ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES
Number 61

SINGULAR POINTS of COMPLEX HYPERSURFACES

by
JOHN MILNOR

PRINCETON UNIVERSITY PRESS
and the
UNIVERSITY OF TOKYO PRESS
PRINCETON, NEW JERSEY
1968

ДЖ. МИЛНОР

ОСОБЫЕ ТОЧКИ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Перевод с английского
В. М. БУХШТАБЕРА

С предисловием
В. И. АРНОЛЬДА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1971

УДК 51.949

Автор, известный американский математик, уже знаком советскому читателю по переводам книг «Теория Морса» и «Теорема об h-кобордизме» («Мир», 1965 и 1969). Его новая книга посвящена изучению топологической структуры поверхностей уровня аналитической функции нескольких комплексных переменных в окрестности точки, в которой градиент функции обращается в нуль. Такая задача возникает в различных областях математики, а также в теоретической физике.

Обилие примеров, наличие рисунков, наглядность и геометричность изложения делают книгу доступной студентам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

$\frac{2\text{-}2\text{-}1}{*21\text{-}71}$

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Существует замечательная связь между теорией особых точек плоских алгебраических кривых, с одной стороны, и теорией узлов, зацеплений и кос — с другой. Узлы и зацепления возникают в трехмерной сфере, ограничивающей маленькую окрестность особой точки, при пересечении с (вещественно двумерной) поверхностью, образованной комплексными точками кривой. Алгебраические инварианты кривой (показатели Пюизё и т. п.) оказываются при этом связанными с топологическими инвариантами получающегося узла или зацепления.

Изучение этой связи и соответствующих многомерных обобщений и составляет предмет настоящей книги. Примером имеющихся здесь достижений может служить теорема Э. Брискорна, согласно которой 28 многообразий

$$z_0^{6k-1}+z_1^3+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0,$$

$$|z_0^2|+\ldots+|z_4^2|=1, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 28,$$

представляют 28 сфер Милнора (которые все гомеоморфны обычной семимерной сфере, но попарно не диффеоморфны).

В качестве другого примера можно указать следующую конструкцию несглаживаемого топологического многообразия (Кервэр, Брискорн, Кейпер).

Рассмотрим подмножество 7-мерного комплексного пространства, заданное условиями

$$z_1^2+\ldots+z_5^2+z_6^3+z_7^5=\varepsilon, \quad \sum z_i\bar{z}_i\leqslant 1.$$

где ε достаточно мало. Это множество является 12-мерным гладким многообразием с краем, гомеоморфным топологической 11-мерной сфере. Стянув край в точку, получим 12-мерное топологическое многообразие без края. Оно не допускает ни одной дифференцируемой структуры.

Из совсем недавних результатов можно отметить работу Хамма, который перенес результаты Милнора и Брискорна на изолированные особенности полных пересечений.

Особенностью книги Милнора является то, что алгебраическая геометрия выступает в ней не как ветвь алгебры или теории чисел, а как глава геометрии и анализа. Эта книга является одной из первых в мировой литературе попыток современного геометрического изложения ряда основных понятий алгебраической геометрии.

Следует отметить, что повышение интереса к геометрии особенностей алгебраических многообразий в последние годы связано не только с математической привлекательностью этой проблематики, но и с приложениями в физике (ветвление интегралов, особенности, связанные с диаграммами Фейнмана, и т. п.). В частности, указанная выше теорема Брискорна опирается на вычисления французского физика Ф. Фама.

По характеру изложения книга Милнора может служить учебником для начинающих: обилие примеров, наличие рисунков, наглядность и геометричность рассуждений автора делают ее доступной для широких кругов математиков всех специальностей.

В. Арнольд

Моей матери

ПРЕДИСЛОВИЕ

Топологические задачи, возникающие при изучении особых точек комплексной кривой, привлекли внимание многих геометров, после того как К. Браунер доказал в 1928 г., что каждую такую особую точку можно описать с помощью некоторой ассоциированной с ней заузленной кривой на трехмерной сфере. Недавно Э. Брискорн возбудил новый интерес к этой тематике, установив аналогичные факты для случая более высоких размерностей и связав тем самым алгебраическую геометрию с теорией узлов высоких размерностей и теорией экзотических сфер.

В этой книге для исследования особых точек комплексных гиперповерхностей вводится некоторое расслоение, сопоставляемое каждой особой точке.

От читателя требуется знакомство с основами алгебры и топологии, в объеме, например, «Алгебры» Ленга или «Современной алгебры» Ван дер Вардена и «Алгебраической топологии» Спеньера [1]).

Я хочу поблагодарить Э. Брискорна, В. Кассельмана, Х. Хиронаку и Дж. Нэша за полезные обсуждения и Э. Тёрнера за подготовку предварительного варианта рукописи. Я также благодарен Национальному научному фонду за его поддержку. Работа по написанию этой книги осуществлялась в Принстонском университете, Институте перспективных исследований, Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе и в Университете штата Невада.

[1]) См. список литературы в конце книги.

§ 1. Введение

Пусть $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ — многочлен ненулевой степени от $n+1$ комплексных переменных, и пусть V — алгебраическое множество, состоящее из всех наборов

$$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{n+1})$$

из $n+1$ комплексных чисел, для которых $f(\mathbf{z}) = 0$. (Такое множество называется *комплексной гиперповерхностью*.) Наша задача — изучить топологию гиперповерхности V в окрестности некоторой точки $\mathbf{z}$.

Мы будем использовать следующую конструкцию Браунера. Пересечем гиперповерхность V сферой S_ε малого радиуса с центром в заданной точке $\mathbf{z}^0$. Тогда топология части гиперповерхности V, заключенной внутри диска, ограниченного сферой S_ε, тесно связана с топологией множества

$$K = V \cap S_\varepsilon$$

(см. теорему 2.10 и примечание 2.11).

Например, если $\mathbf{z}^0$ является *регулярной точкой* многочлена f (т. е. если некоторая частная производная $\partial f / dz_j$ не обращается в нуль в точке $\mathbf{z}$), то гиперповерхность V вблизи точки $\mathbf{z}^0$ является гладким многообразием вещественной размерности $2n$. В этом случае пересечение $K = V \cap S_\varepsilon$ является гладким $(2n-1)$-мерным многообразием, диффеоморфным $(2n-1)$-мерной сфере, причем K незаузленно вложено в $(2n+1)$-мерную сферу S_ε (см. лемму 2.12).

Рассмотрим для сравнения с предыдущим случаем многочлен

$$f(z_1, z_2) = z_1^p + z_2^q$$

от двух переменных с *критической точкой* ($\partial f/\partial z_1 = \partial f/\partial z_2 = 0$) в начале координат. Предположим, что целые числа p и q взаимно просты и $\geqslant 2$.

Утверждение (Браунер). *Пересечение гиперповерхности $V = f^{-1}(0)$ со сферой S_ε с центром в начале координат является заузленной окружностью, а*

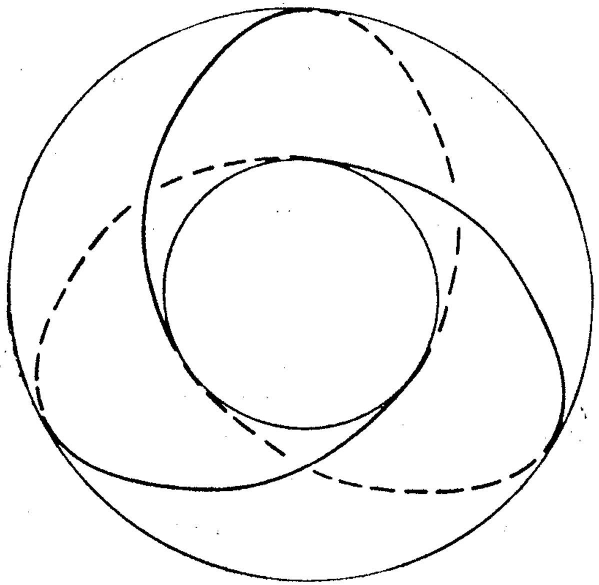

Рис. 1. Торический узел типа (2,3).

именно так называемым «торическим узлом типа (p, q)» в трехмерной сфере S_ε.

[Доказательство. Нетрудно проверить, что пересечение $K = V \cap S_\varepsilon$ лежит на торе, состоящем из всех пар (z_1, z_2), для которых $|z_1| = \xi$, $|z_2| = \eta$, где ξ и η — положительные постоянные. А именно, K состоит из всех пар вида $(\xi e^{qi\theta}, \eta e^{pi\theta + \pi i/q})$, где параметр θ изменяется от 0 до 2π. Таким образом, K обвивает тор q раз в одном координатном направлении и p раз в другом.]

Для примера на рис. 1 показан торический узел типа (2, 3).

Разумеется, используя более сложные многочлены, можно получить значительно более сложные узлы (см. замечание 10.11).

Аналоги торических узлов для случая высоких размерностей были изучены Брискорном. Например, пусть $V(3, 2, 2, \ldots, 2)$ — геометрическое место нулей многочлена

$$f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = z_1^3 + z_2^2 + \ldots + z_{n+1}^2.$$

Для всех нечетных n эта гиперповерхность пересекает сферу S_ε по гладкому многообразию K, гомеоморфному сфере S^{2n-1}. В некоторых случаях (например, в случае $n = 3$) K диффеоморфно стандартной $(2n-1)$-мерной сфере, тогда как в других случаях (например, в случае $n = 5$) K является «экзотической» сферой. Но во всех случаях K вложено заузленным образом в $(2n+1)$-мерную сферу S_ε.

Эти сферы Брискорна будут рассмотрены более подробно в § 9.

Цель этой работы — ввести некоторое расслоение, которое полезно для описания топологии таких пересечений

$$K = V \cap S_\varepsilon \subset S_\varepsilon.$$

Сформулируем некоторые основные результаты, доказательство которых будет дано в § 4—7.

Теорема о расслоении. *Пусть $\mathbf{z}^0$ — произвольная точка комплексной гиперповерхности $V = f^{-1}(0)$ и S_ε — сфера достаточно малого радиуса с центром в $\mathbf{z}^0$. Тогда отображение*

$$\varphi\colon\ S_\varepsilon \setminus K \to S^1, \quad \varphi(\mathbf{z}) = \frac{f(\mathbf{z})}{|f(\mathbf{z})|}$$

множества $S_\varepsilon \setminus K$ в единичную окружность S^1 является проекцией некоторого гладкого расслоения[1]). *Каждый слой*

$$F_\theta = \varphi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon \setminus K$$

[1]) Под расслоением мы будем понимать локально тривиальное расслоение.

является гладким параллелизуемым 2n-мерным многообразием.

В случае когда многочлен f не имеет других критических точек вблизи $\mathbf{z}^0$, кроме самой точки $\mathbf{z}^0$, можно доказать значительно более точный результат.

Теорема. *Если* $\mathbf{z}^0$ — *изолированная критическая точка многочлена* f, *то каждый слой* F_θ *имеет гомотопический тип букета* $S^n \vee S^n \vee \ldots \vee S^n$ *n-мерных*

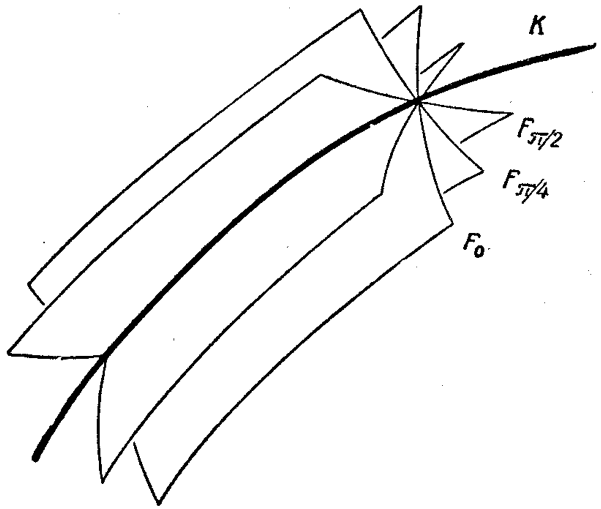

Рис. 2.

сфер, причем число сфер в этом букете (т. е. среднее число Бетти слоя F_θ*) строго положительно. Каждый слой является внутренней частью гладкого компактного многообразия с границей, а именно многообразия*

$$(\text{замыкание } F_\theta) = F_\theta \cup K,$$

причем общая граница K *этих многообразий является* $(n-2)$*-связным многообразием.*

Таким образом, все слои F_θ подходят к одной и той же общей границе K на манер, показанный на рис. 2. Гладкое многообразие K является связным, если $n \geqslant 2$, и односвязным, если $n \geqslant 3$.

Опишем теперь более подробно содержание этой книги. В § 2 мы приводим, следуя Уитни, элементарные свойства вещественных алгебраических множеств. В § 3 устанавливается основная лемма о существовании вещественных аналитических кривых на вещественных алгебраических множествах. Доказательства всех последующих результатов существенно опираются на эту лемму. В § 4 доказывается основная теорема о расслоении, а § 5 посвящен изложению ряда дополнительных результатов о топологии множеств K и F_θ.

Затем мы рассматриваем случай, когда начало координат является *изолированной* критической точкой многочлена f. В этом случае можно дать значительно более точное описание слоя (§ 6) и, в частности, получить явную формулу для среднего числа Бетти слоя (§ 7). Топологию нашего пересечения K можно при этом описать с помощью некоторого многочлена $\Delta(t)$ с целыми коэффициентами, который служит обобщением многочлена узла Александера (§ 8).

В § 9 приведены принадлежащие Брискорну примеры особых алгебраических многообразий, являющихся топологическими многообразиями. В § 10 изложена классическая теория особых точек комплексных кривых. В последнем параграфе доказано обобщение теоремы о расслоении на случай некоторых систем вещественных многочленов. В качестве примера дается многочленное описание расслоений Хопфа.

В конце книги приведены два дополнения.

§ 2. Элементарные факты о вещественных и комплексных алгебраических множествах

Пусть Φ — некоторое бесконечное поле и Φ^m — координатное пространство, состоящее из наборов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ из m элементов поля Φ. (Нас интересует главным образом случай, когда Φ — это поле R вещественных чисел или поле C комплексных чисел.)

Определение. Подмножество $V \subset \Phi^m$ называется *алгебраическим множеством*[1]), если V является геометрическим местом общих нулей некоторой совокупности полиномиальных функций на Φ^m.

Кольцо всех полиномиальных функций на Φ^m со значениями в Φ будем обозначать символом $\Phi[x_1, \ldots, x_m]$. Пусть

$$I(V) \subset \Phi[x_1, \ldots, x_m]$$

— идеал, состоящий из многочленов, обращающихся в нуль на всем V. Теорема Гильберта о базисе утверждает, что каждый идеал порождается (как $\Phi[x_1, \ldots, x_m]$-модуль) некоторой конечной совокупностью многочленов. Отсюда следует, что каждое алгебраическое множество V может быть определено с помощью конечной совокупности полиномиальных уравнений.

Важным следствием теоремы Гильберта о базисе является следующее

Утверждение 2.1. Условие обрыва убывающей цепочки. *Всякая вложенная последовательность* $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ *алгебраических множеств либо обрывается, либо стабилизируется* (*т. е.* $V_i = V_{i+1} = V_{i+2} = \ldots$) *после конечного числа шагов.*

Заметим, что объединение $V \cup V'$ любых двух алгебраических множеств V и V' в Φ^m также является алгебраическим множеством.

Непустое алгебраическое множество V называется *алгебраическим многообразием*, или *неприводимым алгебраическим множеством*, если его нельзя представить в виде объединения двух его собственных алгебраических подмножеств. Заметим, что множество V неприводимо тогда и только тогда, когда $I(V)$ — простой идеал. Если V неприводимо, то поле частных вида f/g, где f и g принадлежат области целостности

$$\Phi[x_1, \ldots, x_m]/I(V),$$

[1]) В алгебраической геометрии принято допускать в качестве точек алгебраического множества V также наборы из m элементов, принадлежащих некоторому фиксированному алгебраически замкнутому расширению поля Φ; но я не хочу делать этого.

называется *полем рациональных функций* на V. Его степень трансцендентности над Φ называется *алгебраической размерностью* множества V над Φ.

Отметим, что если W — собственное алгебраическое подмногообразие многообразия V, то размерность алгебраического многообразия W меньше размерности многообразия V (см., например, Ленг [1], стр. 29).

Пусть теперь $V \subset \Phi^m$ — произвольное непустое алгебраическое множество. Выберем конечное множество многочленов $f_1, \ldots, f_k$, порождающее идеал $I(V)$, и для каждого $\mathbf{x} \in V$ рассмотрим $(k \times m)$-матрицу $(\partial f_i/\partial x_j)$, вычисленную в точке $\mathbf{x}$. Пусть ρ — наибольший ранг, которого достигает эта матрица в точках множества V.

Определение[1]). Точка $\mathbf{x} \in V$ называется *неособой*, или *простой*, если ранг матрицы $(\partial f_i/\partial x_j)$ достигает в этой точке своего максимального значения ρ, и *особой*, или *сингулярной*, если

$$\operatorname{rank}(\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j) < \rho.$$

Заметим, что это определение не зависит от выбора образующих $\{f_1, \ldots, f_k\}$ идеала $I(V)$ (ибо если мы добавим еще один многочлен $f_{k+1} = g_1 f_1 + \ldots + g_k f_k$, то новая строка нашей матрицы будет линейной комбинацией старых строк).

Лемма 2.2. *Множество* $\Sigma(V)$ *всех особых точек множества* V *образует собственное алгебраическое подмножество* (*возможно, пустое*) *множества* V.

Доказательство. Точка $\mathbf{x}$ множества V принадлежит подмножеству $\Sigma(V)$ тогда и только тогда, когда каждый $(\rho \times \rho)$-минор матрицы $(\partial f_i/\partial x_j)$ обращается в нуль в точке $\mathbf{x}$. Таким образом, $\Sigma(V)$ определяется системой полиномиальных уравнений.

[1]) Это определение хорошо согласуется с интуитивным понятием особой точки только в тех случаях, когда V — алгебраическое многообразие или объединение алгебраических многообразий одинаковой размерности, а в других случаях — плохо. Например, если V — объединение некоторой точки и прямой, то неособой будет одна лишь эта точка.

Рассмотрим теперь случай вещественного или комплексного алгебраического множества.

Теорема 2.3 (Уитни). *Если Φ — поле вещественных (соотв. комплексных) чисел, то множество $V \setminus \Sigma(V)$ неособых точек множества V образует гладкое непустое многообразие. Это многообразие является вещественным (соотв. комплексным) аналитическим многообразием и имеет размерность $m - \rho$ над Φ.*

Изящное доказательство этой теоремы читатель может найти в работе Уитни [1].

Уитни показал, что в случае неприводимого множества V размерность аналитического многообразия $V \setminus \Sigma(V)$ над Φ в точности равна алгебраической размерности множества V над Φ.

Сформулируем еще один важный результат.

Теорема 2.4 (Уитни). *Для любой пары $V \supset W$ алгебраических множеств в вещественном или комплексном координатном пространстве разность $V \setminus W$ имеет самое большее конечное число топологических компонент.*

Например, само множество V имеет лишь конечное число компонент; гладкое многообразие $V \setminus \Sigma(V)$ также имеет лишь конечное число компонент.

Доказательство теоремы 2.4, лишь незначительно отличающееся от доказательства Уитни, приведено в дополнении А.

Рассмотрим три примера (см. рис. 3) кривых в вещественной плоскости, каждая из которых имеет единственную особую точку в начале координат.

Пример А. Алгебраическое многообразие, состоящее из всех пар $(x, y) \in R^2$, удовлетворяющих уравнению

$$y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$$

(см. рис. 3, А), дает пример особой точки наиболее простого и интуитивно ясного типа, а именно так называемой «двойной точки», в которой пересекаются

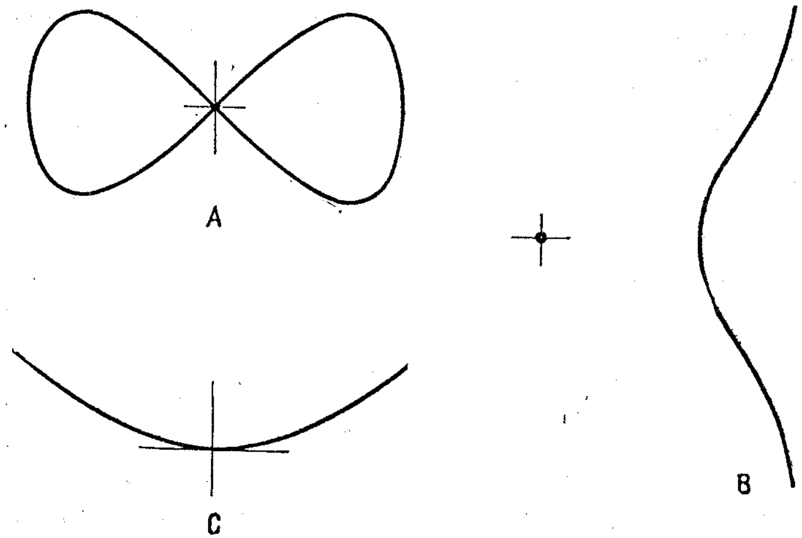

Рис. 3. А. Кривая $y = \pm x\sqrt{1 - x^2}$.
В. Кривая $y = \pm x\sqrt{x - 1}$.
С. Кривая $x^2 = y(1 + \sqrt{1 + y})$.

две вещественные аналитические ветви с различными касательными (а именно $y = x\sqrt{1 - x^2}$ и $y = -x\sqrt{1 - x^2}$)[1]. (Определение «ветви» см. в лемме 3.3.)

Пример В. Кубическая кривая

$$y^2 - x^2(x - 1) = 0$$

(см. рис. 3, В) имеет в начале координат изолированную точку и тем не менее является неприводимой.

Замечание. Над полем комплексных чисел примеры такого рода не могут иметь места, так как, согласно теореме Ритта, многообразие простых точек неприводимого комплексного алгебраического многообразия V всюду плотно в V (ср. Ван дер Варден [1], стр. 134).

Пример С. Уравнение $y^3 = x^{100}$, будучи разрешено относительно y, дает 33 раза дифференцируемую

[1]) Это легко видно из параметрического представления $x = \sin\theta$, $2y = \sin 2\theta$ (которое показывает, что наша кривая является «кривой Лиссажу»).

функцию от x, и тем не менее это уравнение определяет неприводимое алгебраическое многообразие $V \subset R^2$, которое имеет особую точку в начале координат. Уравнение $y^3 + 2x^2y - x^4 = 0$ (см. рис. 3, С), будучи разрешено относительно y, дает вещественную аналитическую функцию от x [1]), но и это уравнение определяет неприводимое алгебраическое многообразие, имеющее особую точку в начале координат.

Это явление станет более понятным, если мы позволим переменным x и y пробегать все комплексные числа. Действительно, комплексная кривая $y^3 = x^{100}$ является «заузленной» вблизи начала координат (см. § 1), а комплексная кривая $y^3 + 2x^2y = x^4$ имеет три различные неособые ветви, проходящие через начало координат.

