членами

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && -fX \vdash (Y \vdash Z), \\ &(\mathrm{II}) && (Yf)(X \vdash Z) + (fY \vdash (X \vdash Z)), \\ &(\mathrm{III}) && -(Yf)(X \vdash Z) + (f[X, Y] \vdash Z). \end{aligned}$$

Складывая эти три члена, получаем тождество

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z.$$

Соответствующие тождества для Y и Z легко получаются при помощи аналогичного вычисления. Предположим теперь, что $X = \sum x^i \partial_i$, $Y = \sum y^j \partial_j$ и $Z = \sum z^k \partial_k$. Тогда

$$R(X, Y)Z = \sum R(x^i \partial_i, y^j \partial_j)(z^k \partial_k) = \\ = \sum x^i y^j z^k R(\partial_i, \partial_j)\partial_k.$$

[1]) В книге Номидзу R имеет обратный знак. Наш выбор знака имеет то преимущество, что (в римановом случае) скалярное произведение $\langle R(\partial_h, \partial_i)\partial_j, \partial_k \rangle$ совпадает с классическим R_{hijk}.

Записывая это выражение в точке p, получим сумму

$$(R(X, Y)Z)_p = \sum x^i(p)\, y^j(p)\, z^k(p)\, (R(\partial_i, \partial_j)\partial_k)_p,$$

зависящую только от значений функций x^i, y^j, z^k в точке p, а не от их значений в близких точках. Доказательство закончено.

Рассмотрим теперь параметризованную поверхность

$$s : \mathrm{R}^2 \to M.$$

К данному векторному полю V вдоль s можно применить два оператора ковариантного дифференцирования $\frac{D}{\partial x}$ и $\frac{D}{\partial y}$. Вообще говоря, эти операторы не коммутируют.

Лемма 9.2. $\frac{D}{\partial y}\frac{D}{\partial x}V - \frac{D}{\partial x}\frac{D}{\partial y}V = R\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}\right)V.$

Доказательство. Запишем левую и правую части в локальной системе координат и используем тождество

$$\partial_j \vdash (\partial_i \vdash \partial_k) - \partial_i \vdash (\partial_j \vdash \partial_k) = R(\partial_i, \partial_j)\partial_k.$$

[Интересно узнать, можно ли построить векторное поле P, параллельное вдоль s в том смысле, что

$$\frac{D}{\partial x}P = \frac{D}{\partial y}P = 0,$$

и имеющее данное значение $P_{(0,0)}$ в начале координат. Вообще говоря, такого поля не существует. Однако если окажется, что тензор кривизны есть нуль, то P можно построить следующим образом. Пусть $P_{(x,0)}$ — параллельное векторное поле вдоль оси x, удовлетворяющее заданному начальному условию. Для каждого фиксированного x_0 пусть $P_{(x_0, y)}$ — параллельное векторное поле вдоль кривой

$$y \to s(x_0, y),$$

имеющее выбранное значение при $y = 0$. Теперь P определено везде вдоль s. Очевидно, $\frac{D}{\partial y}P$ — тождественный нуль и $\frac{D}{\partial x}P$ — нуль на оси x. Из тождества

$$\frac{D}{\partial y}\frac{D}{\partial x}P - \frac{D}{\partial x}\frac{D}{\partial y}P = R\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}\right)P = 0$$

вытекает, что $\frac{D}{\partial y}\frac{D}{\partial x}P = 0$. Иначе говоря, векторное поле $\frac{D}{\partial x}P$ параллельно вдоль кривых

$$y \to s(x_0, y).$$

Так как $\left(\frac{D}{\partial x}P\right)_{(x_0,\,0)} = 0$, отсюда вытекает, что $\frac{D}{\partial x}P$ — тождественный нуль; итак, поле P параллельно вдоль s.]

Начиная отсюда, мы будем предполагать, что M — риманово многообразие, снабженное единственной симметричной связностью, совместной с его метрикой. Докажем, что тензор R удовлетворяет четырем соотношениям симметрии.

Лемма 9.3. *Тензор кривизны риманова многообразия удовлетворяет следующим соотношениям*:

(1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$,

(2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,

(3) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle R(X, Y)W, Z\rangle = 0$,

(4) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle$.

Доказательство. Соотношение кососимметричности (1) немедленно вытекает из определения тензора R.