З а м е ч а н и е. Комплексное алгебраическое многообразие в окрестности особой точки не может быть гладким многообразием.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что комплексное алгебраическое многообразие V является гладким многообразием класса $\mathscr{C}^1$ всюду в некоторой окрестности U начала координат в C^m. Касательное пространство в каждой простой точке этого гладкого многообразия $U \cap V$ является, очевидно, векторным пространством над полем комплексных чисел. Так как простые точки всюду плотны (см. замечание выше), отсюда следует по непрерывности, что (вещественное) касательное пространство $T_z \subset C^m$ многообразия $U \cap V$ в произвольной точке $\mathbf{z}$ является фактически комплексным векторным пространством (т. е. $T_\mathbf{z} = iT_\mathbf{z}$). В силу теоремы о неявной функции, мы видим, заменяя U некоторой меньшей окрестностью U' и перенумеровывая, если надо, координаты, что многообразие $U' \cap V$ можно рассматривать как график некоторого $\mathscr{C}^1$-гладкого отображения F открытого подмножества координатного пространства $(z_1, \ldots, z_n)$

[1]) Действительно, разрешая это уравнение относительно x^2, получаем $x^2 = \varphi(y) = y + y\sqrt{1+y}$; функция же φ^{-1} определена и аналитична всюду в интервале $[0, \infty)$.

в координатное пространство $(z_{n+1}, \ldots, z_m)$. Дифференциал отображения F в каждой точке является комплексно линейным отображением, следовательно, удовлетворяются уравнения Коши — Римана, и F является комплексно аналитическим отображением. Этим доказано, что $U' \cap V$ является комплексным многообразием.

Пусть, далее $h(\mathbf{z})$ — произвольная комплексная аналитическая функция, определенная в окрестности начала координат и обращающаяся в нуль на V, и пусть $f_1, \ldots, f_k$ — многочлены, порождающие простой идеал $I(V) \subset C[z_1, \ldots, z_m]$. Согласно локально аналитическому варианту теоремы о нулях (см., например, Ганнинг и Росси [1]), некоторая степень h^s может быть представлена в виде линейной комбинации $a_1f_1 + \ldots + a_kf_k$, где $a_1, \ldots, a_k$ — ростки аналитических функций. Переходя к большему кольцу $C[[\mathbf{z}]]$, состоящему из всех формальных степенных рядов в начале координат, получаем отсюда, что h^s заведомо принадлежит идеалу $C[[\mathbf{z}]]I(V)$. Но этот идеал можно представить как пересечение простых идеалов (см. Лефшец [1], стр. 91). Следовательно, и сама функция h должна принадлежать идеалу $C[[\mathbf{z}]]I(V)$, который порождается многочленами $f_1, \ldots, f_k$ в $C[[\mathbf{z}]]$. Беря производные, видим, что ковектор $dh(0)$ можно записать в виде комплексной линейной комбинации ковекторов $df_1(0), \ldots, df_k(0)$. В этом случае, очевидно, матрица $(\partial f_i/\partial z_j)$ имеет ранг $m - n$ в начале координат; следовательно, начало координат не может быть особой точкой алгебраического многообразия V.

Используя следующий результат, читатель легко проверит все утверждения о кривых из примеров А, В и С.

Л е м м а 2.5. *Пусть V — вещественное или комплексное алгебраическое множество, определяемое одним неприводимым полиномиальным уравнением $f(\mathbf{x}) = 0$. В вещественном случае дополнительно требуется* [1]), *чтобы множество V содержало регулярную точку многочлена f. Тогда каждый многочлен, обращающийся в нуль на V, кратен многочлену f.*

[1]) Для исключения таких примеров, как $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Следовательно, множество V неприводимо, и множество особых точек $\Sigma(V)$ является в точности пересечением множества V с множеством критических точек многочлена f.

Доказательство. В комплексном случае это непосредственно вытекает из теоремы Гильберта о нулях. В вещественном случае представим $V \subset R^m$ в виде объединения $V_1 \cup \ldots \cup V_k$ конечного числа алгебраических многообразий. Так как окрестность регулярной точки из V есть $(m-1)$-мерное многообразие, то стандартные топологические рассуждения показывают, что по крайней мере одно из многообразий V_j должно иметь размерность $m-1$. Следовательно, согласно упомянутому выше результату Уитни, поле частных $R[x_1, \ldots, x_m]/I(V_j)$ имеет над R степень трансцендентности $m-1$. С другой стороны, ясно, что факторкольцо кольца $R[x_1, \ldots, x_m]$ по главному простому идеалу (f) имеет над R степень трансцендентности $m-1$. Так как

$$(f) \subset I(V_j),$$

то с помощью обычных рассуждений получаем, что $(f) = I(V_j)$ (см., например, Ленг [1], стр. 29).

Следовательно, множество нулей многочлена f совпадает с алгебраическим многообразием V_j. Таким образом, $V = V_j$ и, значит, идеал $I(V)$ совпадает с главным идеалом (f).

Замечание. Утверждение леммы 2.5 верно для любого локально компактного поля, но для произвольного поля уже неверно. Например, неприводимый многочлен $x^2 - y - y^3$ над полем рациональных чисел не имеет критических точек в рациональной плоскости и имеет в точности один рациональный корень.

Перейдем теперь к следствиям из двух теорем Уитни.

Следствие 2.6. *Любое вещественное или комплексное алгебраическое множество V может быть*

представлено в виде конечного дизъюнктного объединения

$$V = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_p,$$

где каждое M_j является гладким многообразием с конечным числом компонент. Аналогично, любая разность $V \setminus W$ алгебраических многообразий может быть представлена в виде такого конечного объединения.

Доказательство. Пусть $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ — множество простых точек алгебраического множества V, $M_2 = \Sigma(V) \setminus \Sigma(\Sigma(V))$ — множество простых точек алгебраического множества $\Sigma(V)$ и т. д. Это построение должно оборваться после конечного числа шагов, так как, согласно утверждению 2.1, последовательность

$$V \supset \Sigma(V) \supset \Sigma(\Sigma(V)) \supset \ldots$$

стабилизируется. Ясно, что V является дизъюнктным объединением многообразий M_i.

Аналогично разность $V \setminus W$ может быть представлена в виде дизъюнктного объединения $M_1' \cup M_2' \cup \ldots \cup M_p'$, где каждое

$$M_i' = M_i \setminus (W \cap M_i),$$

по теореме 2.4, является гладким многообразием с конечным числом компонент.

Часто оказывается полезной следующая лемма. Пусть, как обычно, Φ — поле вещественных или комплексных чисел, $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ — многообразие простых точек алгебраического множества $V \subset \Phi^m$ и g — полиномиальная функция на Φ^m.

Лемма 2.7. *Множество критических точек*[1]) *ограничения $g|M_1$ функции g на M_1 равно пересечению многообразия M_1 с алгебраическим множеством W,*

[1]) *Критической точкой* гладкого отображения одного гладкого многообразия в другое называется точка первого многообразия, для которой индуцированное линейное отображение касательных пространств не сюръективно.

состоящим из всех точек $\mathbf{x} \in V$, *для которых матрица*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

имеет ранг $\leqslant \rho$, *где* $f_1, \ldots, f_k$ — *многочлены, порождающие идеал* $I(V)$.

Доказательство. В окрестности любой точки многообразия M_1 можно выбрать такую (вещественную или комплексную) аналитическую систему локальных координат $u_1, \ldots, u_m$ в Φ^m, в которой M_1 задается уравнениями $u_1 = \ldots = u_\rho = 0$. В этом случае $u_{\rho+1}, \ldots, u_m$ можно взять в качестве локальных координат на M_1. Заметим, что производная $\partial f_i/\partial u_j$, вычисленная в точке многообразия M_1, равна нулю для $j \geqslant \rho + 1$ (так как f_i равняется нулю на M_1). Поскольку матрица $(\partial f_i/\partial u_j)$ эквивалентна «по столбцам» матрице $(\partial f_i/\partial x_l)$ и, следовательно, имеет ранг ρ, то первые ρ столбцов матрицы $(\partial f_i/\partial u_j)$ должны быть линейно независимы.

Далее, расширенная матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial g}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

будет иметь тот же самый ранг ρ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial g}{\partial u_{\rho+1}} = \ldots = \frac{\partial g}{\partial u_m} = 0,$$

другими словами, тогда и только тогда, когда данная точка является критической точкой отображения $g|M_1$. Так как новая матрица эквивалентна «по столбцам» матрице из леммы 2.7, этим доказательство завершается.

Следствие 2.8. *Полиномиальная функция* g *на* $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ *может принимать самое большее конечное число критических значений.*

(*Критическим значением* $g(\mathbf{x}) \in \Phi$ называется образ при отображении g критической точки $\mathbf{x}$.)

Доказательство. Множество критических точек отображения $g|M_1$ можно представить в виде разности $W \setminus \Sigma(V)$ алгебраических множеств; следовательно, оно представимо в виде конечного объединения гладких многообразий

$$W \setminus \Sigma(V) = M_1' \cup \ldots \cup M_p',$$

где каждое многообразие M_i' имеет не более конечного числа компонент.

Каждая точка $\mathbf{x} \in M_i'$ является критической точкой гладкой функции $g|M_i$, поэтому и подавно она является критической точкой функции $g|M_i'$. Так как все точки многообразия M_i' критические, отсюда следует, что функция g постоянна на каждой компоненте многообразия M_i'. Следовательно, образ $g(M_i')$ является конечным множеством. Но объединение

$$g(M_1') \cup \ldots \cup g(M_p')$$

— это в точности множество всех критических значений функции $g|M_1$, чем и завершается доказательство.

Пусть опять V — произвольное вещественное или комплексное алгебраическое множество, и пусть $\mathbf{x}^0$ — либо простая точка множества V, либо изолированная точка множества особых точек $\Sigma(V)$.

Следствие 2.9. *Каждая достаточно малая сфера S_ε с центром в точке $\mathbf{x}^0$ пересекается с V по гладкому многообразию (возможно, пустому)* [1].

Доказательство. Для доказательства в вещественном случае применим следствие 2.8, взяв в качестве g полиномиальную функцию

$$r(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \|^2.$$

Если ε^2 меньше любого положительного критического значения функции $r | (V \setminus \Sigma(V))$, то ε^2 является регулярным значением, и, следовательно, его прообраз

$$r^{-1}(\varepsilon^2) \cap (V \setminus \Sigma(V)) = S_\varepsilon \cap (V \setminus \Sigma(V))$$

есть некоторое гладкое многообразие K. Но если ε достаточно мало, то сфера S_ε не будет пересекать $\Sigma(V)$ и, следовательно, K будет совпадать с $S_\varepsilon \cap V$.

Отсюда сразу следует утверждение для комплексного случая, ибо каждое комплексное алгебраическое многообразие в C^m можно рассматривать как вещественное алгебраическое многообразие в R^{2m}.

Обозначим через D_ε замкнутый диск, состоящий из всех точек $\mathbf{x}$, для которых $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \leqslant \varepsilon$. Пусть опять $\mathbf{x}^0$ — либо простая точка, либо изолированная особая точка алгебраического многообразия V.

Теорема 2.10. *Для достаточно малых ε пересечение многообразия V с D_ε гомеоморфно конусу над $K = V \cap S_\varepsilon$. Фактически пара $(D_\varepsilon, V \cap D_\varepsilon)$ гомеоморфна паре, состоящей из конуса над S_ε и конуса над K.*

Здесь под *конусом над K* (обозначение cone (K)) мы понимаем объединение всех прямолинейных отрезков

$$t\mathbf{k} + (1-t)\mathbf{x}^0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

[1]) Фактически из доказательства будет следовать, что пересечение V с S_ε является трансверсальным, т. е. что каждый вектор с началом в точке многообразия $V \cap S_\varepsilon$ может быть представлен в виде суммы вектора, касательного к V, и вектора, касательного к S_ε.

соединяющих точки $\mathbf{k} \in K$ с фиксированной точкой $\mathbf{x}^0$. Множество cone (S_ε), определяемое аналогично, очевидно, совпадает с D_ε.

Таким образом, если мы сможем описать многообразие K и то, каким способом K вложено в S_ε, то мы будем иметь полное описание топологии алгебраического многообразия V и вложения многообразия V в его координатное пространство во всей окрестности точки $\mathbf{x}^0$. Например, если K — топологическая сфера, то V в окрестности точки $\mathbf{x}^0$ должно быть топологическим многообразием.

Мы дадим подробное доказательство теоремы 2.10, так как аналогичные методы будут играть важную роль и далее, в § 4, 5 и 11.

Доказательство теоремы 2.10. Как и ранее, достаточно рассмотреть лишь вещественный случай. Пусть опять ε настолько мало, что диск D_ε не содержит ни особых точек алгебраического многообразия V, ни критических точек функции $r | (V \setminus \Sigma(V))$, за исключением самой точки $\mathbf{x}^0$.

Построим гладкое векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на проколотом диске $D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$, обладающее следующими двумя свойствами: во-первых, для всех $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ направлен «прочь» от точки $\mathbf{x}^0$, т. е. евклидово скалярное произведение

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle$$

строго положительно; во-вторых, вектор $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ касателен к многообразию $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$ всякий раз, как точка $\mathbf{x}$ принадлежит M_1.

Построим сначала такое векторное поле локально. Для любой точки $\mathbf{x}^\alpha \in D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$ построим векторное поле $\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x})$ в окрестности U^α точки $\mathbf{x}^\alpha$ так, чтобы выполнялись указанные два свойства.

Если $\mathbf{x}^\alpha$ не принадлежит многообразию V, то мы можем просто положить

$$\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$$

для всех $\mathbf{x}$ из некоторой окрестности $U^\alpha \subset R^m \setminus V$.

Если $\mathbf{x}^\alpha$ принадлежит многообразию V и, следовательно, принадлежит многообразию M_1, то выберем систему локальных координат $u_1, \ldots, u_m$ в окрестности точки $\mathbf{x}^\alpha$ так, чтобы M_1 задавалось уравнениями $u_1 = \ldots = u_\rho = 0$. Поскольку $\mathbf{x}^\alpha$ не является критической точкой функции $r|M_1$, где $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2$, отсюда следует, что по крайней мере одна из частных производных

$$\frac{\partial r}{\partial u_{\rho+1}}, \ \ldots, \ \frac{\partial r}{\partial u_m}$$

должна быть отлична от нуля в точке $\mathbf{x}^\alpha$ (ср. доказательство леммы 2.7). Пусть, например, производная $\partial r/\partial u_h$ отлична от нуля в $\mathbf{x}^\alpha$, и пусть U^α — малая связная окрестность, в любой точке которой $\partial r/\partial u_h \neq 0$. Возьмем в качестве $\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x})$ вектор

$$\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x}) = \pm\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_h}, \ \ldots, \ \frac{\partial x_m}{\partial u_h}\right),$$

касательный к u_h-координатной кривой, проходящей через точку $\mathbf{x}$; знак плюс или минус выберем в зависимости от знака производной $\partial r/\partial u_h$. Этот вектор $\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x})$ является, очевидно, касательным к M_1 для любой точки $\mathbf{x} \in M_1$, так как вся u_h-координатная кривая лежит в M_1. Далее, скалярное произведение

$$2\langle \mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} - \mathbf{x}^0\rangle = \sum 2(x_i - x_i^0)\, v_i^\alpha = \sum \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\left(\pm \frac{\partial x_i}{\partial u_h}\right)$$

равно $\pm\partial r/\partial u_h$ и, следовательно, больше нуля для всех $\mathbf{x} \in U^\alpha$.

Выберем теперь гладкое разбиение единицы [1] $\{\lambda^\alpha\}$ на $D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$, такое, что (носитель $\lambda^\alpha) \subset U^\alpha$. Тогда векторное поле

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum \lambda^\alpha(\mathbf{x})\, \mathbf{v}^\alpha(\mathbf{x})$$

[1]) То есть такие гладкие вещественные функции λ^α на $D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$, что

$$\lambda^\alpha(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad \sum_\alpha \lambda^\alpha(\mathbf{x}) = 1,$$

причем каждая точка $\mathbf{x} \in D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$ имеет окрестность, в которой лишь конечное число функций λ^α отлично от нуля (см., например, де Рам [1] или Ленг [2]).

на $D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$, очевидно, обладает требуемыми свойствами.

Нормализуем наше векторное поле, положив

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\langle 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \ \mathbf{v}(\mathbf{x})\rangle},$$

и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}).$$

Найдем гладкие кривые $\mathbf{x} = \mathbf{p}(t)$, определенные, скажем, для $\alpha < t < \beta$, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{p}(t)).$$

Заметим, что для любого данного решения $\mathbf{p}(t)$ производная от композиции $r(\mathbf{p}(t))$ задается формулой

$$\frac{dr}{dt} = \sum \frac{\partial r}{\partial x_i} w_i(\mathbf{x}) = \langle 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \ \mathbf{w}(\mathbf{x})\rangle = 1,$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{p}(t)$. Поэтому функция $r(\mathbf{p}(t))$ должна иметь вид $t + \mathrm{const}$. Таким образом, вычтя, если надо, постоянную из параметра t, мы можем считать, что

$$r(\mathbf{p}(t)) = \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{x}^0\|^2 = t.$$

Это решение $\mathbf{p}(t)$ можно продолжить на весь интервал $0 < t \leqslant \varepsilon^2$.

[Доказательство. Можно считать, что векторное поле $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ построено на открытом множестве, несколько большем, чем $D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$, так что граничные точки диска D_ε не будут вызывать каких-либо дополнительных трудностей. По лемме Цорна [1]) данное решение $\mathbf{p}(t)$ можно продолжить на некоторый максимальный открытый интервал $\alpha' < t < \beta'$. Пусть, например, $\beta' \leqslant \varepsilon^2$; покажем, что решение $\mathbf{p}(t)$ можно продолжить на несколько больший интервал, в противоречие с определением β'. Так как точки $\mathbf{p}(t)$ для $\alpha' < t < \beta'$ принадлежат все компактному множеству D_ε, то

[1]) В этом месте можно обойтись и без леммы Цорна.

при $t \to \beta'$ существует по крайней мере одна предельная точка $\mathbf{x}' \in \{\mathbf{p}(t)\}$; ясно, что $r(\mathbf{x}') = \beta' \neq 0$, т. е. $\mathbf{x}' \in D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$. Применим теперь теорему локального существования, единственности и гладкости[1]) для дифференциального уравнения $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{w}(\mathbf{x})$ в окрестности точки $\mathbf{x}'$. Эта теорема утверждает, что для каждой точки $\mathbf{x}''$ в некоторой окрестности U точки $\mathbf{x}'$ и любого t'' в некотором достаточно малом открытом интервале I, содержащем β', существует единственное решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}(t), \quad t \in I,$$

удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{q}(t'') = \mathbf{x}''$, причем это решение $\mathbf{q}(t)$ является гладкой функцией от $\mathbf{x}''$, t'' и t. Чтобы применить эту теорему, выберем $t'' \in (\alpha', \beta') \cap I$ и возьмем $\mathbf{x}'' = \mathbf{p}(t'')$. По теореме локальной единственности $\mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(t)$ для всех t в общей области определения $(\alpha', \beta') \cap I$. Таким образом, решения $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ можно объединить и тем самым получить решение, которое определено для всех t в большем интервале $(\alpha', \beta') \cup I$. Мы пришли к противоречию; следовательно, $\beta' > \varepsilon^2$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\alpha' = 0$.]

Заметим, далее, что решение $\mathbf{p}(t)$, $0 < t \leqslant \varepsilon^2$ однозначно определяется начальным значением

$$\mathbf{p}(\varepsilon^2) \in S_\varepsilon.$$

Для каждого $\mathbf{a} \in S_\varepsilon$ *обозначим через*

$$P(\mathbf{a}, t), \quad 0 < t \leqslant \varepsilon^2,$$

единственное решение $\mathbf{p}(t)$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$\mathbf{p}(\varepsilon^2) = P(\mathbf{a}, \varepsilon^2) = \mathbf{a}.$$

Очевидно, что так определенная функция P диффеоморфно отображает произведение $S_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2]$ на проколотый диск $D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0$. Кроме того, поскольку векторное поле $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ является касательным к M_1 для всех $\mathbf{x} \in M_1$, отсюда следует, что каждая кривая-реше-

[1]) См., например, Грэйвс [1] или Ленг [2].

ние, соприкасающаяся с многообразием M_1, должна лежать в M_1. Значит, P диффеоморфно отображает произведение

$$K \times (0, \varepsilon^2] \text{ на } V \cap (D_\varepsilon \setminus \mathbf{x}^0).$$

Наконец, заметим, что $P(\mathbf{a}, t)$ равномерно по $\mathbf{a}$ стремится к $\mathbf{x}^0$ при $t \to 0$. Следовательно, отображение

$$t\mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{x}^0 \mapsto P(\mathbf{a}, t\varepsilon^2),$$

определенное для $0 < t \leqslant 1$, однозначно продолжается до гомеоморфизма конуса cone (S_ε) в диск D_ε. Более того, этот гомеоморфизм отображает cone (K) на $V \cap D_\varepsilon$. Этим завершается доказательство теоремы 2.10.

З а м е ч а н и е 2.11. По-видимому, теорема 2.10 остается верной даже в том случае, когда $\mathbf{x}^0$ не является изолированной особой точкой алгебраического множества V. Известно, что каждое алгебраическое множество триангулируемо, так что надлежащим образом выбранная окрестность любой точки гомеоморфна конусу над некоторым комплексом (см., например, Лоясевич [2]).

В оставшейся части этого параграфа мы исследуем до конца довольно скучный случай неособой точки множества V, только для того, чтобы удостовериться, что ничего неожиданного здесь не происходит.

Л е м м а 2.12. *Если* $\mathbf{x}^0$ — *простая точка алгебраического множества* V, *то пересечение* $K = V \cap S_\varepsilon$ *является незаузленной сферой в* S_ε *для всех достаточно малых* ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что гладкая функция $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2$, ограниченная на $M_1 = V \setminus \Sigma(V)$, имеет невырожденную критическую точку в $\mathbf{x}^0$. Следовательно, по лемме Марстона Морса, существует система локальных координат $u_1, \ldots, u_k$ в M_1 вблизи $\mathbf{x}^0$, такая, что

$$r(\mathbf{x}) = u_1^2 + \ldots + u_k^2$$

(см., например, Милнор [2], § 2.2). Отсюда немедленно следует, что многообразие $K = V \cap S_\varepsilon$ диффеоморфно сфере, состоящей из всех точек $(u_1, \ldots, u_k)$, для которых $u_1^2 + \ldots + u_k^2 = \varepsilon^2$.

Но рассуждения Морса можно применить также к паре многообразий $M_1 \subset R^m$. А именно, существуют локальные координаты $u_1, \ldots, u_m$ в R^m вблизи точки $\mathbf{x}^0$, такие, что

$$r(\mathbf{x}) = u_1^2 + \ldots + u_m^2,$$

причем V в этой окрестности задается уравнениями $u_{k+1} = \ldots = u_m = 0$. Доказательство этого усиленного варианта леммы Морса получается непосредственным обобщением, и мы предоставляем читателю самому провести его.

Таким образом, пара (S_ε, K) диффеоморфна паре, состоящей из сферы и экваториальной подсферы в u-координатном пространстве. Тем самым лемма 2.12 доказана.

Рассмотрим теперь частный случай простой точки $\mathbf{z}^0$ комплексной гиперповерхности

$$V = f^{-1}(0) \subset C^{n+1}$$

(ср. § 1). Мы хотим изучить множество

$$F_0 = \varphi^{-1}(1) = f^{-1}(R_+) \cap S_\varepsilon,$$

где отображение $\varphi: S_\varepsilon \setminus K \to S^1$ задается формулой $\varphi(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})/|f(\mathbf{z})|$.

Лемма 2.13. *Если центр $\mathbf{z}^0$ сферы S_ε является регулярной точкой многочлена f, то «слой» F_0 диффеоморфен R^{2n}.*

Доказательство. Применяя стандартные рассуждения теории Морса к паре многообразий $V \subset f^{-1}(R)$ вблизи точки $\mathbf{z}^0$, получаем, что существуют локальные координаты $u_1, \ldots, u_{2n+1}$ для $f^{-1}(R)$, такие, что

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^0\|^2 = u_1^2 + \ldots + u_{2n+1}^2,$$

причем V задается уравнением $u_1 = 0$. Множеству

$$\varphi^{-1}(1) = f^{-1}(R_+) \cap S_\varepsilon$$

отвечает при этом открытая полусфера

$$\pm u_1 > 0, \quad u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2n+1}^2 = \varepsilon^2,$$

которая, очевидно, диффеоморфна R^{2n}, чем и завершается доказательство.

Из теоремы о расслоении (см. § 4) следует, что отображение

$$\varphi: S_\varepsilon \setminus K \to S^1$$

является проекцией некоторого тривиального расслоения, так как по теореме Стюарта любое гладкое ориентируемое расслоение над S^1 со слоем, диффеоморфным евклидову пространству, тривиально (см. Стюарт [1], следствие 1). Можно также заметить, что любое гладкое расслоение над S^1 характеризуется некоторым диффеоморфизмом слоя (см. лемму 8.4), а любой диффеоморфизм евклидовых пространств гладко изотопен либо тождественному отображению, либо отражению (см. Стюарт [1], теорема 1, или Милнор [4]).

Этим мы завершаем обсуждение случая регулярной точки.

§ 3. Лемма об отборе кривых

Цель этого параграфа — доказать следующий результат.

Пусть $V \subset R^m$ — вещественное алгебраическое множество и $U \subset R^m$ — открытое множество, определенное конечным числом полиномиальных неравенств:

$$U = \{\mathbf{x} \in R^m \mid g_1(\mathbf{x}) > 0, \ldots, g_l(\mathbf{x}) > 0\}.$$

Лемма 3.1 (об отборе кривых). *Если $U \cap V$ содержит точки, сколь угодно близкие к началу координат (т. е. если начало координат принадлежит* *замыканию множества* $U \cap V$), *то существует вещественная аналитическая кривая*

$$\mathbf{p}\colon [0, \varepsilon) \to R^m,$$

такая, что $\mathbf{p}(0) = 0$ *и* $\mathbf{p}(t) \in U \cap V$ *для всех* $t > 0$.

(Ср. Брюа и Картан [1], а также Уоллес [2].)

Доказательство. Предположим сначала, что размерность алгебраического множества V больше или равна 2. Мы построим собственное алгебраическое подмножество $V_1 \subset V$, такое, что начало координат принадлежит замыканию множества $U \cap V_1$. Этот процесс можно будет затем повторять до тех пор, пока мы не найдем алгебраическое подмножество V_q размерности $\leqslant 1$, такое, что начало координат принадлежит замыканию множества $U \cap V_q$.

Можно считать, что V неприводимо, ибо если V есть объединение двух собственных алгебраических подмножеств, то в качестве V_1 можно взять одно из этих подмножеств.

Мы можем также считать, что открытое множество U не содержит ни одной точки из части множества особенностей $\Sigma(V)$, заключенной внутри некоторой окрестности D_η начала координат, ибо в противном случае мы можем в качестве V_1 взять $\Sigma(V)$.

Будет удобно использовать язык дифференциалов. По определению *дифференциалом* $df(\mathbf{x})$ *многочлена* f в точке $\mathbf{x}$ называется элемент двойственного векторного пространства

$$\mathrm{Hom}_R(R^m, R),$$

который соответствует вектор-строке

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right),$$

вычисленной в точке $\mathbf{x}$.

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — образующие идеала $I(V)$. Напомним, что *множеством особенностей* $\Sigma(V)$ алгебраического многообразия V называется множество всех $\mathbf{x} \in V$, для которых

$$\operatorname{rank}\{df_1(\mathbf{x}), \ldots, df_k(\mathbf{x})\} < \rho,$$

где размерность алгебраического многообразия V равна $m - \rho$.

Нам понадобятся две вспомогательные функции

$$r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2, \quad g(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})\, g_2(\mathbf{x}) \ldots g_l(\mathbf{x}).$$

Пусть V' — множество всех точек $\mathbf{x} \in V$, для которых

$$\operatorname{rank}\{df_1(\mathbf{x}), \ldots, df_k(\mathbf{x}), dr(\mathbf{x}), dg(\mathbf{x})\} \leqslant \rho + 1.$$

Докажем следующую лемму:

Лемма 3.2. *Пересечение* $U \cap V'$ *также содержит точки, сколь угодно близкие к началу координат.*

Доказательство. По предположению существуют сколь угодно малые сферы S_ε с центром в начале координат, внутри которых содержатся точки множества $U \cap V$. Возьмем какую-нибудь такую сферу S_ε и рассмотрим компактное множество, состоящее из всех точек $\mathbf{x} \in V \cap S_\varepsilon$, для которых

$$g_1(\mathbf{x}) \geqslant 0, \ \ldots, \ g_l(\mathbf{x}) \geqslant 0.$$

Непрерывная функция g должна достичь максимума в некоторой точке $\mathbf{x}'$ этого компактного множества; ясно, что $\mathbf{x}' \in U$.

Покажем, что $\mathbf{x}' \in V'$.

Заметим сначала, что сфера S_ε пересекает множество $U \cap V$ по гладкому многообразию размерности $m - \rho - 1$ и что

$$\operatorname{rank}\{df_1(\mathbf{x}), \ldots, df_k(\mathbf{x}), dr(\mathbf{x})\} = \rho + 1$$

в любой точке $\mathbf{x} \in U \cap V \cap S_\varepsilon$. Это непосредственно вытекает из доказательств леммы 2.7 и следствия 2.9 и того факта, что при достаточно малом ε множество $U \cap S_\varepsilon$ не содержит особых точек алгебраического многообразия V.

Теперь, рассуждая как и при доказательстве леммы 2.7, мы получаем, что множество критических точек функции $g \mid U \cap V \cap S_\varepsilon$ совпадает в точности с множеством тех точек из $U \cap V \cap S_\varepsilon$, которые лежат в V'. Но функция $g \mid U \cap V \cap S_\varepsilon$ достигает своего максимума в точке $\mathbf{x}'$. Поэтому $\mathbf{x}'$ является критической точкой и, следовательно, принадлежит множеству V'.

Этим доказательство леммы 3.2 завершено.

Таким образом, если V' является собственным подмножеством множества V, то оно удовлетворяет нашим требованиям. Остается невыясненным вопрос, как быть в случае $V = V'$.

Мы можем опять проделать указанное выше построение, используя вместо функции g функцию

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_i g(x_1, \ldots, x_m).$$

Пусть V'_i — множество всех $\mathbf{x} \in V$, для которых

$$\operatorname{rank}\{df_1(\mathbf{x}), \ldots, df_k(\mathbf{x}), dr(\mathbf{x}), d(x_i g)(\mathbf{x})\} \leqslant \rho + 1.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что начало координат принадлежит замыканию множества $U \cap V'_i$.

Таким образом, мы нашли требуемое алгебраическое подмножество $V_1 \subset V$ для всех случаев, за исключением случая

$$V = V' = V'_1 = \ldots = V'_m.$$

Утверждение. *Случай $V = V' = V'_1 = \ldots = V'_m$ может встретиться только тогда, когда размерность $m - \rho$ алгебраического многообразия V равна единице.*

Доказательство. Мы можем, очевидно, выбрать точку $\mathbf{x}' \in U \cap V$ так, чтобы

$$\operatorname{rank}\{df_1(\mathbf{x}'), \ldots, df_k(\mathbf{x}'), dr(\mathbf{x}')\} = \rho + 1$$

(ср. доказательство леммы 3.2). Если $V = V'$, то $\mathbf{x}' \in V'$ и, следовательно, дифференциал $dg(\mathbf{x}')$ должен принадлежать $(\rho + 1)$-мерному векторному пространству, натянутому на векторы

$$\{df_1(\mathbf{x}'), \ldots, df_k(\mathbf{x}'), dr(\mathbf{x}')\}.$$

Аналогично, если $V = V'_i$, то дифференциал $d(x_i g)(\mathbf{x}')$ должен принадлежать этому векторному пространству. Используя тождество

$$d(x_i g) = (dx_i) g + x_i (dg)$$

и тот факт, что $g(\mathbf{x}') \neq 0$ (так как $\mathbf{x}' \in U$), мы получаем отсюда, что дифференциал $dx_i(\mathbf{x}')$ также принадлежит этому $(\rho + 1)$-мерному векторному пространству. Но дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_m$ образуют базис для всего m-мерного векторного пространства дифференциалов в точке $\mathbf{x}'$. Поэтому подмножество, натянутое на $df_1(\mathbf{x}'), \ldots, df_k(\mathbf{x}')$ и $dr(\mathbf{x}')$, должно совпадать со всем пространством, а размерность $\rho + 1$ его должна равняться m. Это показывает, что размерность $m - \rho$ алгебраического многообразия V равна 1.

Теперь мы можем воспользоваться классическим локальным описанием 1-мерных алгебраических многообразий:

Лемма 3.3. *Пусть $\mathbf{x}^0$ — неизолированная точка вещественного (соотв. комплексного) одномерного алгебраического многообразия V. Тогда надлежащим образом выбранная окрестность точки $\mathbf{x}^0$ в V является объединением конечного числа «ветвей», которые пересекаются только в точке $\mathbf{x}^0$. Каждая такая ветвь гомеоморфна открытому интервалу вещественных чисел (соотв. открытому диску комплексных чисел) относительно гомеоморфизма $\mathbf{x} = \mathbf{p}(t)$, который задается степенным рядом*

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{x}^0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 + \ldots,$$

сходящимся при $|t| < \varepsilon$.

Замечание. Пусть k — наименьший индекс, такой, что V не содержится в координатной гиперплоскости $x_k = \text{const}$. Тогда параметризацию $\mathbf{p}$ можно всегда выбрать таким образом, чтобы $x_k = p_k(t)$ было полиномиальной функцией вида

$$p_k(t) = \text{const} \pm t^{\mu},$$

где $\mu \geqslant 1$[1]. Более того, $\mathbf{p}$ можно всегда выбрать так, чтобы совокупность $\{i \mid \mathbf{a}_i \neq 0\}$ показателей имела наибольшим общим делителем единицу. В этом случае степенной ряд $\mathbf{p}$ определен однозначно с точностью до знака параметра t (соотв. с точностью до умножения t на корни из единицы в комплексном случае).

Доказательство. Для комплексной кривой в C^2 это доказано, например, у Ван дер Вардена [2], § 14. Случай комплексной кривой в C^m, $m > 2$, может быть рассмотрен точно таким же способом.

К случаю вещественного одномерного алгебраического многообразия $V \subset R^m$ можно подойти следующим образом. Пусть V_C — наименьшее комплексное алгебраическое множество в C^m, содержащее V. Легко проверить, что V_C неприводимо и имеет комплексную размерность 1 и что множество $R^m \cap V_C$ вещественных точек в V_C совпадает с множеством V. Для каждой ветви множества V_C мы можем выбрать комплексную параметризацию

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(t) = \mathbf{x}^0 + \left(0, \ldots, 0, t^\mu, \sum_i a_{k+1, i} t^i, \ldots, \sum_i a_{m, i} t^i\right).$$

Поставим вопрос, для каких значений комплексного параметра t вектор $\mathbf{p}(t)$ будет вещественным. Очевидно, что k-я компонента t^μ вещественна тогда и только тогда, когда t можно представить в виде произведения 2μ-го корня ξ из единицы и вещественного числа s. Но для любого такого корня ξ, подставив $t = \xi s$ в степенной ряд, мы получим новый комплексный степенной ряд $\mathbf{x}^0 + \Sigma(\mathbf{a}_i \xi^i) s^i$ от вещественной переменной s. Если коэффициенты этого ряда $\mathbf{a}_i \xi^i$ вещественны, то, очевидно, $\mathbf{p}(\xi s) \in R^m$. Но если некоторый вектор-коэффициент $\mathbf{a}_i \xi^i$ не является вещественным, то $\mathbf{p}(\xi s) \notin R^m$ для всех малых ненулевых значений s. Следовательно, любая ветвь алгебраического множества V_C пересекает в R^m не более чем конечное число ветвей (фактически не более одной ветви) вещественного алгебраического многообразия V, чем лемма 3.3 и доказана.

Замечание. По-видимому, утверждение леммы 3.3 остается верным над любым локально компактным полем, хотя приведенное доказательство в этом случае неприменимо.

Теперь мы готовы завершить доказательство леммы 3.1 об отборе кривых. Предположим, что V содержит точки $\mathbf{x}$, сколь угодно близкие к началу координат и принадлежащие U, т. е. такие, что

$$g_1(\mathbf{x}) > 0, \ \ldots, \ g_l(\mathbf{x}) > 0;$$

предположим также, что V имеет размерность 1. Тогда одна из конечного числа ветвей множества V, проходящих через начало координат, должна содержать точки множества U, сколь угодно близкие к началу координат. Пусть

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(t), \quad |t| < \varepsilon,$$

— вещественная аналитическая параметризация этой ветви. Заметим, что для каждого g_i вещественная аналитическая функция $g_i(\mathbf{p}(t))$ либо > 0 для всех t из некоторого интервала $0 < t < \varepsilon'$, либо $\leqslant 0$ для всех t из интервала $0 < t < \varepsilon'$. Поэтому полуветвь $\mathbf{p}(0, \varepsilon')$ либо принадлежит множеству U, либо не пересекается с U для достаточно малых ε'. Аналогично, полуветвь $\mathbf{p}(-\varepsilon', 0)$ либо принадлежит множеству U, либо не пересекается с ним.

Но мы предположили, что ветвь $\mathbf{p}(-\varepsilon, \varepsilon)$ содержит точки множества U, сколь угодно близкие к началу координат, поэтому по крайней мере одна из этих двух полуветвей должна принадлежать множеству U. Этим завершается доказательство леммы 3.1.

В заключение этого параграфа дадим одно типичное применение леммы 3.1, которое понадобится нам в § 11.

Следствие 3.4. *Если $f \geqslant 0$ и $g \geqslant 0$ — неотрицательные полиномиальные функции на R^m, обращающиеся в нуль в точке $\mathbf{x}^0$, то для точек $\mathbf{x}$, принадлежа-*

[1]) Это тесно связано с разложением в дробно степенной ряд Пюизо $\mathbf{x} = \mathbf{p}\left(\left(\pm (x_k - x_k^0)\right)^{1/\mu}\right)$.

щих некоторой окрестности D_ε точки $\mathbf{x}^0$, два дифференциала $df(\mathbf{x})$ и $dg(\mathbf{x})$ не могут иметь строго противоположных направлений, за исключением того тривиального случая, когда по крайней мере один из них равен нулю.

Доказательство. Пусть U — открытое множество, состоящее из всех точек $\mathbf{x}$, для которых скалярное произведение

$$\sum_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

отрицательно, V — алгебраическое множество, состоящее из всех таких точек $\mathbf{x}$, для которых

$$\operatorname{rank}\{df(\mathbf{x}),\ dg(\mathbf{x})\} \leqslant 1.$$

Таким образом, $U \cap V$ является множеством тех $\mathbf{x}$, для которых дифференциалы $df(\mathbf{x})$ и $dg(\mathbf{x})$ направлены в точно противоположные стороны.

Если множество $U \cap V$ содержит точки, сколь угодно близкие к точке $\mathbf{x}^0$, то должна существовать целая вещественная аналитическая кривая

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(t), \quad 0 \leqslant t < \varepsilon,$$

которая вся состоит из таких точек, за исключением точки $\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}(0)$.

Заметим теперь, что для любой точки $\mathbf{x} \in U$ справедливы неравенства $f(\mathbf{x}) > 0$ и $g(\mathbf{x}) > 0$, ибо если неотрицательная функция f обращается в нуль в точке $\mathbf{x}$, то дифференциал $df(\mathbf{x})$ также должен обращаться в нуль, и, значит, точка $\mathbf{x}$ не может принадлежать множеству U.

Следовательно,

$$f(\mathbf{p}(t)) > 0 \text{ для } t > 0,$$

а так как функция $f \circ \mathbf{p}$ вещественна и аналитична, отсюда следует, что и дифференциал $df(\mathbf{p}(t))/dt > 0$ для малых положительных значений параметра t. Аналогично, дифференциал $dg(\mathbf{p}(t))/dt$ положителен для малых положительных значений параметра t. Но

$$\frac{df}{dt} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dp_i}{dt}, \quad \frac{dg}{dt} = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dp_i}{dt},$$

где вектор-строка $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)$ для всех $t > 0$ отличается от $(\partial g/\partial x_1, \ldots, \partial g/\partial x_m)$ лишь на отрицательный множитель. Следовательно, df/dt и dg/dt должны иметь противоположный знак.

Это противоречие показывает, что исходная предпосылка неверна, т. е. что $\mathbf{x}^0$ не может быть предельной точкой множества $U \cap V$.

§ 4. Теорема о расслоении

Определим *градиент* аналитической функции $f(z_1, \ldots, z_m)$ от m комплексных переменных как m-мерный вектор

$$\operatorname{\mathbf{grad}} f = \left(\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)}, \ldots, \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_m}\right)}\right),$$

j-я компонента которого комплексно сопряжена частной производной $\partial f/\partial z_j$. Это определение выбрано так, чтобы формула дифференцирования сложной функции для случая производной от функции f вдоль пути $\mathbf{z} = \mathbf{p}(t)$ имела вид

$$\frac{df(\mathbf{p}(t))}{dt} = \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt},\ \operatorname{\mathbf{grad}} f \right\rangle,$$

где

$$\langle \mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \sum a_j \overline{b}_j$$

— эрмитово скалярное произведение. Другими словами, *производная по направлению* от функции f вдоль вектора $\mathbf{v}$ в точке $\mathbf{z}$ равна скалярному произведению $\langle \mathbf{v}, \operatorname{\mathbf{grad}} f(\mathbf{z})\rangle$.

Обозначим теперь через K пересечение множества нулей функции f со сферой S_ε, состоящей из всех точек $\mathbf{z} \in C^m$, для которых $\|\mathbf{z}\| = \varepsilon$. Отобразим дополнение $S_\varepsilon \setminus K$ в единичную окружность S^1 по формуле

$$\varphi(\mathbf{z}) = \frac{f(\mathbf{z})}{|f(\mathbf{z})|}.$$

Лемма 4.1. *Критические точки отображения* φ: $S_\varepsilon \setminus K \to S^1$ — *это в точности те точки* $\mathbf{z} \in S_\varepsilon \setminus K$, *для которых вектор* $i\,\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$ *является вещественным кратным вектора* $\mathbf{z}$ (*т. е. отличается от вектора* $\mathbf{z}$ *лишь на вещественный числовой множитель*).

(Логарифм функции f является, конечно, многозначной функцией, но локально логарифм можно определить как однозначную функцию; градиент же логарифма

$$\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{grad}\, f(\mathbf{z})}{\overline{f}(\mathbf{z})}$$

корректно определен уже всюду. Аналогичные замечания применимы и к функции $\theta(\mathbf{z})$, рассматриваемой ниже.)

Доказательство леммы 4.1. Положим $f(\mathbf{z})/|f(\mathbf{z})| = e^{i\theta(\mathbf{z})}$ и заметим, что угол $\theta(\mathbf{z})$ можно отождествить с вещественной частью выражения $-i \log f(\mathbf{z})$. [Чтобы убедиться в этом, умножим равенство

$$i\theta = \log\left(\frac{f}{|f|}\right) = \log f - \log|f|$$

на $-i$ и приравняем вещественные части в обеих сторонах равенства.] Дифференцируя равенство

$$\theta = \mathrm{Re}(-i \log f)$$

вдоль кривой $\mathbf{z} = \mathbf{p}(t)$, получаем

$$\frac{d\theta(\mathbf{p}(t))}{dt} = \mathrm{Re}\,\frac{d(-i\log f)}{dt} =$$
$$= \mathrm{Re}\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt},\ \mathbf{grad}(-i\log f)\right\rangle =$$
$$= \mathrm{Re}\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt},\ i\,\mathbf{grad}\log f\right\rangle.$$

Другими словами, производная функции $\theta(\mathbf{z})$ по направлению $\mathbf{v} = d\mathbf{p}/dt$ равна

$$\mathrm{Re}\langle \mathbf{v},\ i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})\rangle.$$

Заметим теперь, что эрмитово векторное пространство C^m можно рассматривать также как евклидово векторное пространство (размерности $2m$) над полем вещественных чисел, где евклидово скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно вещественной части комплексного скалярного произведения

$$\mathrm{Re}\langle \mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \mathrm{Re}\langle \mathbf{b},\ \mathbf{a}\rangle.$$

Например, вектор $\mathbf{v}$ является касательным к сфере S_ε в точке $\mathbf{z}$ тогда и только тогда, когда вещественное скалярное произведение $\mathrm{Re}\langle \mathbf{v}, \mathbf{z}\rangle$ равно нулю.

Далее, если вектор $i\,\mathbf{grad}(\log f(\mathbf{z}))$ вещественно кратен вектору $\mathbf{z}$ (другими словами, если этот вектор нормален к сфере S_ε), то для каждого вектора $\mathbf{v}$, касательного к сфере S_ε в точке $\mathbf{z}$, производная

$$\mathrm{Re}\langle \mathbf{v},\ i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})\rangle$$

функции θ по направлению вектора $\mathbf{v}$, очевидно, равна нулю и, следовательно, $\mathbf{z}$ является критической точкой отображения φ.

С другой стороны, если векторы $i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})$ и $\mathbf{z}$ линейно независимы над полем вещественных чисел, то в нашем евклидовом векторном пространстве существует такой вектор $\mathbf{v}$, что

$$\mathrm{Re}\langle \mathbf{v},\ \mathbf{z}\rangle = 0,$$
$$\mathrm{Re}\langle \mathbf{v},\ i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})\rangle = 1.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{v}$ является касательным к сфере S_ε и производная функция θ по направлению вектора $\mathbf{v}$ отлична от нуля; следовательно, $\mathbf{z}$ не является критической точкой отображения φ. Лемма 4.1 доказана.

Предположим теперь, что f — *многочлен, обращающийся в нуль в начале координат.*

Мы хотим доказать, что ассоциированное с ним отображение

$$\varphi\colon S_\varepsilon \setminus K \to S^1$$

вообще не имеет критических точек для достаточно малых ε. Согласно лемме 4.1, нам надо доказать следующее.

Пусть V — гиперповерхность $f^{-1}(0) \subset C^m$.

Лемма 4.2. *Для каждой точки $\mathbf{z} \in C^m \setminus V$, достаточно близкой к началу координат, векторы $\mathbf{z}$ и $i\,\mathbf{grad}\log(\mathbf{z})$ линейно независимы над R.*

Фактически мы докажем несколько более сильное утверждение.

Лемма 4.3. *Для любого многочлена f, обращающегося в нуль в начале координат, существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех точек $\mathbf{z} \in C^m \setminus V$ с $\|\mathbf{z}\| \leqslant \varepsilon_0$ либо векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})$ линейно независимы над полем комплексных чисел, либо*

$$\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z}) = \lambda\mathbf{z},$$

где λ — ненулевое комплексное число, аргумент [1] *которого по абсолютной величине меньше, скажем, $\pi/4$.*

Другими словами, λ лежит в открытом квадранте комплексной плоскости, разделяемом пополам положительной вещественной осью. *Следовательно,*

$$\operatorname{Re}(\lambda) > 0,$$

так что λ не может быть чисто мнимым. Таким образом, лемма 4.2 вытекает из леммы 4.3.

Доказательство леммы 4.3 основано на лемме § 3 об отборе кривых и на следующем результате.