Так как все три слагаемых в формуле (2) тензоры, достаточно доказать эту формулу в случае, когда все скобки $[X, Y]$, $[Y, Z]$, $[Z, X]$ равны нулю. В этом предположении нужно проверить тождество

$$\begin{aligned} &-(X \vdash (Y \vdash Z)) + (Y \vdash (X \vdash Z)) - \\ &-(Y \vdash (Z \vdash X)) + (Z \vdash (Y \vdash X)) - \\ &-(Z \vdash (X \vdash Y)) + (X \vdash (Z \vdash Y)) = 0. \end{aligned}$$

Но из симметрии связности вытекает, что

$$(Y \vdash Z) - (Z \vdash Y) = [Y, Z] = 0.$$

Итак, левый верхний член в сумме с правым нижним дает нуль. Остальные члены тоже попарно приводятся к нулю, что и доказывает соотношение (2).

Для доказательства тождества (3) нужно показать, что выражение $\langle R(X, Y)Z, W\rangle$ кососимметрично по Z и W. Это, очевидно, эквивалентно утверждению, что

$$\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = 0$$

при всех X, Y, Z. Снова можно предположить, что $[X, Y]=0$, так что $\langle R(X, Y)Z, Z\rangle$ равно

$$\langle (-X \vdash (Y \vdash Z)) + (Y \vdash (X \vdash Z)), Z\rangle.$$

Иначе говоря, мы должны доказать симметричность выражения

$$\langle Y \vdash (X \vdash Z), Z\rangle$$

относительно X и Y.

Так как $[X, Y]=0$, выражение $YX\langle Z, Z\rangle$ симметрично относительно X и Y. Так как связность совместна с метрикой, имеем

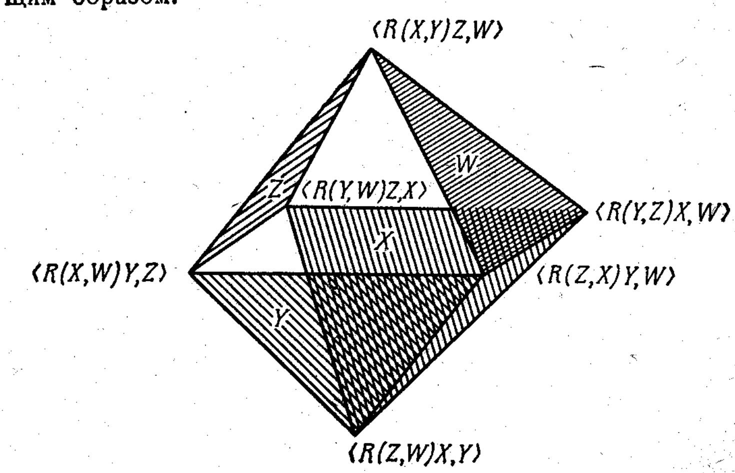
$$X\langle Z, Z\rangle = 2\langle X \vdash Z, Z\rangle,$$

следовательно,

$$YX\langle Z, Z\rangle = 2\langle Y \vdash (X \vdash Z), Z\rangle + 2\langle X \vdash Z, Y \vdash Z\rangle.$$

Но второе слагаемое, очевидно, симметрично относительно X и Y. Следовательно, $\langle Y \vdash (X \vdash Z), Z\rangle$ симметрично относительно X и Y, что и доказывает свойство (3).

Свойство (4) можно вывести из (1), (2) и (3) следующим образом.



Формула (2) означает, что сумма величин, написанных у вершин заштрихованного треугольника W, равна нулю. Точно так же, на основании (1) и (3), сумма вершин каждого из остальных заштрихованных треугольников равна нулю. Складывая эти тождества для двух верхних заштрихованных треугольников и вычитая тождества, соответствующие нижним, получим, что удвоенная верхняя вершина минус удвоенная нижняя дают нуль. Это доказывает соотношение (4), а с ним и лемму 9.3.

§ 10. Геодезические и полнота

Пусть M — связное риманово многообразие.

Определение. Параметризованный путь

$$\gamma : I \to M,$$

где I — какой-нибудь интервал действительной прямой, называется *геодезической*, если векторное поле ускорения $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}$ тождественно равно нулю. Соответственно поле скорости $\frac{d\gamma}{dt}$ должно быть параллельным вдоль γ. Если γ — геодезическая, то, как показывает тождество

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle = 0,$$

длина $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle^{1/2}$ вектора скорости постоянна вдоль γ. Вводя длину дуги

$$s(t) = \int \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt + \text{const},$$

можно выразить это утверждение так: параметр t вдоль геодезической линейно зависит от длины дуги. Параметр t совпадает с длиной дуги тогда и только тогда, когда $\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = 1$.