Лемма 4.4. *Пусть $\mathbf{p}\colon [0, \varepsilon) \to C^m$ — вещественно аналитический путь с $\mathbf{p}(0) = 0$, такой, что для каждого $t > 0$ число $f(\mathbf{p}(t))$ отлично от нуля и $\mathbf{grad}\log f(\mathbf{p}(t)) = \lambda(t)\mathbf{p}(t)$. Тогда аргумент комплексного числа $\lambda(t)$ стремится к нулю при $t \to 0$.*

[1] Под аргументом комплексного числа $\lambda \neq 0$ мы понимаем (однозначно определенное) число $\theta \in (-\pi, \pi]$, такое, что $\lambda/|\lambda| = e^{i\theta}$.

Другими словами, $\lambda(t)$ отлично от нуля для малых положительных значений параметра t и

$$\lim_{t\to 0}(\lambda(t)/|\lambda(t)|) = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим разложения в ряд Тэйлора

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}t^\alpha + \mathbf{a}_1 t^{\alpha+1} + \mathbf{a}_2 t^{\alpha+2} + \ldots,$$

$$f(\mathbf{p}(t)) = bt^\beta + b_1 t^{\beta+1} + b_2 t^{\beta+2} + \ldots,$$

$$\mathbf{grad}\, f(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{c}t^\gamma + \mathbf{c}_1 t^{\gamma+1} + \mathbf{c}_2 t^{\gamma+2} + \ldots,$$

где старшие коэффициенты $\mathbf{a}$, b, $\mathbf{c}$ отличны от нуля. (Формула $df/dt = \langle d\mathbf{p}/dt, \mathbf{grad}\, f\rangle$ показывает, что $\mathbf{grad}\, f(\mathbf{p}(t))$ не может тождественно равняться нулю.) Показатели α, β, γ в старших членах разложения являются целыми числами, $\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$. Все три ряда сходятся, скажем, для $|t| < \varepsilon'$.

Для любого $t > 0$ имеем

$$\mathbf{grad}\log f(\mathbf{p}(t)) = \lambda(t)\,\mathbf{p}(t),$$

следовательно,

$$\mathbf{grad}\, f(\mathbf{p}(t)) = \lambda(t)\,\mathbf{p}(t)\overline{f}(\mathbf{p}(t)).$$

Таким образом,

$$(\mathbf{c}t^\gamma + \ldots) = \lambda(t)(\mathbf{a}\bar{b}t^{\alpha+\beta} + \ldots).$$

Сравнивая соответствующие компоненты этих двух векторнозначных функций, мы видим, что $\lambda(t)$ является отношением вещественных аналитических функций, и следовательно, разлагается в ряд Лорана вида

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \ldots).$$

Кроме того, коэффициент при старшем члене этого ряда должен удовлетворять уравнению

$$\mathbf{c} = \lambda_0\mathbf{a}\bar{b}.$$

Подставляя это уравнение в формулу, получающуюся разложением в степенной ряд равенства

$$\frac{dt}{dt} = \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \ \mathbf{grad}\, f \right\rangle,$$

получаем

$$(\beta b t^{\beta-1} + \ldots) = \langle \alpha \mathbf{a} t^{\alpha-1} + \ldots, \ \lambda_0 \mathbf{a} \bar{b} t^{\gamma} + \ldots \rangle =$$
$$= \alpha \| \mathbf{a} \|^2 \bar{\lambda}_0 b t^{\alpha-1+\gamma} + \ldots .$$

Из сравнения коэффициентов при старших членах следует, что

$$\beta = \alpha \| \mathbf{a} \|^2 \bar{\lambda}_0,$$

т. е. что λ_0 — положительное вещественное число. Следовательно,

$$\lim_{t \to 0} \arg \lambda(t) = 0,$$

чем и завершается доказательство леммы 4.4.

Доказательство леммы 4.3. Предположим сначала, что существуют точки $\mathbf{z} \in C^m \setminus V$, сколь угодно близкие к началу координат, для которых

$$\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{z} \neq 0,$$

где $|\arg \lambda|$ строго больше, чем $\pi/4$. Другими словами, мы предполагаем, что λ лежит в открытой полуплоскости

$$\operatorname{Re}((1+i)\lambda) < 0$$

или в открытой полуплоскости

$$\operatorname{Re}((1-i)\lambda) < 0.$$

Мы хотим выразить эти условия с помощью полиномиальных уравнений и неравенств, с тем чтобы применить лемму § 3 об отборе кривых.

Пусть W — множество всех точек $\mathbf{z} \in C^m$, для которых векторы $\mathbf{grad}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{z}$ линейно независимы. Таким образом, $\mathbf{z} \in W$ тогда и только тогда, когда для всех пар (j, k) удовлетворяются уравнения

$$z_j \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}} \right) = z_k \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}} \right).$$

Полагая $z_j = x_j + i y_j$ и приравнивая вещественные и мнимые части, мы получаем совокупность вещественных полиномиальных уравнений от вещественных переменных x_j и y_j. Это показывает, что $W \subset C^m$ является вещественным алгебраическим множеством.

Заметим, что точка $\mathbf{z} \in C^m \setminus V$ принадлежит множеству W тогда и только тогда, когда

$$\frac{\mathbf{grad}\, f(\mathbf{z})}{\overline{f}(\mathbf{z})} = \lambda \mathbf{z}$$

для некоторого комплексного числа λ. Умножая обе части равенства на $\overline{f}(\mathbf{z})$ и беря скалярное произведение с $\overline{f}(\mathbf{z})\mathbf{z}$, получаем уравнение

$$\langle \mathbf{grad}\, f(\mathbf{z}), \ \overline{f}(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \rangle = \lambda \| \overline{f}(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \|^2.$$

Другими словами, число λ, умноженное на некоторое положительное вещественное число, равно комплексному числу

$$\lambda'(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{grad}\, f(\mathbf{z}), \ \overline{f}(\mathbf{z})\, \mathbf{z} \rangle.$$

Следовательно,

$$\arg \lambda = \arg \lambda'.$$

Ясно, что λ' является (комплексной) полиномиальной функцией от вещественных переменных x_j и y_j.

Обозначим теперь через U_+ (соотв. через U_-) открытое множество, состоящее из всех точек $\mathbf{z}$, удовлетворяющих вещественному полиномиальному неравенству

$$\operatorname{Re}((1+i)\lambda'(\mathbf{z})) < 0 \qquad (*)$$

(соотв.

$$\operatorname{Re}((1-i)\lambda'(\mathbf{z})) < 0).$$

Мы предположили, что существуют точки $\mathbf{z} \in W \cap (U_+ \cup U_-)$, сколь угодно близкие к началу координат. Следовательно, по лемме 3.1 должен существовать вещественный аналитический путь

$$\mathbf{p}\colon [0, \varepsilon) \to C^m,$$

такой, что $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$, причем либо

$$\mathbf{p}(t) \in W \cap U_+$$

для всех $t > 0$, либо

$$\mathbf{p}(t) \in W \cap U_-$$

для всех $t > 0$. В любом случае для каждого $t > 0$ получаем

$$\mathbf{grad} \log f(\mathbf{p}(t)) = \lambda(t)\, \mathbf{p}(t),$$

где

$$|\arg \lambda(t)| > \frac{\pi}{4},$$

что противоречит лемме 4.4.

Это противоречие не дает, однако, полного доказательства леммы 4.3. Возможен еще случай, когда множество $W \setminus (V \cap W)$ содержит точки $\mathbf{z}$, сколь угодно близкие к началу координат и такие, что либо $\lambda'(\mathbf{z}) = 0$, либо

$$|\arg \lambda'(\mathbf{z})| = \frac{\pi}{4}.$$

Но в этом случае мы можем воспользоваться по существу теми же самыми рассуждениями, с заменой неравенства (*) на полиномиальное уравнение

$$\mathrm{Re}((1+i)\lambda'(\mathbf{z}))\, \mathrm{Re}((1-i)\lambda'(\mathbf{z})) = 0$$

в совокупности с полиномиальным неравенством

$$\| f(\mathbf{z}) \|^2 > 0.$$

Мы получим опять путь $\mathbf{p}(t)$, существование которого противоречит лемме 4.4. Этим противоречием завершается доказательство лемм 4.3 и 4.2.

Комбинируя леммы 4.1 и 4.2, получаем

Следствие 4.5. *Для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ отображение*

$$\varphi\colon S_\varepsilon \setminus K \to S^1$$

не имеет ни одной критической точки.

Отсюда следует, что для любой точки $e^{i\theta} \in S^1$ прообраз

$$F_\theta = \varphi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon \setminus K$$

является гладким $(2m-2)$-мерным многообразием.

Для того чтобы доказать, что φ является фактически проекцией некоторого локально тривиального расслоения, надо более тонко использовать лемму 4.3, чтобы получить более точное описание поведения $\varphi(\mathbf{z})$ при $\mathbf{z}$, стремящемся к множеству K, на котором функция φ не определена.

Лемма 4.6. *Для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ на $S_\varepsilon \setminus K$ существует гладкое касательное векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{z})$, такое, что для любой точки $\mathbf{z} \in S_\varepsilon \setminus K$ комплексное скалярное произведение*

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{z}),\ i\, \mathbf{grad} \log f(\mathbf{z}) \rangle$$

отлично от нуля и имеет аргумент по абсолютной величине меньший $\pi/4$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.10, достаточно построить требуемое векторное поле локально, в окрестности некоторой фиксированной точки $\mathbf{z}^\alpha$.

Случай 1. Если векторы $\mathbf{z}^\alpha$ и $\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z}^\alpha)$ линейно независимы над C, то линейные уравнения

$$\langle \mathbf{v},\ \mathbf{z}^\alpha \rangle = 0$$

и

$$\langle \mathbf{v},\ i\, \mathbf{grad} \log f(\mathbf{z}^\alpha) \rangle = 1$$

имеют совместное решение $\mathbf{v}$. Первое уравнение гарантирует, что $\mathrm{Re}\langle \mathbf{v}, \mathbf{z}^\alpha \rangle = 0$, т. е. что вектор $\mathbf{v}$ является касательным к сфере S_ε в точке $\mathbf{z}^\alpha$.

Случай 2. Если $\mathbf{grad} \log (\mathbf{z}^\alpha) = \lambda \mathbf{z}^\alpha$, то положим $\mathbf{v} = i\mathbf{z}^\alpha$. Ясно, что

$$\mathrm{Re}\langle i\mathbf{z}^\alpha,\ \mathbf{z}^\alpha \rangle = 0.$$

Согласно лемме 4.3, аргумент числа

$$\langle iz^{\alpha},\ i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z}^{\alpha})\rangle = \bar{\lambda}\,\|\,\mathbf{z}^{\alpha}\,\|^2$$

по абсолютной величине меньше $\pi/4$.

Таким образом, в любом случае можно выбрать локальное касательное векторное поле $\mathbf{v}^{\alpha}(\mathbf{z})$, которое принимает в точке $\mathbf{z}^{\alpha}$ значение $\mathbf{v}$. Условие

$$|\arg\langle\mathbf{v}^{\alpha}(\mathbf{z}),\ i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})\rangle| < \frac{\pi}{4}$$

будет тогда выполняться во всей окрестности точки $\mathbf{z}^{\alpha}$. Используя разбиение единицы, строим глобальное векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{z})$, обладающее тем же свойством. Лемма 4.6 доказана.

Нормируем теперь векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{z})$, положив

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{vz}}{\operatorname{Re}\langle\mathbf{v}(\mathbf{z}),\ i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})\rangle}.$$

Таким образом, мы получили гладкое касательное векторное поле $\mathbf{w}$ на $S_{\varepsilon}\setminus K$, удовлетворяющее следующему условию:

Вещественная часть скалярного произведения

$$\langle\mathbf{w}(\mathbf{z}),\ i\,\mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})\rangle$$

тождественно равна единице, а мнимая его часть удовлетворяет условию

$$|\operatorname{Re}\langle\mathbf{w}(\mathbf{z}),\ \mathbf{grad}\log f(\mathbf{z})\rangle| < 1.$$

Рассмотрим траектории дифференциального уравнения $dz/dt = \mathbf{w}(\mathbf{z})$.

Лемма 4.7. *Для любой данной точки $\mathbf{z}^0 \in S_{\varepsilon}\setminus K$ существует однозначно определенный гладкий путь*

$$\mathbf{p}\colon R \to S_{\varepsilon}\setminus K,$$

удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{p}(t))$$

с начальным условием $\mathbf{p}(0) = \mathbf{z}^0$.

Доказательство. Очевидно, что искомое решение $\mathbf{z} = \mathbf{p}(t)$ существует локально и может быть продолжено до решения на некотором максимальном открытом интервале вещественных чисел. Единственная задача, возникающая в связи с некомпактностью многообразия $S_{\varepsilon}\setminus K$, — это показать, что путь $\mathbf{p}(t)$ не может стремиться к K, когда t стремится к некоторому конечному пределу t_0 (ср. доказательство теоремы 2.10). Итак, мы должны показать, что при $t \to t_0$ функция $f(\mathbf{p}(t))$ не стремится к нулю или что

$$\operatorname{Re}\log f(\mathbf{p}(t))$$

не стремится к $-\infty$ при $t \to t_0$. Но производная

$$\frac{d\operatorname{Re}\log f}{dt} = \operatorname{Re}\left\langle\frac{d\mathbf{p}}{dt},\ \mathbf{grad}\log f\right\rangle = \operatorname{Re}\langle\mathbf{w}(\mathbf{p}(t)),\ \mathbf{grad}\log f\rangle$$

по абсолютной величине меньше 1. Следовательно, значения функции $|f(\mathbf{p}(t))|$ отделены от нуля, когда t стремится к любому конечному пределу, чем лемма 4.7 и доказана.

Положим $\varphi(\mathbf{z}) = e^{i\theta(\mathbf{z})}$. Заметим, что, как и при доказательстве леммы 4.1, производная

$$\frac{d\theta(\mathbf{p}(t))}{dt} = \operatorname{Re}\left\langle\frac{d\mathbf{p}}{dt},\ i\,\mathbf{grad}\log f\right\rangle$$

тождественно равна единице. Следовательно,

$$\theta(\mathbf{p}(t)) = t + \mathrm{const}.$$

Другими словами, путь $\mathbf{p}(t)$ проектируется при отображении φ в путь, который наматывается вокруг единичной окружности в положительном направлении с единичной скоростью.

Очевидно, точка $\mathbf{p}(t)$ является гладкой функцией как от t, так и от начального значения

$$\mathbf{z}^0 = \mathbf{p}(0).$$

Выразим эту зависимость, положив

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{h}_t(\mathbf{z}^0).$$

Для каждого t функция $\mathbf{h}_t$ является диффеоморфизмом, отображающим $S_\varepsilon \setminus K$ в себя, и отображающим каждый слой $F_\theta = \varphi^{-1}(e^{i\theta})$ на слой $F_{\theta+t}$. Суммируя полученные результаты, мы можем теперь без труда доказать теорему о расслоении:

Теорема 4.8 (о расслоении). *Для $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ пространство $S_\varepsilon \setminus K$ является гладким расслоением над S^1 с проекцией $\varphi(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})/|f(\mathbf{z})|$.*

Доказательство. Пусть U — малая окрестность некоторой точки $e^{i\theta} \in S^1$. Отображение

$$(e^{i(t+\theta)}, \mathbf{z}) \mapsto \mathbf{h}_t(\mathbf{z})$$

для $|t| < \mathrm{const}$ и $\mathbf{z} \in F_\theta$ диффеоморфно отображает произведение $U \times F_\theta$ на $\varphi^{-1}(U)$. Теорема 4.8 доказана.

§ 5. Топология слоя и топология K

Продолжим изучение локально тривиального расслоения

$$\varphi\colon S_\varepsilon \setminus K \to S^1,$$

связанного с комплексным многочленом $f(z_1, \ldots, z_m)$, обращающимся в нуль в начале координат. Положим $m = n + 1 \geqslant 1$. Как показано в § 4, каждый слой

$$F_\theta = \varphi^{-1}(e^{i\theta})$$

является гладким многообразием (вещественной) размерности $2n$. В этом параграфе мы применим теорию Морса для изучения топологии слоя F_θ и пересечения $K = S_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$. Сформулируем два основных результата этого параграфа.

Теорема 5.1. *Каждый слой F_θ является параллелизуемым многообразием и имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса размерности n.*

Теорема 5.2. *Пространство $K = V \cap S_\varepsilon$ является $(n-2)$-связным.*

Таким образом, для $n \geqslant 2$ пространство K связно, а для $n \geqslant 3$ односвязно. (Для $n = 1$ соответствующие рассуждения показывают только, что пространство K непусто.)

Заканчивается параграф еще одним описанием слоев:

Каждый слой F_θ диффеоморфен открытому подмножеству неособой комплексной гиперповерхности, состоящей из всех точек $\mathbf{z}$, для которых $\|\mathbf{z}\| < \varepsilon$ и $f(\mathbf{z}) = \mathrm{const}$.

Доказательство теоремы 5.1 существенно использует теорию Морса применительно к гладкой вещественной функции $|f|$ на F_θ. Доказательство теоремы 5.2 основано, кроме того, на одновременном изучении поведения гладкой функции $|f|$ на всем многообразии $S_\varepsilon \setminus K$. Мы покажем, что как в том, так и в другом случае индекс Морса[1]) функции $|f|$ в любой критической точке $\geqslant n$.

Прежде всего установим идентичность критических точек для некоторых важных функций. Нам будет удобнее работать с гладкими функциями $a_\theta : F_\theta \to R$ и $a : S_\varepsilon \setminus K \to R$, определяемыми формулами

$$a_\theta(\mathbf{z}) = a(\mathbf{z}) = \log|f(\mathbf{z})|.$$

Ясно, что критические точки функции a те же самые, что и критические точки функции $|f|$ на $S_\varepsilon \setminus K$; аналогично критические точки функции a_θ те же самые, что и критические точки функции $|f|$, ограниченной на F_θ.

Лемма 5.3. *Критические точки гладкой вещественной функции $a_\theta(\mathbf{z}) = \log|f(\mathbf{z})|$ на F_θ — это в точности те точки $\mathbf{z} \in F_\theta$, для которых вектор $\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$ есть комплексное кратное вектора $\mathbf{z}$.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4.1, замечаем, что производная функции

$$\log|f(\mathbf{z})| = \mathrm{Re} \log f(\mathbf{z})$$

[1]) См., например, Милнор [2], § 2.

по любому направлению $\mathbf{v}$ равна вещественному скалярному произведению

$$\operatorname{Re}\langle \mathbf{v}, \ \mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})\rangle.$$

Таким образом, $\mathbf{z}$ тогда и только тогда будет критической точкой этой функции, ограниченной на F_θ, когда вектор $\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$ нормален к F_θ в точке $\mathbf{z}$. (Здесь «нормальный» означает «ортогональный ко всем касательным векторам» в смысле вещественного скалярного произведения.)

Как следует из доказательства леммы 4.1, пространство нормальных векторов к подмногообразию $F_\theta \subset C^m$ вещественной коразмерности 2 натянуто на два линейно независимых вектора $\mathbf{z}$ и $i\,\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$. Таким образом, $\mathbf{z}$ тогда и только тогда является критической точкой функции a_θ, когда существует вещественная линейная зависимость между векторами $\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z}$ и $i\,\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$, чем, очевидно, и завершается доказательство леммы 5.3.

Замечание 5.4. Отметим, что касательное пространство к слою F_θ в критической точке $\mathbf{z}$ функции a_θ является фактически комплексным векторным пространством, состоящим из всех векторов $\mathbf{v}$, таких, что $\langle \mathbf{v}, \mathbf{z}\rangle = 0$. Действительно, если вектор $i\,\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$ есть комплексное кратное вектора $\mathbf{z}$, то вектор $\mathbf{v}$ тогда и только тогда вещественно ортогонален к векторам $\mathbf{z}$ и $i\,\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z})$, когда он комплексно ортогонален вектору $\mathbf{z}$.

Теперь займемся гессианом гладкой функции a_0 в критической точке, для того чтобы вычислить индекс Морса. Мы будем использовать следующую интерпретацию гессиана. Для данного касательного вектора $\mathbf{v}$ в критической точке $\mathbf{z}$ выберем гладкий путь

$$\mathbf{p}\colon \ R \to F_\theta$$

со скоростью $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{v}$ в точке $\mathbf{p}(0) = \mathbf{z}$. Тогда вторая производная

$$\ddot{a}_\theta = \frac{d^2 a_\theta(\mathbf{p}(t))}{dt^2}$$

в точке $t = 0$ может быть представлена в виде квадратичной формы от вектора $\mathbf{v}$. Эта квадратичная форма и есть гессиан.

Лемма 5.5. *Вторая производная от $a_\theta(\mathbf{p}(t))$ в точке $t = 0$ задается формулой вида*

$$\ddot{a}_\theta = \sum \operatorname{Re}(b_{jk} v_j v_k) - c\,\|\mathbf{v}\|^2,$$

где b_{jk} — матрица комплексных чисел и c — положительное вещественное число.

Доказательство. Заметим прежде всего, что наш путь $\mathbf{p}(t)$ лежит внутри многообразия F_θ, на котором функция $f/|f| = e^{i\theta}$ постоянна. Дифференцируя равенство

$$a_\theta(\mathbf{p}(t)) = \log|f(\mathbf{p}(t))| = \log f(\mathbf{p}(t)) - i\theta,$$

получаем

$$\dot{a}_\theta = \frac{d \log f}{dt} = \Sigma \frac{\partial \log f}{\partial z_j} \frac{d\mathbf{p}_j}{dt}.$$

Дифференцируя еще раз, находим

$$\ddot{a}_\theta = \sum \frac{\partial \log f}{\partial z_j} \frac{d^2 p_j}{dt^2} + \sum \frac{\partial^2 \log f}{\partial z_j \partial z_k} \frac{dp_j}{dt} \frac{dp_k}{dt}.$$

Беря $t = 0$, полагая

$$\mathbf{grad} \log f(\mathbf{z}) = \lambda \mathbf{z}$$

(согласно лемме 5.3) и вводя обозначение

$$D_{jk} = \frac{\partial^2 \log f}{\partial z_j \partial z_k},$$

получаем для $\ddot{a}_\theta$ формулу

$$\ddot{a}_\theta = \langle \ddot{\mathbf{p}}, \ \lambda \mathbf{z}\rangle + \sum D_{jk} v_j v_k.$$

Левая часть этого равенства, очевидно, вещественна. Умножая равенство на λ и приравнивая вещественные части, получаем

$$\ddot{a}_\theta \operatorname{Re}(\lambda) = |\lambda|^2 \operatorname{Re}\langle \ddot{\mathbf{p}}, \ \mathbf{z}\rangle + \sum \operatorname{Re}(\lambda D_{jk} v_j v_k).$$

Подставляя сюда равенство

$$\operatorname{Re}\langle \ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{z}\rangle = -\|\mathbf{v}\|^2,$$

получающееся двукратным дифференцированием соотношения

$$\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t)\rangle = \mathrm{const},$$

находим

$$\ddot{a}_\theta \operatorname{Re}(\lambda) = \sum \operatorname{Re}(\lambda D_{jk} v_j v_k) - \|\lambda \mathbf{v}\|^2.$$

Остается только разделить обе части равенства на число $\operatorname{Re}(\lambda)$, которое положительно согласно лемме 4.3. Лемма 5.5 доказана.

Теперь мы легко можем вычислить индекс Морса функции a_θ.

Лемма 5.6. *Индекс Морса функции $a_\theta: F_\theta \to R$ в критической точке $\geqslant n$. Следовательно, индекс Морса функции $a: S_\varepsilon \setminus K \to R$ в любой критической точке также $\geqslant n$.*

Доказательство. Индекс Морса I квадратичной формы

$$H(\mathbf{v}) = \operatorname{Re}(\sum b_{jk} v_j v_k) - c\|\mathbf{v}\|^2,$$

где $\mathbf{v}$ пробегает касательное пространство к слою F_0 в точке $\mathbf{z}$, определяется как максимальная размерность линейного подпространства, на котором форма H отрицательно определена.