В локальных координатах $u^1, \ldots, u^n$ кривая $t \to \gamma(t) \in M$ определяет n гладких функций $u^1(t), \ldots, u^n(t)$. Уравнение геодезической $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$ принимает тогда вид

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i, j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(u^1, \ldots, u^n)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0.$$

Существование геодезических, таким образом, определяется существованием решений некоторой системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим более общую систему уравнений вида

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right).$$

Здесь $\mathbf{u}$ означает $(u^1, \ldots, u^n)$ и $\mathbf{F}$ — набор из n функций класса C^∞, определенных в некоторой окрестности U точки

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Теорема существования и единственности 10.1. *Существует такая окрестность W точки $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ и такое число $\varepsilon > 0$, что для каждой точки $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in W$ дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)$$

имеет единственное решение $t \to \mathbf{u}(t)$, определенное при $|t| < \varepsilon$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Это решение гладко зависит от начальных условий, т. е. отображение

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, t) \to \mathbf{u}(t)$$

из $W \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ в $\mathbf{R}^n$ определяется функциями класса C^∞ по всем $2n+1$ переменным.

Доказательство. Введением новых переменных $v^i = \frac{du^i}{dt}$ нашу систему n уравнений второго порядка можно свести к системе $2n$ уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{cases}$$

Теперь утверждение 10.1 вытекает из [10, стр. 166]. (См. также лемму 2.4.)

Применяя эту теорему к дифференциальным уравнениям геодезических, получаем следующее утверждение.

Лемма 10.2. *Для каждой точки p_0 риманова многообразия M существуют такая окрестность U точки p_0 и такое число $\varepsilon > 0$, что для каждой точки $p \in U$ и каждого касательного вектора $v \in TM_p$ длины меньше ε существует единственная геодезическая*

$$\gamma_v : (-2, 2) \to M,$$

удовлетворяющая условиям

$$\gamma_v(0) = p, \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v.$$

Доказательство. Утверждение немедленно следовало бы из теоремы 10.1, если бы мы заменили интервал $(-2, 2)$ произвольно малым интервалом. Точнее, существуют окрестность U точки p_0 и числа ε_1, $\varepsilon_2 > 0$, такие, что для каждого $p \in U$ и каждого $v \in TM_p$, $\|v\| < \varepsilon_1$, существует единственная геодезическая

$$\gamma_v : (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \to M,$$

удовлетворяющая требуемым начальным условиям.

Чтобы получить более точное утверждение 10.2, необходимо только заметить, что дифференциальное уравнение геодезических обладает следующим свойством однородности. Пусть c — любая константа. Если параметризованная кривая

$$t \to \gamma(t)$$

является геодезической, то параметризованная кривая

$$t \to \gamma(ct)$$

также является геодезической.

Пусть теперь ε меньше $\varepsilon_1\varepsilon_2$. Тогда, если $\|v\| < \varepsilon$ и $|t| < 2$, то

$$\|v/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2.$$

Поэтому мы можем определить $\gamma_v(t)$ как $\gamma_{v/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$. Это доказывает теорему 10.2.

Удобно ввести следующее обозначение. Пусть $v \in TM_q$ — касательный вектор, и пусть существует геодезическая

$$\gamma : [0, 1] \to M,$$

удовлетворяющая условиям

$$\gamma(0) = q, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = v.$$

Точку $\gamma(1) \in M$ обозначим $\exp_q(v)$ и назовем *экспонентой*[1]) касательного вектора v. Тогда геодезическая γ может быть записана в виде

$$\gamma(t) = \exp_q(tv).$$

Согласно лемме 10.2, $\exp_q(v)$ определена для достаточно малых $\|v\|$. Вообще говоря, $\exp_q(v)$ не определена при больших векторах v. Но если $\exp_q(v)$ определена, то обязательно однозначно.

Определение. Многообразие M *геодезически полно*, если $\exp_q(v)$ определена для всех точек $q \in M$ и всех векторов $v \in TM_q$. Очевидно, это эквивалентно следующему требованию.

Каждый отрезок геодезической $\gamma_0 : [a, b] \to M$ *продолжается до бесконечной геодезической* $\gamma : \mathbf{R} \to M$.

Мы вернемся к изучению полноты, после того как докажем некоторые локальные результаты.

Пусть TM — касательное пространство многообразия M, состоящее из всех пар (p, v), $p \in M$, $v \in TM_p$. Мы придадим TM следующую структуру класса C^∞: если $(u^1, \ldots, u^n)$ — координаты в открытом множестве $U \subset M$,

[1]) Происхождение этого обозначения следующее. Если M — группа всех унитарных $(n \times n)$-матриц, то касательное пространство в единице TM_I естественно отождествляется с пространством косо-эрмитовых $(n \times n)$-матриц. Функция

$$\exp_I : TM_I \to M,$$

определенная выше, выражается в этом случае экспоненциальным степенным рядом

$$\exp_I(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots.$$

то каждый касательный вектор в $q \in U$ однозначно представим в виде $t^1\partial_1 + \ldots + t^n\partial_n$, где $\partial_i = \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_q$. Функции $u^1, \ldots, u^n, t^1, \ldots, t^n$ образуют систему координат в открытом множестве $TU \subset TM$.

Лемма 10.2 утверждает, что для каждого $p \in M$ отображение

$$(q, v) \to \exp_q(v)$$

определено в окрестности V точки $(p, 0) \in TM$. Кроме того, это отображение дифференцируемо в V.

Рассмотрим теперь гладкую функцию $F : V \to M \times M$, определенную формулой $F(q, v) = (q, \exp_q(v))$. Якобиан F в точке $(p, 0)$ невырожден. В самом деле, обозначая индуцированные координаты на $U \times U \subset M \times M$ через $(u_1^1, \ldots, u_1^n, u_2^1, \ldots, u_2^n)$, имеем

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial}{\partial u_1^i} + \frac{\partial}{\partial u_2^i},$$

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial t^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u_2^j}.$$

Итак, матрица Якоби функции F в точке $(p, 0)$ имеет вид $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ и потому невырождена.

Из теоремы о неявной функции следует, что F отображает некоторую окрестность V' точки $(p, 0) \in TM$ диффеоморфно на некоторую окрестность точки $(p, p) \in M \times M$. Мы можем считать, что первая окрестность V' состоит из всех пар (q, v), таких, что q принадлежит заданной окрестности U' точки p и $\|v\| < \varepsilon$. Выберем меньшую окрестность W точки p так, чтобы $F(V') \supset W \times W$. Мы доказали следующее утверждение.

Лемма 10.3. *Для каждой точки* $p \in M$ *существуют окрестность* W *и число* $\varepsilon > 0$, *такие, что*

(1) *каждые две точки из* W *соединяет одна и только одна геодезическая многообразия* M *длины меньше* ε;

(2) *эта геодезическая гладко зависит от двух рассматриваемых точек (т. е. если* $t \to \exp_{q_1}(tv)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *— геодезическая, соединяющая* q_1 *и* q_2, *то пара* $(q_1, v) \in TM$ *гладко зависит от* q_1, q_2);

(3) *для каждой точки* $q \in W$ *отображение* $\exp_q$ *отображает открытый* ε*-шар из* TM_q *диффеоморфно на открытое множество* $U_q \supset W$.

Замечание. Можно было бы выбрать окрестность W так, чтобы геодезические, соединяющие любые две ее точки, лежали целиком в W (см. [37]).

Изучим теперь соотношение между геодезическими и длиной дуги.

Теорема 10.4. *Для* W *и* ε, *определенных в лемме 10.3, пусть*

$$\gamma : [0,\ 1] \to M$$

— геодезическая длины меньше ε, *соединяющая две точки из* W, *а*

$$\omega : [0,1] \to M$$

— любой другой кусочно-гладкий путь, соединяющий те же точки. Тогда

$$\int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt \leqslant \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt,$$

причем равенство достигается лишь при совпадении точечных множеств $\omega([0,\ 1])$ *и* $\gamma([0,\ 1])$.

Итак, γ — кратчайший путь, соединяющий концы γ.

Доказательство будет основано на двух леммах. Пусть $q = \gamma(0)$ и U_q — множество, определенное в лемме 10.3.