Заметим, что если $H(\mathbf{v}) \geqslant 0$ для некоторого ненулевого вектора $\mathbf{v}$, то $H(i\mathbf{v}) < 0$, так как при подстановке $i\mathbf{v}$ вместо $\mathbf{v}$ первое слагаемое в нашем выражении меняет знак, а второе остается отрицательным. Заметим еще, что, согласно замечанию 5.4, вектор $i\mathbf{v}$ также является касательным к F_θ.

Теперь представим касательное пространство в точке $\mathbf{z}$ в виде прямой суммы двух вещественных подпространств $T_0 \oplus T_1$ так, чтобы гессиан H был отрицательно определен на T_0 и положительно полуопределен на T_1. По определению размерность пространства T_0 и есть индекс Морса I.

Но форма H отрицательно определена и на пространстве iT_1. Следовательно,

$$I \geqslant \dim(iT_1) = \dim T_1 = 2n - I.$$

Таким образом, $I \geqslant n$, чем доказана первая половина леммы.

Соответствующее утверждение для функции $a: S_\varepsilon \setminus K \to R$ вытекает отсюда немедленно. Каждая критическая точка функции a является также критической точкой функции a_θ, а индекс функции a в точке $\mathbf{z}$, очевидно, не меньше индекса функции a_θ в точке $\mathbf{z}$. Лемма 5.6 полностью доказана.

Теперь нам надо убедиться в том, что все критические точки функции a_θ (соотв. a) лежат внутри некоторого компактного подмножества слоя F_θ (соотв. многообразия $S_\varepsilon \setminus K$).

Лемма 5.7. *Существует такое вещественное число $\eta_\theta > 0$, что все критические точки $\mathbf{z}$ функции a_θ лежат внутри компактного подмножества $\{|f(\mathbf{z})| \geqslant \eta_\theta\}$ слоя F_θ. Аналогично существует такое вещественное число $\eta > 0$, что все критические точки $\mathbf{z}$ функции a удовлетворяют неравенству $|f(\mathbf{z})| \geqslant \eta$.*

Эту лемму можно доказать, используя либо следствие 2.8, либо лемму 3.1. Например, если на F_θ существуют критические точки $\mathbf{z}$ функции $a_\theta = \log|f|$, для которых значения $|f(\mathbf{z})|$ сколь угодно близки к нулю, то эти критические точки должны иметь предельную точку $\mathbf{z}^0$ в компактном множестве S_ε. Используя лемму 3.1 об отборе кривых, мы получаем, что должен существовать гладкий путь

$$\mathbf{p}: (0, \varepsilon') \to F_\theta,$$

состоящий весь из критических точек и такой, что

$$\mathbf{p}(t) \to \mathbf{z}^0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Очевидно, функция a_θ постоянна вдоль этого пути, следовательно, и функция $|f|$ постоянна вдоль него и не может стремиться к значению $|f(\mathbf{z}^0)| = 0$. Полученное противоречие доказывает нашу лемму.

Лемма 5.8. *Существует гладкое отображение*

$$s_\theta\colon F_\theta \to R_+$$

(где R_+ — множество положительных вещественных чисел), такое, что все его критические точки невырождены и имеют индекс Морса $\geqslant n$, причем если для точки $\mathbf{z}$ значение $|f(\mathbf{z})|$ достаточно близко к нулю, то

$$s_\theta(\mathbf{z}) = |f(\mathbf{z})|.$$

Аналогично существует гладкое отображение $s\colon S_\varepsilon \setminus K \to R_+$, такое, что все его критические точки невырождены и имеют индекс Морса $\geqslant n$, причем если для точки $\mathbf{z}$ значение $|f(\mathbf{z})|$ достаточно близко к нулю, то

$$s(\mathbf{z}) = |f(\mathbf{z})|.$$

Доказательство. Существует (Морс [1], стр. 178, теорема 8.7) функция s_θ (соотв. s), которая совпадает с $|f|$ всюду, за исключением некоторой компактной окрестности множества критических точек, имеет лишь невырожденные критические точки и первые две производные которой на любой компактной координатной окрестности равномерно аппроксимируют соответствующие производные функции $|f|$. Так как у всех критических точек функции $|f|$ индекс Морса $\geqslant n$, то для всех достаточно хороших аппроксимаций критические точки функции s_0 также имеют индекс Морса $\geqslant n$ (см., например, Милнор [2], § 22.4). Лемма доказана.

Заметим, что критические точки функции s_θ изолированы и лежат все внутри некоторого компактного множества. Следовательно, у функции s_0 лишь конечное число критических точек.

Теперь мы готовы к доказательству теорем 5.1 и 5.2.

Доказательство теоремы 5.1. Чтобы применять теорию Морса в ее обычном виде, нам нужна невырожденная функция $g\colon F_\theta \to R$, такая, что множество точек $\mathbf{z}$, для которых $g(\mathbf{z}) \leqslant c$, компактно для любого $c \in R$ (другими словами, функция g должна

быть собственной и ограниченной снизу). Ясно, что функция

$$g(\mathbf{z}) = -\log s_\theta(\mathbf{z})$$

удовлетворяет этим условиям.

Индекс Морса I функции s_θ или функции $\log s_\theta$ в критической точке не меньше n. Следовательно, индекс Морса функции $-\log s_\theta$ равен $2n - I \leqslant n$. Согласно основной теореме теории Морса (см. Милнор [2], § 3.5), многообразие F_θ имеет гомотопический тип клеточного комплекса размерности $\leqslant n$, причем каждой критической точке функции g соответствует ровно одна клетка. Этим доказана половина теоремы 5.1.

В частности, если $n \geqslant 1$, то отсюда уже следует, что группа гомологий $H_{2n}(F_\theta; \mathbf{z}_2)$ равна нулю. Поэтому $2n$-мерное многообразие F_θ не может иметь компактных компонент.

Для завершения доказательства теоремы 5.1 остается лишь проверить, что многообразие F_θ параллелизуемо. Но F_θ вложено в сферу S_ε и, следовательно, вложено в координатное пространство C^{n+1} с тривиальным нормальным расслоением. Так как многообразие F_θ не имеет компактных компонент, отсюда следует, что F_θ параллелизуемо (см. Кервэр и Милнор [1], § 3.4). Этим завершается доказательство теоремы 5.1.

Замечание. Аналогичные рассуждения показывают, что и пространство $S_\varepsilon \setminus K$ имеет гомотопический тип конечного комплекса размерности $n+1$.

Доказательство теоремы 5.2. Обозначим через $N_\eta(K)$ окрестность множества K, состоящую из всех точек $\mathbf{z} \in S_\varepsilon$, для которых $|f(\mathbf{z})| \leqslant \eta$. Из леммы 5.7 следует, что $N_\eta(K)$ для достаточно малых η является гладким многообразием с границей. Используя гладкую невырожденную вещественную функцию s на множестве $S_\varepsilon \setminus$ (внутренность $N_\eta(K)$), мы видим, что сфера S_ε имеет гомотопический тип клеточного комплекса, получаемого из $N_\eta(K)$ присоединением конечного числа клеток размерности $\geqslant n$, по одной l-мерной клетке на каждую критическую точку функции s индекса l. (Ср. Милнор [2], § 3. Фактически, как показал Смейл, имеет место более точное утверждение, а именно гладкое многообразие S_ε может быть получено из $N_\eta(K)$ присоединением конечного числа «ручек», каждая из которых имеет индекс Морса $\geqslant n$.)

Ясно, что присоединение клетки размерности $\geqslant n$ не может изменить гомотопические группы в размерностях $\leqslant n-2$. Следовательно,

$$\pi_i(N_\eta(K)) \cong \pi_i(S_\varepsilon) = 0$$

для $i \leqslant n-2$.

Для завершения доказательства используем тот факт, что K является абсолютным окрестностным ретрактом. Действительно, множество K является вещественным алгебраическим множеством и, следовательно, согласно Лоясевичу, триангулируемо.

Таким образом, множество K является окрестностным ретрактом многообразия $N_\eta(K)$ при достаточно малых η [1]). Следовательно, группы $\pi_i(K)$ также тривиальны для $i \leqslant n-2$, чем и завершается доказательство теоремы 5.2.

В заключение этого параграфа дадим еще одно описание слоев F_θ. Докажем сначала две леммы. Пусть D_ε — замкнутый диск, ограниченный сферой S_ε.

Лемма 5.9. *Существует гладкое векторное поле* $\mathbf{v}$ *на* $D_\varepsilon \setminus V$, *такое, что скалярное произведение*

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{z}),\ \mathbf{grad} \log f(\mathbf{z}) \rangle$$

вещественно и положительно для всех $\mathbf{z} \in D_\varepsilon \setminus V$, *а скалярное произведение* $\langle \mathbf{v}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \rangle$ *имеет положительную вещественную часть.*

Доказательство этой леммы, аналогичное доказательству леммы 4.6, мы предоставляем читателю.

[1]) См., например, Ху Сы-цзян [1].

Рассмотрим теперь решения дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{p}(t))$$

на $D_\varepsilon \setminus V$. Из того условия, что

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt},\ \mathbf{grad} \log f(\mathbf{p}(t)) \right\rangle$$

вещественно и положительно, следует, что аргумент функции $f(\mathbf{p}(t))$ постоянен и что $|f(\mathbf{p}(t))|$ есть строго монотонная функция от t. Из условия

$$2\,\mathrm{Re}\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt},\ \mathbf{p}(t) \right\rangle = \frac{d\,\|\mathbf{p}(t)\|^2}{dt} > 0$$

следует, что $\|\mathbf{p}(t)\|$ является строго монотонной функцией от t.

Таким образом, отправляясь от любой внутренней точки $\mathbf{z}$ множества $D_\varepsilon \setminus V$ и следуя по траектории, проходящей через эту точку $\mathbf{z}$, мы движемся «прочь» от начала координат в направлении возрастания функции $|f|$, пока мы не достигнем точки $\mathbf{z}' \in S_\varepsilon \setminus K$, удовлетворяющей равенству

$$\frac{f(\mathbf{z}')}{|f(\mathbf{z}')|} = \frac{f(\mathbf{z})}{|f(\mathbf{z})|}.$$

Используя это соответствие $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}'$, легко доказать следующее утверждение. Пусть c — малое комплексное число, и пусть $c/|c| = e^{i\theta}$ (см. рис. 4).

Лемма 5.10. *Пересечение гиперповерхности* $f^{-1}(c)$ *с открытым* ε*-диском диффеоморфно части слоя* F_θ, *определяемой неравенством* $|f(\mathbf{z})| > |c|$.

Но из леммы 5.7 следует, что для достаточно малых $|c|$ указанная часть слоя F_θ диффеоморфна всему слою F_θ (ср. Милнор [2], § 3.1). Таким образом, нами доказана

Теорема 5.11. *Если комплексное число* $c \neq 0$ *достаточно близко к нулю, то комплексная гиперповерхность* $f^{-1}(c)$ *пересекается открытым* ε*-диском по гладкому многообразию, диффеоморфному слою* F_θ.

Замечание. Комбинируя теорему 5.11 с результатами Андреотти и Франкеля [1] по теории Морса

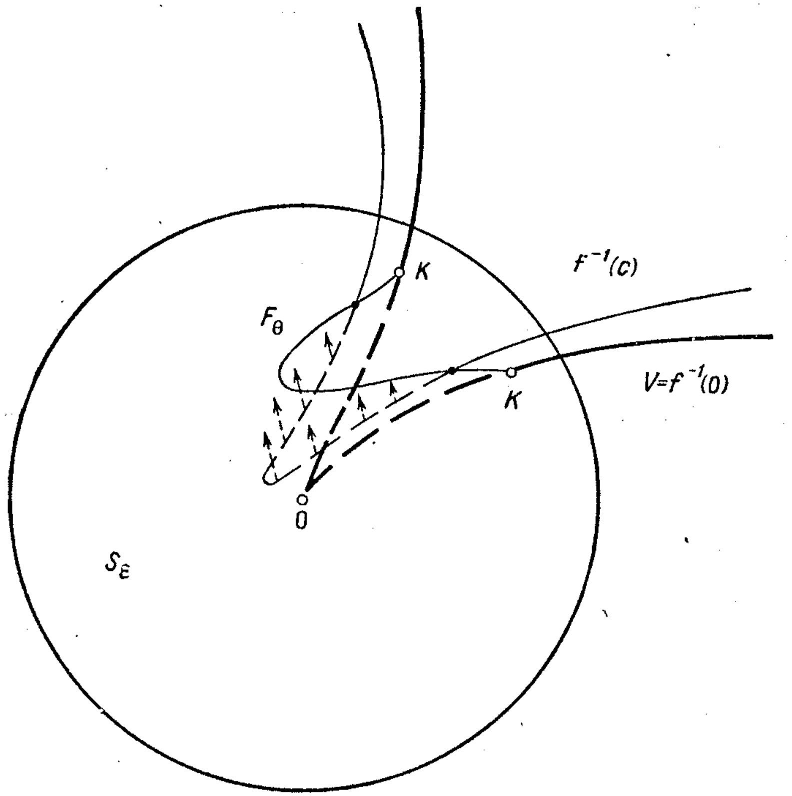

Рис. 4.

применительно к гладкой вещественной функции $\|\mathbf{z}\|^2$ на $f^{-1}(c)$, можно получить другое доказательство теоремы 5.1.

§ 6. Случай изолированной критической точки

Введем теперь дополнительное предположение, что многочлен $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ не имеет критических точек в некоторой окрестности начала координат, за исключением, быть может, самого начала координат. Таким образом, начало координат является либо изолированной особой точкой, либо неособой точкой гиперповерхности $V=f^{-1}(0)$ (см. лемму 2.5). Предположим также, что $n \geqslant 1$.

Согласно следствию 2.9, пересечение $K = V \cap S_\varepsilon$ при достаточно малых ε является гладким $(2n-1)$-мерным многообразием. Это утверждение можно уточнить следующим образом.

Лемма 6.1. *Для достаточно малых ε замыкание любого слоя F_θ в S_ε является гладким $2n$-мерным многообразием с границей, внутренней частью которого является F_θ, а границей K.*

Доказательство. Заметим сначала, что для достаточно малых ε комплексная функция $f|S_\varepsilon$ не имеет критических точек на K. (Другими словами, число нуль есть регулярное значение функции $f|S_\varepsilon$.) Это можно вывести из доказательства следствия 2.9 или доказать с использованием леммы 3.1 об отборе кривых следующим образом. Критические точки функции $f|S_\varepsilon$ — это, очевидно, те самые точки $\mathbf{z} \in S_\varepsilon$, в которых (ненулевой) вектор $\operatorname{grad} f(\mathbf{z})$ является комплексным кратным вектора $\mathbf{z}$. Для данного негладкого пути

$$\mathbf{p}\colon [0, \varepsilon') \to C^{n+1},$$
$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}, \quad f(\mathbf{p}(t)) \equiv 0,$$

состоящего исключительно из таких точек, имеем

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \operatorname{grad} f \right\rangle = \frac{df(\mathbf{p}(t))}{dt} \equiv 0,$$

так что

$$2\operatorname{Re}\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \mathbf{p}(t) \right\rangle = \frac{d\|\mathbf{p}(t)\|^2}{dt} \equiv 0,$$

и, следовательно, $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{0}$, что противоречит нашему предположению.

Пусть теперь $\mathbf{z}^0$ — произвольная точка многообразия K. Выберем (вещественные) локальные координаты $u_1, \ldots, u_{2n+1}$ для S_ε в окрестности U точки $\mathbf{z}^0$ так, чтобы для всех $\mathbf{z} \in U$

$$f(\mathbf{z}) = u_1(\mathbf{z}) + iu_2(\mathbf{z}).$$

следовательно, $\pi_n(\dot{F}_\theta)$ — свободная абелева группа, и мы можем выбрать конечное число отображений

$$(S^n \text{ отмеченная точка}) \to (F_\theta, \text{ отмеченная точка}),$$

образующих базис группы $\pi_n(F_\theta)$. Объединение этих отображений дает отображение

$$S^n \vee \ldots \vee S^n \to F_\theta,$$

индуцирующее изоморфизм групп гомологий и, следовательно, по теореме Уайтхеда, являющееся гомотопической эквивалентностью. Этим завершается доказательство для случая $n \geqslant 2$. Доказательство для случая $n = 1$ мы предоставляем читателю.

Как мы увидим в § 7, число сфер в этом букете всегда отлично от нуля, если начало координат не является регулярной точкой функции f.

Для $n \neq 2$ имеет место еще более точное утверждение.

Теорема 6.6. *Для $n \neq 2$ многообразие $\bar{F}_\theta$ диффеоморфно телу с ручками, получаемому из диска D^{2n} одновременным присоединением конечного числа ручек индекса n.*

Это следует из результатов § 1.2 работы Смейла [2] в сочетании с нашими теоремой 5.2 и следствием 6.4.

Подробное обсуждение таких тел читатель может найти в работе Уолла [1].

Есть основания предполагать, что теорема 6.6 верна и для $n = 2$.

§ 7. Среднее число Бетти слоя

Изолированная критическая точка $\mathbf{z}^0$ комплексного многочлена $f(z_1, \ldots, z_m)$ называется *невырожденной*, если матрица Гессе $(\partial^2 f/\partial z_j \partial z_k)$ невырождена в точке $\mathbf{z}^0$, в противном случае точка $\mathbf{z}^0$ называется *вырожденной* критической точкой.

Введем положительное целое число μ, которое служит мерой степени вырождения в критической точке $\mathbf{z}^0$. Это целое число μ мы определим как кратность точки $\mathbf{z}^0$ как решения системы полиномиальных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_m} = 0.$$

Рассмотрим сначала несколько более общую ситуацию. Пусть

$$g_1(\mathbf{z}), \ \ldots, \ g_m(\mathbf{z})$$

— произвольные аналитические функции от m комплексных переменных, и пусть $\mathbf{z}^0$ — изолированное решение системы уравнений

$$g_1(\mathbf{z}) = \ldots = g_m(\mathbf{z}) = 0.$$

Мы будем говорить для краткости, что $\mathbf{z}^0$ является изолированным «нулем» отображения $g : C^m \to C^m$.

Определение. *Кратностью* μ изолированного нуля $\mathbf{z}^0$ называется степень отображения

$$\mathbf{z} \to \frac{\mathbf{g}(\mathbf{z})}{\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|}$$

малой сферы S_ε с центром в точке $\mathbf{z}^0$ в единичную сферу пространства C^m.

По-видимому, это определение согласуется с различными определениями, используемыми алгебраическими геометрами (см., например, Ван дер Варден [2], § 38, или Ходж и Пидо [1]). Топологическое определение более удобно для наших целей.

Следующий результат служит оправданием нашего определения.

Теорема 7.1 (Лефшец). *Кратность μ всегда является целым положительным числом.*

Доказательство теоремы 7.1, а также дальнейшее обсуждение кратности μ приведены в дополнении В (см. также Лефшец [2]).

Вернемся теперь к ситуации, рассмотренной в § 6. Пусть начало координат является изолированной критической точкой и нулем многочлена $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$. Таким образом, уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} = 0$$

имеют изолированное решение $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Пусть μ — кратность этого решения. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим связанное с f расслоение, типичным слоем которого является $2n$-мерное многообразие

$$F_0 = \{\mathbf{z} \in S_\varepsilon \mid f(\mathbf{z}) > 0\}.$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 7.2. *Среднее число Бетти слоя F_0 равно кратности μ. Следовательно, средняя группа гомологий $H_n F_0$ является свободной абелевой группой ранга μ.*

(Замечание. Недавно Брискорн дал простое доказательство теоремы 7.2, совершенно отличное от доказательства, приводимого ниже.)

Так как $\mu > 0$, то по теореме 7.1 отсюда вытекает

Следствие 7.3. *Если начало координат является изолированной критической точкой многочлена f, то слои F_θ нестягиваемы и многообразие $K = V \cap S_\varepsilon$ является заузленной сферой в S_ε.*

(Этот результат стоит сопоставить с леммами 2.12 и 2.13, утверждающими, что если начало координат является регулярной точкой многочлена f, то слои F_θ стягиваемы, а многообразие $K \subset S_\varepsilon$ является незаузленной сферой.)

Действительно, если K — топологически незаузленная сфера в S_ε, то $S_\varepsilon \setminus K$ имеет гомотопический тип окружности. Но в этом случае гомотопическая точная последовательность нашего расслоения

$$\ldots \to \pi_{n+1}(S^1) \to \pi_n(F_0) \to \pi_n(S_\varepsilon \setminus K) \to \ldots$$

приводит к противоречию (даже при $n = 1$).

Для доказательства теоремы 7.2 нам нужен какой-нибудь способ подсчета степени гладкого отображения

$$\mathbf{v}\colon S^k \to S^k$$

сферы в себя, использующий неподвижные точки отображения $\mathbf{v}$. Пусть M — компактная область с гладкой границей на сфере $S^k \subset R^{k+1}$. Для каждой граничной точки $\mathbf{x} \in M$ обозначим через $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *внутренний нормальный вектор* — единственный единичный вектор, касательный к S^k, нормальный к ∂M в точке $\mathbf{x}$ и направленный внутрь области M.

Лемма 7.4. *Если (1) каждая неподвижная точка отображения $\mathbf{v}\colon S^k \to S^k$ лежит внутри области M, (2) никакая из точек $\mathbf{x} \in M$ не переходит при отображении $\mathbf{v}$ в диаметрально противоположную точку $-\mathbf{x}$ и (3) евклидово скалярное произведение $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle$ положительно для любой точки $\mathbf{v} \in \partial M$, то эйлерово число $\chi(M)$ связано со степенью d отображения $\mathbf{v}$ равенством*

$$\chi(M) = 1 + (-1)^k d.$$

Доказательство. Малым шевелением отображения $\mathbf{v}$ можно добиться, чтобы все его неподвижные точки были изолированными. Согласно теореме Лефшеца о неподвижной точке, каждой неподвижной точке $\mathbf{x}$ можно сопоставить индекс $\iota(\mathbf{x})$ так, чтобы сумма индексов по всем неподвижным точкам равнялась числу Лефшеца

$$\sum (-1)^j \operatorname{trace}(\mathbf{v}_*\colon H_j(S^k) \to H_j(S^k)) = 1 + (-1)^k d.$$

(Ср. Александров и Хопф [1].)

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений

$$\mathbf{v}_t\colon M \to S^k,$$

определяемое формулой

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x}) = \frac{(1-t)\,\mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\|(1-t)\,\mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x})\|}.$$

Эта формула корректна, так как $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq -\mathbf{x}$ для $\mathbf{x} \in M$. Очевидно, что $\mathbf{v}_0$ есть тождественное отображение, а $\mathbf{v}_t$ для малых значений параметра t является отображением M в себя, гомотопным тождественному. Поэтому для, скажем, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ число Лефшеца отображения

$$\mathbf{v}_t\colon M \to M$$

должно быть равно эйлерову числу $\chi(M)$.

Но для $t > 0$ неподвижные точки у отображения $\mathbf{v}_t$ в точности те же, что и у отображения $\mathbf{v}: S^k \to S^k$. Поскольку индекс Лефшеца неподвижной точки $\mathbf{x}$ отображения $\mathbf{v}_t$ есть целое число, непрерывно зависящее от t, отсюда следует, что число Лефшеца $\chi(M)$ отображения $\mathbf{v}_\varepsilon$ должно равняться числу Лефшеца $1 + (-1)^k d$ отображения $\mathbf{v}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7.2. Пусть M — область, состоящая из всех точек $\mathbf{z} \in S_\varepsilon$, удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{Re} f(\mathbf{z}) \geqslant 0.$$

Другими словами, M есть объединение слоев F_θ, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, а также их общей границы K. Очевидно, что

$$\partial M = F_{-\pi/2} \cup K \cup F_{\pi/2}$$

является гладким многообразием (см. доказательство леммы 6.1).