Лемма 10.5. *В* U_q *геодезические, выходящие из* q, *являются ортогональными траекториями гиперповерхностей*

$$\{\exp_q(v) : v \in TM_q,\quad \|v\| = \mathrm{const}\}.$$

Доказательство. Пусть $t \to v(t)$ — любая кривая в TM_q, такая, что $\|v(t)\| = 1$. Мы должны показать, что

соответствующие кривые в U_q

$$t \to \exp_q(r_0 v(t_0)),$$

где $0 < r_0 < \varepsilon$, ортогональны радиальным геодезическим

$$r \to \exp_q(rv(t_0)).$$

Рассмотрим следующую параметризованную поверхность f:

$$f(r,\ t) = \exp_q(rv(t)),\quad 0 \leqslant r < \varepsilon.$$

Нужно доказать, что для всех $(r,\ t)$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{D}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

Первое выражение в правой части равно нулю, так как кривые

$$r \to f(r,\ t)$$

геодезические. Второе выражение равно

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 0,$$

так как $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = \|v(t)\| = 1$. Следовательно, величина $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ не зависит от r. Но при $r = 0$ имеем

$$f(0,\ t) = \exp_q(0) = q;$$

следовательно, $\frac{\partial f}{\partial t}(0,\ t) = 0$. Поэтому $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ тождественно равно нулю. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь любую кусочно-гладкую кривую

$$\omega : [a,\ b] \to U_q - \{q\}.$$

Каждая точка $\omega(t)$ единственным образом записывается в виде $\exp_q(r(t),\ v(t))$, где $0 < r(t) < \varepsilon$ и $\|v(t)\| = 1$, $v(t) \in TM_q$.

Лемма 10.6 *Длина* $\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$ *больше или равна* $|r(b) - r(a)|$, *причем равенство достигается только* *если функция* $r(t)$ *монотонна, а функция* $v(t)$ *постоянна.*

Итак, кратчайшим путем, соединяющим две концентрические сферы с центром q, служит радиальная геодезическая.

Доказательство. Пусть $f(r, t) = \exp_q(rv(t))$, так что $\omega(t) = f(r(t), t)$. Тогда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Так как два вектора справа ортогональны и $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = 1$, это дает

$$\left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geqslant |r'(t)|^2,$$

причем равенство имеет место лишь при $\frac{df}{dt} = 0$, т. е. при $\frac{dv}{dt} = 0$. Итак,

$$\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \geqslant \int_a^b |r'(t)| dt \geqslant |r(b) - r(a)|,$$

где равенство достигается лишь тогда, когда $r(t)$ монотонна и $v(t)$ постоянна. Доказательство закончено.

Теперь легко доказать теорему 10.4. Рассмотрим любой кусочно-гладкий путь ω из q в точку

$$q' = \exp_q(rv) \in U_q,$$

где $0 < r < \varepsilon$, $\|v\| = 1$. Тогда для любого $\delta > 0$ путь ω должен содержать отрезок, соединяющий сферу радиуса δ со сферой радиуса r и лежащий между этими сферами. Длина этого отрезка не меньше $r - \delta$; устремляя δ к нулю, видим, что длина ω должна быть не меньше r. Если $\omega([0, 1])$ не совпадает с $\gamma([0, 1])$, то легко получить строгое неравенство. Доказательство теоремы 10.4 закончено.

Теорема 10.4 имеет важное

Следствие 10.7. *Пусть путь* $\omega : [0, l] \to M$, *параметризованный длиной дуги, не длиннее никакого другого пути из* $\omega(0)$ *в* $\omega(l)$. *Тогда* ω — *геодезическая.*

Доказательство. Рассмотрим любой отрезок пути ω, лежащий внутри открытого множества W, введенного выше, и имеющий длину меньше ε. Этот отрезок является геодезической, согласно теореме 10.4. Следовательно, весь путь ω — геодезическая.

Определение. Геодезическая $\gamma : [a, b] \to M$ называется *минимальной*, если она не длиннее никакого кусочно-гладкого пути, соединяющего ее концы.

Теорема 10.4 утверждает, что каждый достаточно малый отрезок геодезической минимален. С другой стороны, длинная геодезическая может не быть минимальной. Например, мы вскоре увидим, что дуга большого круга на единичной сфере является геодезической. Если такая дуга имеет длину больше π, она, конечно, не минимальна.

Вообще говоря, минимальная геодезическая не единственна. Например, противоположные точки единичной сферы соединены бесконечным множеством минимальных геодезических. Справедливо, однако, следующее утверждение.

Определим *расстояние* $\rho(p, q)$ между двумя точками $p, q \in M$ как точную нижнюю грань длин кусочно-гладких дуг, соединяющих эти точки. Очевидно, что при этом M становится метрическим пространством. Из теоремы 10.4 легко следует, что эта метрика совместна с обычной топологией на M.

Следствие 10.8. *Для каждого компактного множества* $K \subset M$ *найдется* $\delta > 0$, *такое, что любые две точки из* K, *расстояние между которыми меньше* δ, *соединяются единственной геодезической длины меньше* δ. *Эта геодезическая минимальна и гладко зависит от своих концов.*

Доказательство. Покроем K открытыми множествами W_α, как в лемме 10.3, и выберем δ столь малым, чтобы любые две точки, удаленные друг от друга меньше чем на δ, лежали в общем множестве W_α. Следствие 10.8 доказано.

Напомним, что многообразие M *геодезически полно*, если каждый отрезок геодезической может быть продолжен неограниченно.

Теорема 10.9 (Хопф и Ринов[1]). *Если многообразие M геодезически полно, то любые две его точки можно соединить минимальной геодезической.*

Доказательство. Рассмотрим точки $p, q \in M$ с расстоянием $r > 0$. Выберем окрестность U_p, как в лемме 10.3. Обозначим через $S \subset U_p$ сферу радиуса $\delta < \varepsilon$ вокруг p. Так как S компактна, существует точка

$$p_0 = \exp_p(\delta v), \quad \|v\| = 1,$$

на S, для которой расстояние до q достигает минимума. Мы покажем, что

$$\exp_p(rv) = q.$$

Отсюда вытекает, что отрезок геодезической $t \to \gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leqslant t \leqslant r$, действительно минимален между p и q.

Для доказательства мы убедимся, что точка, движущаяся вдоль геодезической γ, должна подходить к q все ближе и ближе. А именно, мы покажем, что при любом $t \in [\delta, r]$

$$\rho(\gamma(t), q) = r - t. \qquad (1_t)$$

Это тождество при $t = r$ доказывает теорему 10.9.

Докажем сначала равенство (1_δ). Так как каждый путь из p в q должен пересекать S, имеем

$$\rho(p, q) = \min_{s \in S}(\rho(p, s) + \rho(s, q)) = \delta + \rho(p_0, q).$$

Следовательно, $\rho(p_0, q) = r - \delta$. Так как $p_0 = \gamma(\delta)$, это доказывает (1_δ).

Пусть $t_0 \in [\delta, r]$ — верхняя грань чисел t, для которых справедливо тождество (1_t). Тогда по непрерывности справедливо и равенство (1_{t_0}). Если $t_0 < r$, то мы придем к противоречию. Пусть S' — маленькая сфера радиуса δ' вокруг точки $\gamma(t_0)$, и пусть $p'_0 \in S'$ — точка на S', наименее удаленная от q (см. рис. 10). Тогда

$$\rho(\gamma(t_0), q) = \min_{s \in S'} \{\rho(\gamma(t_0), s) + \rho(s, q)\} = \delta' + \rho(p'_0, q).$$

Следовательно,

$$\rho(p'_0, q) = (r - t_0) - \delta'. \qquad (2)$$

[1]) См. [29, 42].

Мы утверждаем, что p'_0 есть $\gamma(t_0 + \delta')$. Действительно, неравенство треугольника и равенство (2) дают:

$$\rho(p, p'_0) \geqslant \rho(p, q) - \rho(p'_0, q) = t_0 + \delta'.$$

Но путь длины в точности $t_0 + \delta'$ из p в p'_0 получится, если идти по γ от p до $\gamma(t_0)$ и затем по минимальной

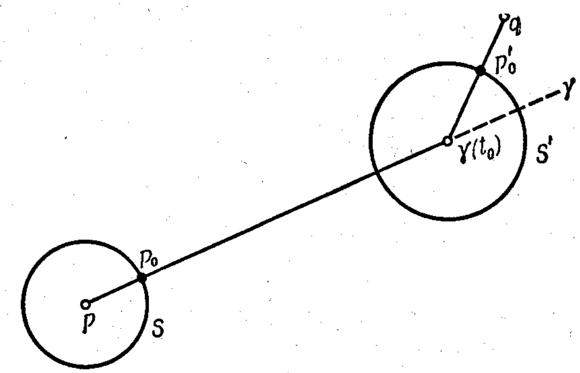


Рис. 10.