Заметим, что M имеет гомотопический тип слоя F_θ, ибо внутренность области M расслоена над открытой полуокружностью со слоем F_θ.

Рассмотрим гладкое отображение

$$\mathbf{v}(\mathbf{z}) = \varepsilon \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{z})}{\| \operatorname{grad} f(\mathbf{z}) \|}$$

сферы S_ε в себя. Мы утверждаем, что отображение $\mathbf{v}$ удовлетворяет трем условиям леммы 7.4.

Условие (1). Очевидно, $\mathbf{z}$ является неподвижной точкой отображения $\mathbf{v} = \varepsilon \operatorname{grad} f / \| \operatorname{grad} f \|$ тогда и только тогда, когда вектор $\operatorname{grad} f(\mathbf{z})$ является положительным кратным вектора $\mathbf{z}$. Но если

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{z}) = c\mathbf{z}, \quad c > 0,$$

то $f(\mathbf{z}) \neq 0$ (ср. с доказательством леммы 6.1), и

$$\operatorname{grad} \log f(\mathbf{z}) = \frac{c}{\bar f(\mathbf{z})} \mathbf{z},$$

где коэффициент $c/\bar f(\mathbf{z})$, согласно лемме 4.3, имеет положительную вещественную часть. Следовательно, $\operatorname{Re} f(\mathbf{z}) > 0$, и точка $\mathbf{z}$ является внутренней точкой области M.

Условие (2) проверяется аналогично.

Условие (3). Для любой данной граничной точки $\mathbf{z}$ области M можно выбрать гладкий путь $\mathbf{p}(t)$, идущий внутрь M со скоростью $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{n}(\mathbf{z})$ в точке $\mathbf{p}(0) = \mathbf{z}$. Из определения области M легко следует, что производная от функции $\operatorname{Re} f(\mathbf{p}(t))$ положительна в точке $t = 0$. Поэтому равенство

$$\frac{d \operatorname{Re} f}{dt} = \operatorname{Re} \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \operatorname{grad} f \right\rangle$$

показывает, что евклидово скалярное произведение $\operatorname{Re}\langle \mathbf{n}(\mathbf{z}), \mathbf{v}(\mathbf{z}) \rangle$ положительно.

Следовательно, можно применить лемму 7.4, и мы получаем формулу

$$\chi(F_\theta) = \chi(M) = 1 - \operatorname{degree}(\mathbf{v}), \tag{1}$$

ибо размерность $2n + 1$ сферы S_ε нечетна.

Но степень отображения $\mathbf{v}$ равна произведению $(-1)^{n+1}$ на кратность μ начала координат как решения системы полиномиальных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}} = 0.$$

Действительно, кратность μ по определению равна степени отображения

$$\mathbf{z} \mapsto \frac{\mathbf{g}(\mathbf{z})}{\| \mathbf{g}(\mathbf{z}) \|}$$

на S_ε, где $\mathbf{g}(\mathbf{z})$ — вектор, комплексно сопряженный вектору $\mathbf{grad} f(\mathbf{z})$, а отображение комплексного сопряжения

$$(g_1, \ldots, g_{n+1}) \mapsto (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{n+1}),$$

очевидно, переводит сферу S_ε в себя, и притом со степенью $(-1)^{n+1}$.

Подставляя все это в формулу (1), получаем

$$\chi(F_\theta) = 1 + (-1)^n \mu.$$

Но по определению эйлерово число $\chi(F_\theta)$ равно

$$\Sigma(-1)^j \operatorname{rank} H_j(F_\theta) = 1 + (-1)^n \operatorname{rank} H_n(F_\theta).$$

Следовательно,

$$\mu = \operatorname{rank} H_n(F_\theta),$$

чем и завершается доказательство теоремы 7.2.

§ 8. Является ли K топологической сферой?

Предположим опять, что начало координат является изолированной критической точкой многочлена $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$, где $n \geqslant 1$. Как можно решить, является компактное $(2n-1)$-мерное многообразие $K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$ топологической сферой или нет?

Лемма 8.1. *Если $n \neq 2$, то многообразие K гомеоморфно сфере S^{2n-1} тогда и только тогда, когда K является гомологической сферой.*

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Если $n \geqslant 3$, то, согласно теореме 5.2, многообразие K односвязно. Таким образом, для $n \geqslant 3$ многообразие K является гомотопической сферой размерности $\geqslant 5$, и потому утверждение леммы следует из доказанной Смейлом и Столлингсом обобщенной гипотезой Пуанкаре. Лемма доказана.

Замечание. Для $n = 2$ соответствующее утверждение неверно. Действительно, как показал Мамфорд, в этом случае фундаментальная группа $\pi_1(K)$

никогда не бывает тривиальной (см. также Хирцебрух [1]). Например, рассмотрим многочлен

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^3 + z_3^5$$

изученного Брискорном типа. Как показал Хирцебрух, соответствующее этому многочлену трехмерное многообразие K является гомологической сферой, но $\pi_1(K)$ является совершенной группой из 120 элементов, изоморфной группе $SL(2, Z_5)$ (ср. пример 9.8). Это многообразие Пуанкаре K хорошо известно специалистам по теории узлов как p-кратное разветвленное покрытие трехмерной сферы, разветвленное вдоль торического узла типа (q, r), где p, q, r — любая перестановка чисел 2, 3, 5.

Лемму 8.1 можно уточнить следующим образом.

Лемма 8.2. *Для $n \neq 2$ многообразие K является топологической сферой тогда и только тогда, когда приведенная группа гомологий $\tilde{H}_{n-1}K$ тривиальна.*

Действительно, если группа $\tilde{H}_{n-1}(K)$ тривиальна, то, используя двойственность Пуанкаре и тот факт, что многообразие K $(n-2)$-связно, мы легко получаем, что K является гомологической сферой.

Фиксируем теперь какую-нибудь ориентацию $2n$-мерного ориентируемого многообразия F_θ и заметим, что для любых двух n-мерных классов гомологий α, β многообразия F_θ корректно определен индекс пересечения $s(\alpha, \beta)$.

Лемма 8.3. *Многообразие K является гомологической сферой тогда и только тогда, когда спаривание*

$$s\colon H_n F_\theta \otimes H_n F_\theta \to Z,$$

определяемое пересечением циклов, имеет определитель ± 1.

Доказательство. Это следует из точности гомологической последовательности пары $(\bar{F}_\theta, K)$

$$H_n \bar{F}_\theta \xrightarrow{j_*} H_n(\bar{F}_\theta, K) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1} K \to 0,$$

где первая группа, как известно, является свободной абелевой группой ранга μ. Из теоремы двойственности Пуанкаре следует, что $H_n(\bar{F}_\theta, K)$ также является свободной абелевой группой ранга μ и что определяемое пересечением циклов спаривание

$$s': H_n(\bar{F}_\theta, K) \otimes H_n\bar{F}_\theta \to Z$$

имеет определитель ± 1. Используя равенство

$$s(\alpha, \beta) = s'(j_*\alpha, \cdot \beta),$$

мы получаем, что j_* является изоморфизмом тогда и только тогда, когда s имеет определитель ± 1. Лемма доказана.

Имеется другой подход к вычислению группы $\bar{H}_{n-1}K$. Для данного расслоения

$$\varphi: E \to S^1$$

над окружностью естественное действие образующего элемента группы $\pi_1(S^1)$ на гомологиях слоя описывается автоморфизмом

$$\mathbf{h}_*: H_*F_0 \to H_*F_0.$$

Здесь символом $\mathbf{h}$ обозначен *характеристический гомеоморфизм слоя* $F_0 = \varphi^{-1}(1)$. Чтобы его получить, нужно, используя теорему о накрывающей гомотопии, выбрать какое-нибудь непрерывное однопараметрическое семейство гомеоморфизмов

$$\mathbf{h}_t: F_0 \to F_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

где $\mathbf{h}_0$ — тождественное отображение; тогда $\mathbf{h} = \mathbf{h}_{2\pi}$ и будет характеристическим гомеоморфизмом.

Лемма 8.4 (Ван). *Для любого расслоения над окружностью имеет место точная последовательность вида*

$$\ldots \to H_{j+1}E \to H_jF_0 \xrightarrow{\mathbf{h}_*-\mathbf{I}_*} H_jF_0 \to H_jE \to \ldots,$$

где $\mathbf{I}$ — *тождественное отображение слоя* F_0 *и* $\mathbf{h}$ — *характеристический гомеоморфизм.*

Доказательство. Идея доказательства заключается в следующем. Накрывающая гомотопия $\{\mathbf{h}_t\}$ определяет отображение

$$F_0 \times [0, 2\pi] \to E,$$

которое индуцирует изоморфизм относительных групп гомологий

$$H_j(F_0 \times [0, 2\pi], F_0 \times [0] \cup F_0 \times [2\pi]) \xrightarrow{\cong} H_j(E, F_0).$$

Отождествляя группу, стоящую слева, с группой $H_{j-1}F_0$ и подставляя ее вместо группы $H_j(E, F^0)$ в точную гомологическую последовательность пары (E, F_0), мы и получаем последовательность Вана.

Рассмотрим теперь расслоение $\varphi: S_\varepsilon \setminus K \to S^1$, введенное в § 4. Обозначим через $\Delta(t)$ характеристический многочлен

$$\Delta(t) = \det(t\mathbf{I}_* - \mathbf{h}_*)$$

линейного преобразования

$$\mathbf{h}_*: H_nF_0 \to H_nF_0.$$

Таким образом, $\Delta(t)$ — это многочлен с целыми коэффициентами вида

$$t^\mu + a_1t^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1}t \pm 1.$$

Теорема 8.5. *Для $n \neq 2$ многообразие K является топологической сферой тогда и только тогда, когда целое число*

$$\Delta(1) = \det(\mathbf{I}_* - \mathbf{h}_*)$$

равно ± 1.

Доказательство. Для $n > 1$ утверждение теоремы следует непосредственно из точности последовательности Вана

$$H_nF_0 \xrightarrow{\mathbf{h}_*-\mathbf{I}_*} H_nF_0 \to H_n(S_\varepsilon \setminus K) \to 0$$

с учетом изоморфизма двойственности Александера

$$H_n(S_\varepsilon \setminus K) \cong H^nK$$

и изоморфизма двойственности Пуанкаре

$$H^n K \cong H_{n-1} K$$

(ср. с леммой 8.2). Для $n = 1$ доказательство следует из аналогичных соображений.

Замечание 8.6. Многочлен $\Delta(t)$ можно получить и другим способом. Вместо автоморфизма $\mathbf{h}$ слоя F_0 можно использовать накрывающее преобразование в бесконечном циклическом накрывающем пространстве $\tilde{E}$ дополнения $E = S_\varepsilon \setminus K$ (см. Левин [1]). Легко проверить, что существует гомеоморфизм пространства $\tilde{E}$ на пространство $F_0 \times R$, при котором некоторой образующей группы накрывающих преобразований соответствует гомеоморфизм

$$(\mathbf{z},\ r) \longmapsto (\mathbf{h}(\mathbf{z}),\ r - 2\pi)$$

пространства $F_0 \times R$. Это показывает, что $\Delta(t)$ является топологическим инвариантом пространства $S_\varepsilon \setminus K$, по крайней мере для связных K. Этот инвариант представляет собой n-мерное обобщение многочлена Александера узла (см. лемму 10.1).

Замечание 8.7. В случае когда K является топологической сферой, встает вопрос, какую дифференцируемую структуру имеет эта сфера? Так как K ограничивает $(n-1)$-связное параллелизуемое многообразие $\bar{F}_0$, класс диффеоморфизма многообразия K полностью определяется для четных n сигнатурой определяемого пересечением циклов спаривания

$$H_n F_0 \otimes H_n F_0 \to Z,$$

а для нечетных n — инвариантом Кервэра

$$c(F_0) \in Z_2$$

(см. Кервэр и Милнор [1], § 7.5 и 8.5). Здесь тоже случай $n = 2$ надо исключить.

Замечательная теорема Левина утверждает, что для нечетных n инвариант Кервэра задается формулами

$$c(F_0) = 0, \quad \text{если } \Delta(-1) \equiv \pm 1 \pmod 8;$$
$$c(F_0) = 1, \quad \text{если } \Delta(-1) \equiv \pm 3 \pmod 8.$$

Таким образом, для нечетных n характеристический многочлен $\Delta(t)$ полностью определяет дифференциальную структуру многообразия K, по крайней мере в случае, когда K является топологической сферой.

§ 9. Многообразия Брискорна и взвешенные однородные многочлены

Пусть даны целые числа $a_1, \ldots, a_{n+1} \geqslant 2$. Рассмотрим многочлен

$$f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1)^{a_1} + (z_2)^{a_2} + \ldots + (z_{n+1})^{a_{n+1}}.$$

Очевидно, начало координат является единственной критической точкой функции f, поэтому пересечение $V = f^{-1}(0)$ со сферой S_ε является гладким многообразием K размерности $2n - 1$. Рассмотрим расслоение φ: $S_\varepsilon \setminus K \to S^1$ со слоем F_θ размерности $2n$, связанное с многочленом f.

Теорема 9.1 (Брискорн — Фам). *Группа гомологий $H_n(F_\theta)$ является свободной абелевой группой ранга*

$$\mu = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \ldots (a_{n+1} - 1).$$

Характеристическими корнями линейного преобразования

$$\mathbf{h}_*\colon H_n(F_0; C) \to H_n(F_0; C)$$

являются произведения $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n+1}$, где каждое ω_j пробегает все a_j-е корни из единицы, отличные от 1. Следовательно, характеристический многочлен задается формулой

$$\Delta(t) = \prod (t - \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n+1}).$$

Другое выражение для многочлена $\Delta(t)$ будет дано в теореме 9.6.

В качестве примера рассмотрим обобщенный трилистный узел $K \subset S_\varepsilon$, соответствующий набору показателей

$$a_1 = \ldots = a_n = 2, \quad a_{n+1} = 3.$$

Тогда

$$\omega_1 = \ldots = \omega_n = -1, \quad \omega_{n+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

и, значит,

$$\Delta(t) = t^2 - t + 1 \quad \text{для нечетных } n,$$
$$\Delta(t) = t^2 + t + 1 \quad \text{для четных } n.$$

Таким образом, для нечетных n мы имеем $\Delta(1) = 1$, так что K является топологической сферой размерности $2n - 1 = 1, 5, 9, 13, \ldots$. Если размерность многообразия K равна 1 или 5, то K диффеоморфно стандартной сфере, так как в этих размерностях не существует экзотических сфер. Но в случае $2n - 1 = 9$ многообразие K диффеоморфно экзотической 9-мерной сфере Кервэра (ср. замечание 8.7).

Аналогичные примеры экзотических и неэкзотических сфер в размерностях 7, 11, 15, ... были даны Хирцебрухом и Брискорном. Любая экзотическая сфера, которую можно с коразмерностью 2 вложить в евклидово пространство, может быть получена этим способом.

В связи с теоремой 9.1 возникает несколько вопросов. Существует ли алгоритм для вычисления характеристических многочленов $\Delta(t)$, ассоциированных с произвольной изолированной критической точкой? Всегда ли $\Delta(t)$ является произведением циклотомических многочленов? [1]) Всегда ли можно структурную группу расслоения $\varphi\colon S_\varepsilon \setminus K \to S^1$ свести к конечной группе (или по крайней мере к компактной группе)?

(В классическом случае $n = 1$ многочлен Александера был вычислен Зарисским для случая, когда узел K связен, и Бурау для случая, когда K имеет не более двух компонент.)

[1]) Доказательство того, что $\Delta(t)$ всегда является произведением циклотомических многочленов, было недавно получено Гротендиком. Относящиеся сюда результаты изложены Гротендиком в [1].

Доказательство теоремы 9.1. Положим для удобства $m = n + 1$.

Заметим прежде всего, что (в силу специального вида многочлена f) расслоение $\varphi\colon S_\varepsilon \setminus K \to S^1$ продолжается до локально тривиального расслоения

$$\psi\colon C^m \setminus V \to S^1,$$

где отображение ψ, как и отображение φ, определяется формулой

$$\psi(\mathbf{z}) = \frac{f(\mathbf{z})}{|f(\mathbf{z})|}.$$

Используя однопараметрическую группу диффеоморфизмов

$$\mathbf{h}_t\colon C^m \setminus V \to C^m \setminus V,$$

определяемых формулой

$$\mathbf{h}_t(z_1, \ldots, z_m) = (e^{it/a_1} z_1, \ldots, e^{it/a_m} z_m),$$

легко проверить, что отображение ψ является локально тривиальным расслоением. Заметим, что $\mathbf{h}_t$ диффеоморфно переводит каждый слой $\psi^{-1}(y)$ на слой $\psi^{-1}(e^{it}y)$. Особенно интересует нас характеристический гомеоморфизм $\mathbf{h}_{2\pi}$.

Заметим также, что отображение

$$(\mathbf{z}, r) \mapsto \left(e^{\frac{r}{a_1}} z_1, \ldots, e^{\frac{r}{a_m}} z_m\right), \quad \mathbf{z} \in S_\varepsilon \setminus K, \ r \in R,$$

диффеоморфно переводит $\varphi^{-1}(y) \times R$ в слой $\psi^{-1}(y)$.

Таким образом, новое расслоение ψ имеет тот же самый послойный гомотопический тип, что и прежнее расслоение φ.

Обозначим через Ω_a конечную циклическую группу, состоящую из всех a-х корней из единицы, и через J — соединение

$$J = \Omega_{a_1} * \Omega_{a_2} * \ldots * \Omega_{a_m} \subset C^m,$$

состоящее из всех линейных комбинаций векторов

$$(t_1\omega_1,\ t_2\omega_2,\ \ldots,\ t_m\omega_m),$$

где

$$t_1 \geqslant 0,\ \ldots,\ t_m \geqslant 0,\ t_1 + \ldots + t_m = 1$$

и $\omega_j \in \Omega_{a_j}$. Отметим, что J содержится в слое $\psi^{-1}(1)$.

Лемма 9.2 (Фам). *Соединение J является деформационным ретрактом слоя $\psi^{-1}(1)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{z} \in \psi^{-1}(1)$. Будем двигать каждую координату z_j вдоль пути в C, выбранного так, чтобы a_j-я степень координаты z_j передвигалась по прямой линии в ближайшую точку $\operatorname{Re}\left(z_j^{a_j}\right)$ вещественной оси. При этом вектор $\mathbf{z}$ движется к вектору $\mathbf{z}'$, у которого $(z'_j)^{a_j} \in R$ для всех j. Очевидно, значение функции $f(\mathbf{z}) > 0$ не меняется в процессе этой деформации; поэтому мы остаемся все время внутри слоя $\psi^{-1}(1)$. Далее, для каждого j, такого, что $(z'_j)^{a_j} < 0$, «стянем» координату z'_j по прямой линии в нуль; если $(z'_j)^{a_j} \geqslant 0$, оставим z'_j неизменным. В результате вектор $\mathbf{z}'$ перейдет по прямой линии в вектор $\mathbf{z}'' \in \psi^{-1}(1)$, у которого $(z''_j)^{a_j} \geqslant 0$ для всех j, так что каждая координата z''_j имеет вид $t_j\omega_j$, где $t_j \geqslant 0$ и $\omega_j \in \Omega_{a_j}$. Наконец, сдвинем $\mathbf{z}''$ по прямой линии в точку

$$\frac{\mathbf{z}''}{t_1 + \ldots + t_{n+1}} \in J.$$

Так как точки соединения J остаются неподвижными в процессе всей деформации, этим завершается доказательство леммы 9.2.

Группы гомологий любого соединения $A * B$, естественно, изоморфны прямой сумме тензорных произведений

$$\tilde{H}_{k+1}(A * B) \cong \sum_{i+j=k} \tilde{H}_i A \otimes \tilde{H}_j B$$

при условии, что $\tilde{H}_* A$ не имеет кручения (см., например, Милнор [1]). Так как каждое пространство Ω_{a_j} имеет нетривиальную группу гомологий лишь в размерности нуль, то рассуждением по индукции мы получаем, что

$$\tilde{H}_{m-1} J = \tilde{H}_0 \Omega_{a_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{H}_0 \Omega_{a_m}$$

и что приведенные группы гомологий соединения J тривиальны во всех других размерностях.

Напомним теперь, что характеристический гомеоморфизм

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_{2\pi}\colon\ \psi^{-1}(1) \to \psi^{-1}(1),$$

задается формулой

$$\mathbf{h}_{2\pi}(\mathbf{z}) = \left(e^{\frac{2\pi i}{a_1}} z_1,\ \ldots,\ e^{\frac{2\pi i}{a_m}} z_m\right).$$

Очевидно, этот гомеоморфизм переводит J в себя, и отображение $\mathbf{h}_{2\pi}|J$ можно представить в виде соединения отображений

$$r_{a_1} * \ldots * r_{a_m}\colon\ J \to J,$$

где r_a обозначает поворот пространства Ω_a на угол $2\pi/a$, задаваемый формулой

$$r_a(\omega) = e^{2\pi i/a}\omega.$$

Рассмотрим индуцированный гомоморфизм

$$(r_a)_*\colon\ \tilde{H}_0(\Omega_a;\ C) \to \tilde{H}_0(\Omega_a;\ C)$$

приведенных групп гомологий. Очевидно, собственными значениями преобразования $(r_a)_*$ являются корни a-й степени из единицы, отличные от 1. [Доказательство: для любого целого числа ν, расположенного между 1 и $a - 1$, класс гомологий из группы $\tilde{H}_0(\Omega_a;\ C)$, имеющий коэффициенты $\omega^\nu \in C$ при каждой точке $\omega \in \Omega_a$, является собственным вектором преобразования $(r_a)_*$, соответствующим значению $e^{-2\pi i\nu/a}$.]

Следовательно, собственными значениями тензорного произведения преобразований

$$(\mathbf{h}_{2\pi}\,|\,J)_* = (r_{a_1})_* \otimes \ldots \otimes (r_{a_m})_*$$

являются произведения $\omega_1\omega_2 \ldots \omega_m$, где каждое ω_j пробегает все a_j-е корни из единицы, отличные от 1. Этим завершается доказательство теоремы 9.1.

Существует значительно более широкий класс многочленов, работать с которыми почти так же просто, как с многочленами Брискорна. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — положительные числа.

Определение 9.3. Многочлен $f(z_1, \ldots, z_m)$ называется *взвешенным однородным* многочленом типа $(a_1, \ldots, a_m)$, если его можно представить в виде линейной комбинации одночленов $z_1^{i_1} \ldots z_m^{i_m}$, таких, что

$$\frac{i_1}{a_1} + \ldots + \frac{i_m}{a_m} = 1.$$

Это эквивалентно требованию, что

$$f(e^{c/a_1}z_1, \ldots, e^{c/a_m}z_m) = e^c f(z_1, \ldots, z_m)$$

для любого комплексного числа c.

Лемма 9.4. *Если многочлен f является взвешенным однородным, то слой F расслоения из § 4 диффеоморфен неособой гиперповерхности*

$$F' = \{\mathbf{z} \in C^m \,|\, f(\mathbf{z}) = 1\}.$$

В качестве характеристического гомеоморфизма F' (или F) на себя можно взять периодическое унитарное преобразование

$$\mathbf{h}(z_1, \ldots, z_m) = (e^{2\pi i/a_1}z_1, \ldots, e^{2\pi i/a_m}z_m).$$

Доказательство очевидно.

Обозначим через $\mathbf{h}^j$: $F' \to F'$ композицию отображения $\mathbf{h}$ с самим собой j раз. Множеством неподвижных точек отображения $\mathbf{h}^j$ является, очевидно, пересечение гиперповерхности F' с линейным подпространством L_j пространства C^m, определяемым уравнениями вида $z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0$. Нетрудно проверить, что это множество неподвижных точек $F' \cap L_j$ само является неособой гиперповерхностью в пространстве L_j.

Лемма 9.5. *Число Лефшеца отображения $\mathbf{h}^j$: $F' \to F'$ равно эйлерову числу многообразия неподвижных точек отображения $\mathbf{h}^j$.*

Мы будем обозначать это эйлерово (или лефшецево) число символом χ_j.

Доказательство. Сначала отметим тот более общий факт, что число Лефшеца любой изометрии компактного риманова многообразия равно эйлерову числу многообразия ее неподвижных точек (ср. Кобаяси [1]). Действительно, число Лефшеца любого отображения f компактного многообразия в себя зависит лишь от поведения отображения f в окрестности множества неподвижных точек. Следовательно, в частном случае изометрии мы можем сначала заменить все многообразие трубчатой окрестностью T множества неподвижных точек, а затем уже применять формулу Лефшеца к ограничению отображения f на трубчатую окрестность T.

Теперь доказательство леммы проводится следующим образом. В качестве компактного многообразия возьмем пересечение гиперповерхности F' с некоторым достаточно большим диском D с центром в начале координат[1]). Используя следствие 2.8, можно показать, что многообразие $D \cap F'$ является деформационным ретрактом гиперповерхности F'. Аналогично множество неподвижных точек $D \cap F' \cap L_j$ является деформационным ретрактом множества $F' \cap L_j$. Из этих замечаний легко следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь дзета-функцию А. Вейля

$$\zeta(t) = \exp \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j \frac{t^j}{j}$$

[1]) При этом получается, очевидно, многообразие с границей. Но более подробный анализ показывает, что существование граничных точек не вызывает никаких затруднений.

отображения h (см. Милнор [5]). Так как отображение h является периодическим с периодом, скажем, p, то прямое вычисление показывает, что функцию $\zeta(t)$ можно представить в виде произведения

$$\zeta(t)=\prod_{d\mid p}(1-t^d)^{-r_d},$$

где показатели $-r_d$ вычисляются рекурсивно по формуле

$$\chi_j=\sum_{d\mid j} dr_d.$$

(Оказывается, что r_d является целым числом, отличным от нуля, только если d является делителем периода p.)

Согласно А. Вейлю, дзету-функцию можно представить в виде «знакопеременного» произведения многочленов

$$\zeta(t)=P_0(t)^{-1}P_1(t)P_2(t)^{-1}\ \dots\ P_{m-1}(t)^{\pm 1},$$

где $P_i(t)$ — определитель линейного преобразования

$$(\mathbf{I}_*-t\mathbf{h}_*)\colon\ H_iF'\to H_iF'.$$

Предположим, что начало координат является изолированной критической точкой многочлена f, так что слой F' имеет ненулевые гомологии только в размерностях 0 и $m-1$. Ясно, что $P_0(t)=1-t$, а $P_{m-1}(t)$ совпадает с точностью до знака с характеристическим многочленом $\Delta(t)$, рассмотренным в § 8. (Это следует из того, что коэффициенты многочлена $\Delta(t)$ симметричны; последнее видно из того, что $\Delta(t)$ есть характеристический многочлен периодического линейного преобразования.) Таким образом, справедлива

Теорема 9.6. *Числа Эйлера χ_d многообразий неподвижных точек различных итераций $\mathbf{h}^d\colon F'\to F'$ связаны с характеристическим многочленом $\Delta(t)$ формулой*

$$\Delta(t)=(t-1)^{-1}\prod_{d\mid p}(t^d-1)^{r_d},$$

если m нечетно, или формулой

$$\Delta(t)=(t-1)\prod_{d\mid p}(t^d-1)^{-r_d},$$

если m четно, где $\chi_i=\sum_{d\mid i} dr_d$.

Рассмотрим два примера.

Пример 9.7. Многочлен

$$z_1^2z_2+z_2^4=(z_1^2+z_2^3)\,z_2$$

является взвешенным однородным типа (8/3, 4). Положим $u=e^{2\pi i/8}$. Линейное преобразование

$$\mathbf{h}(z_1,\ z_2)=(u^3z_1,\ u^2z_2)$$

имеет период 8. Заметим, что у отображений h и $\mathbf{h}^2$ нет нетривиальных неподвижных точек, а отображение $\mathbf{h}^4$ имеет четыре неподвижные точки на F' (четыре решения системы уравнений $z_1^2z_2+z_2^4=1$, $z_1=0$). Вычисления показывают, что $\mu=5$, поэтому число Эйлера $1-\mu$ множества неподвижных точек отображения $\mathbf{h}^8$: $F'\to F'$ равно -4. Следовательно,

$$\chi_1=0,\quad \chi_2=0,\quad \chi_4=4,\quad \chi_8=-4$$

и

$$r_1=0,\quad r_2=0,\quad r_4=1,\quad r_8=-1,$$

а значит,

$$\Delta(t)=(t-1)(t^4-1)^{-1}(t^8-1)=(t-1)(t^4+1).$$

Замечание. Многообразие K, состоящее из всех нулей многочлена $z_1^2z_2+z_2^4$, лежащих на сфере S_ε, представляет собой трилистный узел, зацепленный с окружностью с числом зацепления, равным двум. Многочлен Александера этого зацепления равен $t_1^3t_2+1$ (см. лемму 10.1).

Пример 9.8 (ср. Клейн [1], Хирцебрух [1]—[3], Картан [1]). Пусть G — некоторая конечная подгруппа специальной унитарной группы $SU(2)$. Тогда G действует на координатном пространстве C^2, причем единственной неподвижной точкой является начало координат.

Утверждение. Кольцо, состоящее из всех многочленов от двух переменных, инвариантных относительно действия группы G, порождается тремя однородными многочленами, скажем p_1, p_2, p_3, различных степеней. Эти многочлены связаны единственным полиномиальным уравнением

$$f(p_1, p_2, p_3) = 0,$$

где f — взвешенная однородная функция. Отображение $\mathrm{p} = (p_1, p_2, p_3): C^2 \to C^3$ есть гомеоморфизм пространства орбит C^2/G на гиперповерхность $V = f^{-1}(0) \subset C^3$.

Отсюда легко следует, что трехмерное многообразие S^3/G с фундаментальной группой, изоморфной группе G, гомеоморфно отображается на подмногообразие многообразия V, диффеоморфное пересечению $K = V \cap S_\varepsilon$.

Например, если G является бинарной группой икосаэдра при эпиморфизме $SU(2) \to SO(3)$, то многочлены p_1, p_2, p_3 являются однородными многочленами степеней 30, 20 и 12 соответственно. Нули многочлена p_3 в проективном пространстве, состоящем из всех прямых, проходящих через начало координат в C^2, образуют двенадцать вершин правильного икосаэдра, нули многочлена p_2 образуют средние точки двадцати граней этого икосаэдра, а нули многочлена p_1 образуют средние точки тридцати ребер этого икосаэдра. Эти три многочлена связаны между собой уравнением

$$p_1^2 + p_2^3 + p_3^5 = 0.$$

Следовательно, пространство орбит C^2/G изоморфно алгебраическому многообразию Брискорна $V(2, 3, 5)$ и многообразие Пуанкаре S^3/G диффеоморфно пересечению $K = V(2, 3, 5) \cap S_\varepsilon$ (ср. § 8).

(Интересно отметить, что каждая нетривиальная орбита группы G в C^2 может быть представлена в виде множества вершин некоторого правильного многогранника с шестьюстами гранями, каждая из которых является правильным тетраэдром (см. Коксетер [1]).)

Аналогично, если G — циклическая группа порядка k, то линзовое пространство S^3/G диффеоморфно многообразию $V(2, 2, k) \cap S_\varepsilon$; если G — группа кватернионов, то $S^3/G \cong V(2, 3, 3) \cap S_\varepsilon$; если G — бинарная группа тетраэдра, то $S^3/G \cong V(2, 3, 4) \cap S_\varepsilon$.

Для бинарной группы октаэдра с 48 элементами пространство орбит C^2/G изоморфно алгебраическому многообразию, определяемому взвешенным однородным уравнением

$$z_1^2 + z_2^3 + z_2 z_3^3 = 0.$$

Наконец, для бинарной группы диэдра с $4k$ элементами мы получаем алгебраическое многообразие

$$z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{k+1} = 0.$$

(Отметим, что в частном случае $k = 2$ это алгебраическое многообразие изоморфно многообразию $V(2, 3, 3)$.) Мы рассмотрели все примеры (которые можно получить с помощью конечных подгрупп группы $SU(2)$).

З а м е ч а н и е. Отметим, что все перечисленные выше взвешенные однородные многочлены имеют тип (a_1, a_2, a_3), удовлетворяющий условию $(1/a_1) + (1/a_2) + (1/a_3) > 1$. Предполагают, что при $(1/a_1) + (1/a_2) + (1/a_3) \leqslant 1$ фундаментальная группа трехмерного многообразия $K = V \cap S_\varepsilon$ бесконечна, а универсальным накрывающим пространством этого многообразия служит некоторая открытая трехмерная клетка. Предполагают, кроме того, что эта бесконечная группа является нильпотентной лишь при $(1/a_1) + (1/a_2) + (1/a_3) = 1$. Для алгебраических многообразий Брискорна $V(3, 3, 3)$, $V(2, 4, 4)$ и $V(2, 3, 6)$ это имеет место (см. Брискорн [3]).

§ 10. Классический случай. Кривые в пространстве C^2

В этом параграфе будет проведено сравнение результатов алгебраической геометрии, касающихся особых точек комплексной кривой, с соответствующими результатами теории узлов (см. Браунер [1], Кэлер [1], Зарисский [1], Бурау [1]—[2], Рив [1]). В частности, мы сравним многочлен Александера зацепления $K = V \cap S_\varepsilon$ с характеристическим многочленом $\Delta(t)$, определенным в § 8, и докажем равенство

$$2\delta = \mu + r - 1,$$

связывающее «число двойных точек» δ в начале координат с кратностью μ, изучавшейся в § 7, и числом r ветвей кривой V, проходящих через начало координат.

Пусть многочлен $f(z_1, z_2)$ от двух комплексных переменных, обращающийся в нуль в начале координат, либо неприводим, либо является произведением различных неприводимых многочленов. Множество особенностей $\Sigma(V)$ кривой $V = f^{-1}(0)$ состоит из всех точек кривой V, в которых

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

(см. лемму 2.5). Так как каждая неприводимая составляющая кривой V содержит по крайней мере одну простую точку, не лежащую ни на какой другой неприводимой составляющей, отсюда следует, что размерность множества особенностей $\Sigma(V)$ меньше единицы и, следовательно, это множество конечно. Поэтому начало координат является либо простой точкой, либо изолированной особой точкой и, значит, применимы результаты § 6—8.

Пусть r — число локально аналитических ветвей кривой V, проходящих через начало координат (см. лемму 3.3). Тогда пересечение $K = V \cap S_\varepsilon$ является гладким компактным одномерным многообразием с r компонентами, другими словами, является *зацеплением* в трехмерной сфере S_ε (см. следствие 2.9 и теорему 2.10; зацепление с одной компонентой называется *узлом*).

Лемма 10.1. *Если $r = 1$, то характеристический многочлен $\Delta(t)$, определенный в § 8, совпадает с многочленом Александера узла K. Если $r \geqslant 2$, то многочлен $\Delta(t)$ связан с многочленом Александера $\Delta(t_1, \ldots, t_r)$ зацепления K равенством*

$$\pm t^i \Delta(t) = (t-1)\Delta(t, \ldots, t).$$

Наличие множителя $\pm t^i$ объясняется тем, что многочлен $\Delta(t_1, \ldots, t_r)$ определен только с точностью до множителя $\pm t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r}$.

Доказательство леммы 10.1 будет дано в конце параграфа.

Пример. Алгебраическое множество

$$z_1^p + z_2^{pq} = 0$$

состоит из p неособых ветвей, любые две из которых пересекаются в начале координат, причем кратность

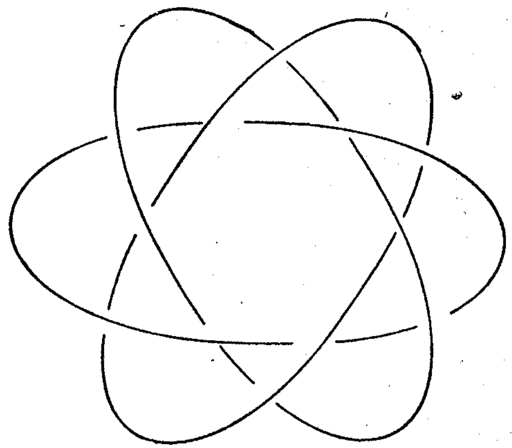

Рис. 5. Узел K, отвечающий уравнению $z_1^3 + z_2^6 = 0$.

пересечения равна q. (Каждую ветвь можно определить полиномиальным уравнением вида $z_1 = \omega z_2^q$, где $\omega^p = -1$.) Соответственно пересечение $K = V \cap S_\varepsilon$ является торическим зацеплением, состоящим из p незаузленных окружностей, любые две из которых имеют индекс зацепления q (см. рис. 5, где изображен случай $p = 3$, $q = 2$). Вычисления показывают, что

$$\Delta(t_1, \ldots, t_p) = \frac{((t_1 \ldots t_p)^q - 1)^{p-1}}{(t_1 \ldots t_p - 1)}$$

при условии, что $p \geqslant 2$. Следовательно,

$$\Delta(t) = \frac{(t-1)(t^{pq}-1)^{p-1}}{(t_p - 1)},$$

и степень μ многочлена $\Delta(t)$ равна $(p-1)(pq-1)$. Это согласуется, конечно, с теоремами 9.1 и 9.6.

Расслоения дополнения узла были досконально изучены Столлингсом и Нойвиртом[1]). Они установили следующий результат.

Теорема Нойвирта — Столлингса. *Для ручного узла K в трехмерной сфере следующие три условия эквивалентны:*

(1) *дополнение $S^3 \setminus K$ есть пространство расслоения над окружностью, причем слой F является связной поверхностью;*

(2) *коммутант G' группы узла $G = \pi_1(S^3 \setminus K)$ является свободной группой;*

(3) *коммутант G' является конечно порожденной группой.*

Далее, если узел K удовлетворяет этим условиям, то

(4) *коэффициент при старшем члене многочлена Александера узла K равен ± 1, а степень этого многочлена, скажем μ, равна рангу свободной группы G';*

(5) *слой F является ориентируемой поверхностью рода $\mu/2$ с ровно одним краем*[2]);

[1]) Аналогичные результаты для более высоких размерностей были получены Браудером и Левином.

[2]) Другими словами, поверхность F можно получить из компактной поверхности рода $\mu/2$ удалением одной точки. Доказательство того, что F имеет только один край, основано на том факте, что в противном случае надлежащим образом выбранное конечное циклическое накрытие пространства $S^3 \setminus K$ также должно было бы иметь больше одного края, что невозможно.

(6) *целое число $\mu/2$ равно роду узла.*

(По определению *родом узла K* называется наименьший род, который может иметь ориентируемая поверхность, натягиваемая на K в S^3.)

Применяя теорему Нойвирта — Столлингса к нашему расслоению, получаем

Следствие 10.2. *Если только одна ветвь комплексной кривой V проходит через начало координат, то $K = V \cap S_\varepsilon$ является узлом Нойвирта — Столлингса. Коммутант группы $\pi_1(S_\varepsilon \setminus K)$ является свободной группой ранга μ, и род узла K равен роду $\mu/2$ поверхности $\bar{F}_\theta$, натянутой на узел K.*

(Отсюда немедленно вытекает, что это целое число μ совпадает с кратностью нуля μ из теоремы 7.2.)

Замечание. Не каждый узел Нойвирта — Столлингса можно получить таким способом. Например, «восьмерка»[1]) (4_1 в таблице Александера — Бригга) является узлом Нойвирта — Столлингса, но не может быть получена как узел $V \cap S_\varepsilon$ комплексной особенности, так как его многочлен Александера $t^2 - 3t + 1$ не является произведением циклотомических многочленов (ср. со сказанным в § 9).

Не пытаясь доказывать здесь теорему Нойвирта — Столлингса, я только намечу ход рассуждений в легкой части ее доказательства, а именно в доказательстве того, что

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), \ (4).$$

Если $S^3 \setminus K$ расслаивается над S^1 со связным слоем F, то из точной последовательности

$$\pi_2(S^1) \to \pi_1(F) \to \pi_1(S^3 \setminus K) \to \pi_1(S^1) \to 1$$

следует, что группу $\pi_1(F)$ можно отождествить с коммутантом G' группы $G = \pi_1(S^3 \setminus K)$. Поскольку фундаментальная группа любой открытой поверхности свободна, тем самым доказана импликация $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть G'' — коммутант группы G'. Согласно Рапа-

[1]) Этот узел называют также *узлом Листинга* или *четырехкратным узлом*. — *Прим. перев.*

порту и Кроуэллу, для коммутанта G' группы узла G группа G'/G'' является свободной абелевой группой конечного ранга[1]). Следовательно, (2) $\Rightarrow$ (3). Фактически Рапапорт и Кроуэлл показали, что ранг группы G'/G'' равен степени многочлена Александера; но группа G'/G'' является конечно порожденной, только если коэффициент при старшем члене многочлена Александера равен ± 1. Следовательно, (2) $\Rightarrow$ (4).

Посмотрим теперь на нашу особую точку с точки зрения алгебраической геометрии. Любой особой точке $\mathbf{z}$ кривой $V \subset C^2$ соответствует целое число $\delta_{\mathbf{z}} > 0$, которое интуитивно есть число двойных точек кривой V вблизи точки $\mathbf{z}$ (см. замечание 10.9). Точное определение числа $\delta_{\mathbf{z}}$ читатель может найти в книге Серра [1], стр. 84.

Для наших целей это целое число $\delta_{\mathbf{z}}$ можно охарактеризовать следующими двумя свойствами.

Свойство 10.3. Целое число $\delta_{\mathbf{z}}$ является локально аналитическим инвариантом. Другими словами, если комплексный аналитический гомеоморфизм, определенный в некоторой открытой окрестности точки $\mathbf{z}$, переводит кривую V локально в некоторую другую алгебраическую кривую V', а точку $\mathbf{z}$ переводит в точку $\mathbf{z}'$, то число $\delta_{\mathbf{z}}(V)$ равняется числу $\delta_{\mathbf{z}'}(V')$. Фактически то же самое верно, если кривая V' получена из V с помощью замены координат, задаваемой формальными степенными рядами.

Свойство 10.4. Если Γ — неприводимая кривая степени d и рода g в комплексной проективной плоскости, то

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = g + \sum \delta_{\mathbf{z}},$$

где суммирование производится по всем особым точкам $\mathbf{z}$ кривой Γ.

Эти два свойства доказаны Серром ([1], стр. 84 и 92 соответственно).

[1]) *Рангом* свободной абелевой группы называется максимальное число независимых элементов.

Замечание. «Род» кривой в смысле алгебраической геометрии — это некоторый инвариант поля рациональных функций, который на первый взгляд совершенно отличен от топологического «рода». Но известная классическая теорема утверждает, что эти два определения совпадают в случае неособых комплексных кривых (см., например, Спрингер [1] или Шевалле [1]).

Теорема 10.5. *Предположим, что через начало координат проходит r ветвей кривой V. Тогда целое число $\delta = \delta_0(V)$ связано с кратностью μ, определенной в § 7, равенством*

$$2\delta = \mu + r - 1.$$

В частности, при $r = 1$ имеем $2\delta = \mu$, т. е. δ равняется роду узла $K = V \cap S_\varepsilon$.

Замечание. Утверждение теоремы 10.5 чисто алгебраическое и, несомненно, является верным для кривых над другими полями характеристики нуль. Но мы приведем ниже топологическое доказательство, применимое лишь к случаю поля комплексных чисел.

Доказательство теоремы 10.5. Пусть $f(z_1, z_2)$ — образующая идеала многочленов, обращающихся в нуль на V. Если степень многочлена $f(z_1, z_2)$ равна d, то соответствующее однородное уравнение

$$z_0^d f\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = 0$$

определяет кривую $\overline{V}$ в комплексной проективной плоскости, причем пересечение кривой $\overline{V}$ с конечной плоскостью C^2 совпадает с кривой V.

Случай 1. Предположим, что пополненная кривая $\overline{V}$ является неприводимой и не имеет других особых точек, кроме первоначальной особой точки $0 \in V$.

Согласно формуле Плюккера (см. свойство 10.4),

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = g + \delta, \qquad (1)$$

где g — род кривой $\overline{V}$ и $\delta = \delta_0(V)$.

Выберем теперь малое число c и обозначим через V_c алгебраическое многообразие

$$\{(z_1, z_2) \mid f(z_1, z_2) = c\}.$$

Из теоремы Сарда или из теоремы Бертини следует, что кривая V_c не имеет ни одной особой точки для почти всех c. Ясно, что пополненное алгебраическое многообразие $\overline{V}_c$ также не имеет особых точек и, следовательно,

$$\frac{1}{2}(d-1)(d-2) = g_c, \tag{2}$$

где g_c — род алгебраического многообразия $\overline{V}_c$. Вычитая (1) из (2), получаем

$$\delta = g_c - g. \tag{3}$$

Посмотрим теперь на топологию нашей ситуации. Напомним, что кривая V трансверсально пересекает некоторую подходящую сферу S_ε по гладкому многообразию K, состоящему из r непересекающихся окружностей. Если c достаточно мало, то очевидно, что V_c также трансверсально пересекает сферу S_ε, причем их пересечение K_c также состоит из r непересекающихся окружностей.

Напомним (см. теорему 5.11), что пересечение кривой V_c с открытым ε-диском диффеоморфно слою F_θ. Таким образом, многообразие с границей $V_c \cap D_\varepsilon$ связно и его первое число Бетти равно μ, а эйлерово число равно

$$\chi(V_c \cap D_\varepsilon) = 1 - \mu.$$

Так как объединение многообразий $V_c \cap D_\varepsilon$ и $\overline{V}_c \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon$ совпадает с $\overline{V}_c$, а пересечение совпадает с K_c, то эйлерово число $2 - 2g_c$ многообразия $\overline{V}_c$ должно равняться числу

$$\chi(V_c \cap D_\varepsilon) + \chi(\overline{V}_c \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon) - \chi(K_c).$$

Следовательно,

$$2 - 2g_c = 1 - \mu + \chi(\overline{V}_c \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon). \tag{4}$$

Прежде чем делать аналогичные вычисления для рода g кривой $\overline{V}$, нам надо выбрать какую-нибудь неособую модель, скажем Γ, для особой кривой $\overline{V}$. Таким образом, Γ является неособой проективной кривой (быть может, в проективном пространстве более высокой размерности), для которой существует отображение $\Gamma \to \overline{V}$, являющееся взаимно однозначным всюду, за исключением r различных точек кривой Γ, которые переходят в одну особую точку кривой $\overline{V}$. Следовательно,

$$2 - 2g = \chi(\Gamma) = \chi(\overline{V}) + r - 1.$$

Представляя $\overline{V}$ в виде объединения двух подмножеств $\overline{V} \cap D_\varepsilon$ и $\overline{V} \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon$ с пересечением K и замечая, что пространство $\overline{V} \cap D_\varepsilon$ стягиваемо, согласно теореме 2.10, мы получаем, что

$$\chi(\overline{V}) = 1 + \chi(\overline{V} \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon)$$

и, значит,

$$2 - 2g = \chi(\overline{V} \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon) + r. \tag{5}$$

Очевидно, многообразие $(\overline{V} \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon)$ диффеоморфно многообразию $(\overline{V}_c \setminus \operatorname{int} D_\varepsilon)$, если c достаточно мало. Поэтому, вычитая (4) из (5) и сравнивая результат с (3), мы приходим к исходной формуле

$$2\delta = 2(g_c - g) = \mu + r - 1,$$

чем и завершается рассмотрение случая 1.