геодезической из $\gamma(t_0)$ в p'_0. Так как этот кусочно-геодезический путь имеет наименьшую длину, он, согласно 10.7, представляет собой целую геодезическую, а поэтому совпадает с γ.

Итак, $\gamma(t_0 + \delta') = p'_0$. Равенство (2) принимает вид

$$\rho(\gamma(t_0 + \delta'), q) = r - (t_0 + \delta'). \qquad (1_{t_0+\delta'})$$

Противоречие с определением t_0 завершает доказательство.

Доказанная теорема влечет за собой

Следствие 10.10. *Если многообразие M геодезически полно, то каждое ограниченное подмножество в M имеет компактное замыкание. Следовательно, M полно как метрическое пространство (т. е. каждая фундаментальная последовательность сходится).*

Доказательство. Если множество $X \subset M$ имеет диаметр d, то для любой точки $p \in X$ отображение $\exp_p : TM_p \to M$ переводит шар радиуса d в TM_p в компактное подмножество в M, которое, согласно теореме 10.9, содержит X. Следовательно, замыкание X компактно.

Обратно, если M полно как метрическое пространство, то нетрудно доказать, используя лемму 10.3, что M геодезически полно. Подробности читатель найдет в статье Хопфа и Ринова [42]. Далее мы не будем различать геодезическую полноту и метрическую полноту, а будем говорить просто *о полных римановых многообразиях.*

Обычные примеры геодезических. В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с обычными координатами $x_1, \ldots, x_n$ и обычной римановой метрикой $dx_1 \otimes dx_1 + \ldots + dx_n \otimes dx_n$ мы имеем $\Gamma_{ij}^k = 0$ и уравнение геодезической γ, определенной соответствием $t \to (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, имеет вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0.$$

Решениями являются прямые линии. Это можно было бы увидеть и следующим образом: легко показать, что формула длины дуги

$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt$$

совпадает с обычным определением длины дуги как предела периметров вписанных многоугольников; из этого определения ясно, что прямые линии имеют минимальную длину и, следовательно, являются геодезическими.

Геодезическими на сфере S^n служат большие круги, т. е. пересечения S^n с плоскостями E^2, проходящими через центр S^n, и только они.

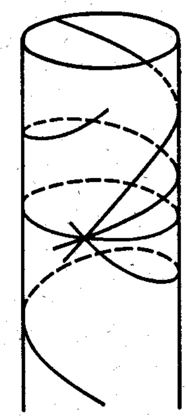
Доказательство. Отражение в плоскости E^2 есть изометрия $I: S^n \to S^n$ с множеством неподвижных точек $C = S^n \cap E^2$. Пусть x и y — две точки из C, соединенные единственной минимальной геодезической C'. Так как I — изометрия, кривая $I(C')$ есть геодезическая той же длины, что и C', соединяющая $I(x) = x$ с $I(y) = y$. Следовательно, $C' = I(C')$; отсюда вытекает, что $C' \subset C$.

Наконец, так как через каждую точку S^n в любом направлении проходит большой круг, других геодезических нет.

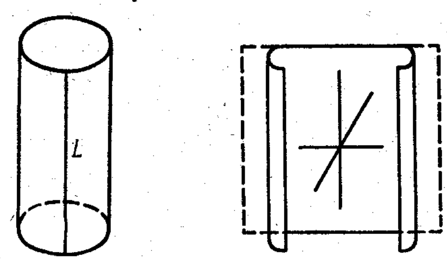
Противоположные точки сферы соединены континуумом геодезических минимальной длины. Для любой другой пары точек имеется единственная геодезическая минимальной длины, но бесконечное семейство не минимальных геодезических, зависящих от того, в какую сторону геодезическая идет и сколько оборотов делает вокруг сферы.

Из тех же соображений следует, что каждый меридиан поверхности вращения является геодезической.

Геодезическими на поверхности прямого кругового цилиндра Z служат образующие, круговые сечения, перпендикулярные образующим, а также винтовые линии на Z.



Доказательство. Разрежем Z вдоль одной из образующих L. Развертывая Z на $\mathbf{R}^2$, получаем изометрию



$I: Z - L \to \mathbf{R}^2$. Геодезическими на Z являются образы прямых линий в $\mathbf{R}^2$ при обратном отображении I^{-1}. Любые две точки на Z соединены бесконечным числом геодезических.