Случай 2. Предположим что проективная кривая $\overline{V}$ приводима или имеет другие особые точки, кроме начала координат $0 = (0, 0, z_0)$.

Модифицируем многочлен $f(z_1, z_2)$, добавив к нему однородный многочлен

$$h(\mathbf{z}) = c_0 z_1^e + c_1 z_1^{e-1} z_2 + \ldots + c_e z_2^e$$

степени $e \geqslant d$. Пусть V' — кривая $f(z_1, z_2) + h(z_1, z_2) = 0$ в C^2 и $\overline{V}'$ — соответствующая проективная кривая

$$z_0^e f(z_1/z_0, z_2/z_0) + h(z_1, z_2) = 0.$$

Докажем две леммы.

Лемма 10.6. *Если степень e поправочного члена h достаточно велика, то целые числа δ', μ', r', отвечающие особой точке 0 кривой V', равны соответственно целым числам δ, μ, r, отвечающим особой точке 0 кривой V.*

Лемма 10.7. *Если e достаточно велико, то почти для каждого выбора комплексных коэффициентов c_0, c_1, ... , c_e проективная кривая $\overline{V}'$ неприводима и не имеет никаких других особых точек, кроме начала координат $z_1 = z_2 = 0$.*

Комбинируя эти леммы, мы, очевидно, получаем доказательство теоремы 10.5. Действительно, согласно случаю 1, имеет место равенство

$$2\delta' = \mu' + r' - 1,$$

откуда, очевидно, вытекает равенство

$$2\delta = \mu + r - 1.$$

Доказательства лемм 10.6 и 10.7 основаны в свою очередь на следующей лемме.

Лемма 10.8. *Пусть f и g — комплексные[1]) аналитические функции от m переменных. Если f имеет изолированную критическую точку в начале координат и если функция $g - f$ имеет в начале координат нуль достаточно высокого порядка, то существует формальный степенной ряд вида*

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} + \sum \mathbf{a}_{jk} z_j z_k + (\text{члены высших порядков}),$$

такой, что

$$f(\mathbf{w}(\mathbf{z})) = g(\mathbf{z}).$$

Замечание. Джон Мезер доказал намного более сильное утверждение, что ряд $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ можно выбрать *сходящимся* (неопубликовано). Этот результат

[1]) Соответствующее утверждение для вещественных функций неверно, например для $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2$.

гораздо более подходил бы для наших[1]) целей, но я докажу лишь более слабое утверждение, сформулированное выше.

Доказательство леммы 10.8. Так как аналитические уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_m} = 0$$

определяют аналитическое множество с изолированной точкой в начале координат, то из локально аналитического варианта теоремы о нулях следует, что некоторые степени $z_j^{k_j}$ j-й координатной функции z_j принадлежат идеалу, натянутому на $df/dz_1, \ldots, df/dz_m$ в кольце локально сходящихся степенных рядов (см. Ганнинг и Росси [1]). Полагая $k = k_1 + \ldots + k_m$, мы видим, что любой одночлен $z_1^{i_1} \ldots z_m^{i_m}$ степени $i_1 + \ldots + i_m \geqslant k$ принадлежит этому идеалу.

Перейдем теперь к кольцу $C[[z_1, \ldots z_m]]$ формальных степенных рядов. Элементы этого кольца будем обозначать символами $f = f(\mathbf{z})$. Пусть I — максимальный идеал, натянутый на $z_1, \ldots, z_m$. Из предыдущих рассуждений вытекает следующее

Утверждение. *Если $e \geqslant k$, то любой элемент идеала I^e можно представить в виде линейной комбинации*

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + a_m \frac{\partial f}{\partial z_m}$$

[1]) *Примечание В. И. Арнольда.* Вероятно, первое доказательство этого факта принадлежит Тужрону. Сейчас известно по меньшей мере 5 разных доказательств (в аналитическом и в бесконечно дифференцируемом вариантах):

Tougeron J. Cl. Idéaux de fonctions différentiables, Thése, Université de Rennes, 1967.

Арнольд В. И., Особенности гладких отображений, *УМН*, 23 (1968), № 1, 3—44.

Самойленко А. М., Об эквивалентности гладкой функции полиному Тэйлора в окрестности критической точки конечного типа, *Функц. анализ и его приложения*, 2 (1968), № 4, 63—69.

Mather J., Stability of C^∞ mappings, III. Finitely determined map-germs, *Publ. Math. Inst. Hautes Ft. Sci.*, № 35, 1968. [Русский перевод: *Математика*, 14 : 1 (1970), 145—175.]

Artin M., On the solutions of analytic equations, *Inventions Math.*, 5 (1968), 277—291.

с коэффициентами

$$a_1, \ldots, a_m \in I^{e-k}.$$

Допустим, что $f \equiv g \bmod I^{2k+1}$. Положим

$$g(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) = \sum a_j^1(\mathbf{z}) \frac{\partial f}{\partial z_j},$$

где $a_j^1 \in I^{k+1}$, и рассмотрим ряд Тэйлора функции $f(\mathbf{z} + \mathbf{a}^1(\mathbf{z}))$ в точке $\mathbf{z}$:

$$f(\mathbf{z} + \mathbf{a}^1(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z}) + \sum a_j^1(\mathbf{z})\, \partial f/\partial z_j +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum a_i^1(\mathbf{z})\, a_j^1(\mathbf{z})\, \partial^2 f/\partial z_i\, \partial z_j + \ldots = g(\mathbf{z}) \mod I^{2k+2}.$$

Будем рассуждать по индукции. Предположим, что мы нашли элементы

$$a_j^2 \in I^{k+2},\ a_j^s \in I^{k+s},$$

такие, что

$$f(\mathbf{z} + \mathbf{a}^1(\mathbf{z}) + \ldots + \mathbf{a}^s(\mathbf{z})) \equiv g(\mathbf{z}) \mod I^{2k+s+1}.$$

Обозначим левую часть этого равенства через $f'(\mathbf{z})$. Рассуждая, как и выше, получаем, что существуют элементы $b_j \in I^{k+s+1}$, такие, что

$$f'(\mathbf{z} + \mathbf{b}(\mathbf{z})) \equiv g(\mathbf{z}) \bmod I^{2k+2s+2}.$$

Полагая

$$\mathbf{a}^{s+1}(\mathbf{z}) = \mathbf{b}(\mathbf{z}) + \sum_{\nu=1}^{s} (\mathbf{a}^{\nu}(\mathbf{z} + \mathbf{b}(\mathbf{z})) - \mathbf{a}^{\nu}(\mathbf{z})),$$

находим, что

$$f(\mathbf{z}+\mathbf{a}^1(\mathbf{z})+\ldots+\mathbf{a}^{s+1}(\mathbf{z})) = f((\mathbf{z}+\mathbf{b}(\mathbf{z}))+\mathbf{a}^1(\mathbf{z}+\mathbf{b}(\mathbf{z}))+\ldots$$
$$\ldots + \mathbf{a}^s(\mathbf{z}+\mathbf{b}(\mathbf{z}))) = f'(\mathbf{z}+\mathbf{b}(\mathbf{z})) = g(\mathbf{z}) \mod I^{2k+s+2}.$$

Поскольку $a_j^{s+1}(\mathbf{z}) \in I^{k+s+1}$, индуктивный шаг завершен.

Переходя теперь к пределу при $s \to \infty$, получаем искомое равенство

$$f(\mathbf{z} + \mathbf{a}^1(\mathbf{z}) + \mathbf{a}^2(\mathbf{z}) + \ldots) = g(\mathbf{z}).$$

Лемма 10.8 доказана.

Доказательство леммы 10.6. Равенство $\delta' = \delta$ вытекает непосредственно из леммы 10.8 и свойства 10.3. Равенство $r' = r$ также следует из леммы 10.8, ибо «ветви» алгебраической кривой можно определить в терминах параметризаций, задаваемых формальными степенными рядами (см., например, Ван дер Варден [2], стр. 52).

Для доказательства равенства $\mu' = \mu$ мы привлечем несколько иные соображения. Мы проведем доказательство для функций от m переменных, так как это не вносит дополнительных трудностей. Поскольку вещественная алгебраическая функция $\|\mathbf{grad}\, f\|^2$ имеет изолированный нуль в начале координат, то из неравенства Хёрмандера и Лоясевича следует, что эта функция отделена от нуля некоторой степенью функции $\|\mathbf{z}\|$, скажем

$$\|\mathbf{grad}\, f(\mathbf{z})\| \geqslant c\, \|\mathbf{z}\|^r > 0,$$

где $0 < \|\mathbf{z}\| \leqslant \varepsilon$. (Последнее неравенство можно также получить с помощью локально аналитического варианта теоремы о нулях.)

Далее, если степень однородного многочлена h не меньше $r + 2$, то

$$\|\mathbf{grad}\, h(\mathbf{z})\| < c\, \|\mathbf{z}\|^r$$

для достаточно малых $\mathbf{z}$. Используя принцип Руше, отсюда легко вывести, что степень μ' отображения

$$\frac{\left(\frac{\partial (f+h)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial (f+h)}{\partial z_m}\right)}{\left\|\left(\frac{\partial (f+h)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial (f+h)}{\partial z_m}\right)\right\|}$$

на сфере S_ε равна степени μ отображения

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_m}\right)}{\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_m}\right)\right\|}$$

на сфере S_ε (см. дополнение В), чем и завершается доказательство леммы 10.6.

Доказательство леммы 10.7. Если степень e однородного поправочного многочлена $\geqslant d$, то из теоремы Бертини непосредственно вытекает, что видоизмененная кривая $\bar{V}'$ не имеет других особых точек, кроме начала координат, для почти всех наборов коэффициентов (ср. Ван дер Варден [2], стр. 201).

Предположим, что модифицированный многочлен $f(z_1, z_2) + h(z_1, z_2)$ приводим и разлагается в произведение двух сомножителей степеней d_1 и d_2, $d_1 + d_2 = e$. По теореме Безу две соответствующие проективные кривые должны пересекаться, с полной кратностью пересечения, равной d_1d_2.

Эти кривые могут пересечься лишь в начале координат, так как их объединение $\bar{V}'$ не имеет других особых точек, кроме начала координат. Но кратности пересечения в 0, очевидно, являются инвариантами при замене координат, задаваемой формальными степенными рядами. Поэтому из леммы 10.8 следует, что r ветвей кривой V, проходящие через начало координат, можно разделить на два подмножества с кратностью пересечения, равной $d_1d_2 \geqslant e - 1$. Для достаточно больших e это, очевидно, невозможно; значит, многочлен $f(z_1, z_2) + h(z_1, z_2)$ должен быть неприводимым. Этим завершается доказательство леммы 10.7 и теоремы 10.5.

Замечание 10.9. Было бы хорошо иметь лучшую топологическую интерпретацию целого числа δ. Можно показать, что зацепление $K = V \cap S_\varepsilon$ ограничивает набор r гладких двумерных клеток в диске D_ε, не имеющих других особенностей, кроме δ обычных двойных точек. *Вопрос*: не равняется ли δ *числу пересечений* зацепления K, т. е. наименьшему возможному числу самопересечений зацепления K в процессе гладкой деформации, переводящей K в набор r незацепленных и незаузленных окружностей (ср. Вендт [1])?

Замечание 10.10. В случае $r = 1$ имеется явная формула для δ. Запишем кривую V локально с помощью степенных рядов относительно параметра w:

$$z_1 = w^{a_0},$$
$$z_2 = \lambda_1 w^{a_1} + \lambda_2 w^{a_2} + \lambda_3 w^{a_3} + \dots,$$

где показатели a_j — положительные целые числа с наибольшим общим делителем единица, причем $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ и ни один из коэффициентов λ_j не равен нулю (см. лемму 3.3). Обозначим через D_j наибольший общий делитель чисел $\{a_0, a_1, \dots, a_{j-1}\}$, так что $a_0 = D_1 \geqslant D_2 \geqslant \dots \geqslant D_k = 1$ для достаточно больших k. Тогда

$$\mu = 2\delta = \sum_{j\geqslant 1} (a_j - 1)(D_j - D_{j+1}).$$

Доказательство этой формулы мы опустим.

В случае $r > 0$ целое число δ может быть представлено в виде суммы

$$\delta = \delta_{(1)} + \dots + \delta_{(r)} + \sum_{i<j} \delta_{ij},$$

где $\delta_{(i)} \geqslant 0$ — целое число δ, соответствующее i-й ветви, а δ_{ij} — кратность пересечения i-й и j-й ветвей. (Таким образом, $\delta \geqslant r(r-1)/2$ и, следовательно, $\mu = 2\delta - r + 1 \geqslant (r-1)^2$.)

Замечание 10.11. Следуя Бурау и Кэлеру, дадим несколько более точное описание узла K. Указанную выше параметризацию кривой V всегда можно выбрать так, чтобы $a_0 < a_1$. Поэтому K является так называемым *сложным кабельным узлом*, который может быть построен следующим образом. Начиная с незаузленной окружности K_0, выберем какой-нибудь узел K_1 в границе трубчатой окрестности окружности K_0, затем выберем какой-нибудь узел K_2 в границе трубчатой окрестности узла K_1, и т. д.; построение повторяется столько раз, сколько имеется ненулевых слагаемых в приведенной выше формуле для $\mu = 2\delta$.

В заключение параграфа приведем доказательство леммы 10.1. Напомним сначала определение многочлена Александера зацепления. (Для $r \geqslant 2$ это определение введено Фоксом.)

Пусть G — некоторая группа и X — связный комплекс с фундаментальной группой G. Любая нормальная подгруппа $N \subset G$ определяет регулярное накрытие $\tilde{X}$ с $\pi_1(\tilde{X}) = N$. Пусть X^0 — отмеченная точка в X и $\tilde{X}_0$ — ее полный прообраз в $\tilde{X}$. Тогда группу гомологий $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0)$ можно рассматривать как модуль над целочисленным групповым кольцом $Z[G/N]$ группы преобразований накрытия. С точностью до изоморфизма этот модуль зависит только от G и N.

В частности, если G — группа с p образующими и q соотношениями, то мы можем взять в качестве X двумерный комплекс с одной вершиной, имеющий ровно p одномерных клеток, по одной на каждую образующую, и ровно q двумерных клеток, по одной на каждое соотношение. Точная последовательность

$$H_2(\tilde{X}, \tilde{X}^1) \to H_1(\tilde{X}^1, \tilde{X}^0) \to H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0) \to 0,$$

где первые два модуля свободны, показывает тогда, что модуль $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0)$ может быть представлен как модуль с p образующими и q соотношениями. (Здесь через $\tilde{X}^1$ обозначен одномерный остов комплекса X.)

Если группа преобразований накрытия G/N коммутативна, то $(p-i) \times (p-i)$-миноры соответствующей матрицы соотношений порождают идеал $\mathscr{E}_i^N \subset Z[G/N]$, который является инвариантом модуля $H_1(\tilde{X}, \tilde{X}^0)$ (см. Цассенхауз [1]). В частности, определены идеалы $\mathscr{E}_i^{G'}$, где G' — коммутант группы G.

Если G — группа узла и $N = G'$, то *порядковый идеал* $\mathscr{E}_0^{G'}$ равен нулю, $\mathscr{E}_1^{G'}$ является главным идеалом. Образующая идеала $\mathscr{E}_1^{G'}$ называется *многочленом Александера* узла.

Если G — группа зацепления с $r \geqslant 2$ ориентированными компонентами, то группа G/G' является свободной абелевой группой с образующими $t_1, \ldots, t_r$, соответствующими различным компонентам. В этом случае идеал $\mathscr{E}_0^{G'}$ также равен нулю, а идеал $\mathscr{E}_1^{G'}$ равен основному идеалу $(t_1 - 1, \ldots, t_r - 1)$, помноженному на некоторый главный идеал. И в этом случае образующая главного идеала называется *многочленом Александера*.

Чтобы доказать лемму 10.1, нам надо изучить бесконечное циклическое накрытие $\tilde{E}$ дополнения $E = S_\varepsilon \setminus K$, определяемое универсальным накрытием базы S^1. Это накрытие отвечает некоторой нормальной подгруппе N группы $G = \pi_1(S_\varepsilon \setminus K)$. Очевидно, естественный гомоморфизм

$$Z[G/G'] \to Z[G/N]$$

отображает все образующие $t_1, \ldots, t_r$ группы G/G' в одну-единственную образующую, скажем t, группы G/N. Ясно, что идеалы

$$\mathscr{E}_i^N \subset Z[G/N]$$

являются образами при этом гомоморфизме соответствующих идеалов $\mathscr{E}_i^{G'}$. В частности, при $r \geqslant 2$ идеал

$$\mathscr{E}_1^{G'} = ((t_1 - 1, \ldots, t_r - 1)\, \Delta(t_1, \ldots, t_r))$$

должен отображаться на $\mathscr{E}_1^N$, следовательно,

$$\mathscr{E}_1^N = ((t-1)\, \Delta(t, \ldots, t)).$$

Рассмотрим теперь точную последовательность

$$0 \to H_1\tilde{E} \to H_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0) \xrightarrow{\partial} H_0\tilde{E}^0 \to H_0\tilde{E} \to 0$$

(см. Кроуэлл [1]). Легко проверить, что $H_0\tilde{E}^0$ является свободным $Z[G/N]$-модулем с одной образующей, скажем ξ, а $dH_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0)$ — свободным подмодулем, порожденным элементом $(t-1)\xi$. Следовательно,

$$H_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0) \cong H_1\tilde{E} \oplus Z[G/N].$$

Отсюда видно, что первый элементарный идеал

$$\mathscr{E}_1^N(H_1(\tilde{E}, \tilde{E}^0)) = ((t-1)\, \Delta(t, \ldots, t))$$

равен порядковому идеалу $\mathscr{E}_0^N(H_1\tilde{E})$.

Но этот порядковый идеал, очевидно, натянут на характеристический многочлен $\Delta(t)$ линейного преобразования, переводящего каждый элемент α свободной абелевой группы $H_1E \cong H_1F_\theta$ в $t_*(\alpha)$ (см. замечание 8.6). Таким образом, мы получаем искомую формулу

$$((t-1)\Delta(t, \ldots, t)) = (\Delta(t))$$

для случая $r \geqslant 2$.

Случай $r = 1$ совершенно аналогичен.

§ 11. Теорема о расслоении для вещественных особенностей

Пусть $\mathbf{f}: R^m \to R^k$ — полиномиальное отображение, переводящее начало координат в начало координат и удовлетворяющее следующему условию:

Условие 11.1. *Существует окрестность U начала координат в R^m, такая, что матрица (df_i/dx_j) имеет ранг k во всех точках $\mathbf{x} \in U$, кроме точки $\mathbf{x} = 0$.*

Отсюда следует, что уравнения

$$f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_k(\mathbf{x}) = 0$$

определяют алгебраическое множество V, являющееся гладким многообразием размерности $m-k$ всюду в $U \cap (V \setminus \{0\})$. Далее, для малых ε пересечение $K = V \cap S_\varepsilon^{m-1}$ является гладким многообразием размерности $m-k-1$ (см. следствие 2.9; заметим, что K может быть пустым).

Предположим теперь, что $k \geqslant 2$.

Теорема 11.2. *Дополнением открытой трубчатой окрестности многообразия K в S_ε^{m-1} является пространство гладкого расслоения над сферой S^{k-1}, каждый слой F которого есть гладкое компактное $(m-k)$-мерное многообразие с границей, диффеоморфной многообразию K.*

Доказательство. Используя следствие 2.9 или лемму 3.1, можно проверить, что начало координат в R^k является регулярным значением отображения

$$\mathbf{f}\,|\,S_\varepsilon^{m-1}: S_\varepsilon^{m-1} \to R^k.$$

Следовательно, существует малый диск $D_\eta^k \subset R^k$, состоящий исключительно из регулярных значений. От-

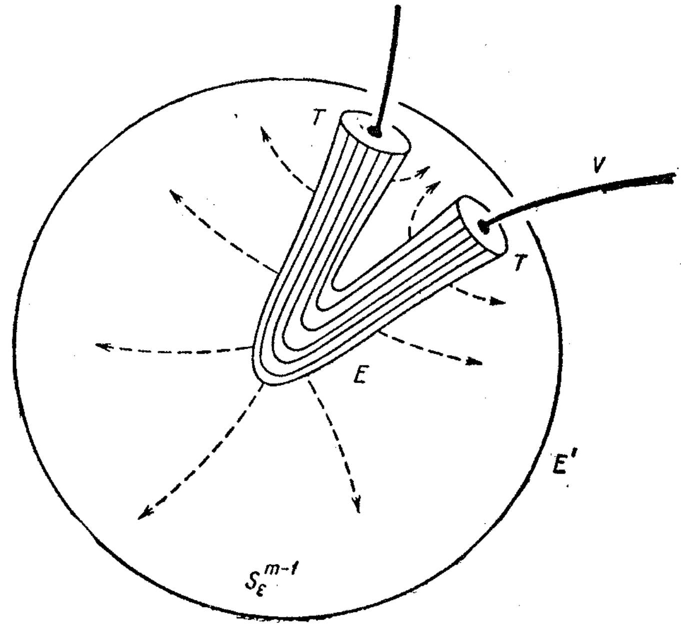

Рис. 6.

сюда вытекает, что прообраз

$$T = \{\mathbf{x} \in S_\varepsilon^{m-1} \mid \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leqslant \eta\}$$

расслаивается над D_η^k с общим слоем K (см. Эресманн [1]). Так как базисное пространство расслоения стягиваемо, отсюда следует, что многообразие T диффеоморфно произведению $K \times D_\eta^k$. Далее мы будем отождествлять многообразие T с *трубчатой окрестностью* многообразия K в S_ε^{m-1}.

Рассмотрим теперь множество $E = D_\varepsilon^m \cap \mathbf{f}^{-1}(S_\eta^{k-1})$ (см. рис. 6). Заметим, что E является гладким многообразием с $\partial E = \partial T$. Рассуждения, сходные с рассуждениями Эресманна, показывают, что отображение

$$\mathbf{f}|E\colon\ E \to S_\eta^{k-1}$$

также является проекцией гладкого расслоения, общий слой

$$F_\mathbf{y} = D_\varepsilon^m \cap \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$$

которого является компактным многообразием с границей

$$\partial F_\mathbf{y} = S_\varepsilon^{m-1} \cap \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}),$$

диффеоморфной многообразию K (поскольку K является слоем расслоения $T \to D_\eta^k$).

Лемма 11.3. *Пространство* $E = D_\varepsilon^m \cap \mathbf{f}^{-1}(S_\eta^{k-1})$ *расслоения* $\mathbf{f}$: $E \to S_\eta^{k-1}$ *диффеоморфно дополнению* $(S_\varepsilon^{m-1} \setminus \operatorname{int} T)$ *открытой трубчатой окрестности.*

Другими словами, E диффеоморфно многообразию E', состоящему из тех точек $\mathbf{x} \in S_\varepsilon^{m-1}$, для которых $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \geqslant \eta$.

Доказательство леммы 11.3 аналогично доказательству леммы 5.10. Сначала нужно построить векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на $D_\varepsilon^m \setminus V$ так, чтобы евклидовы скалярные произведения $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle$ и $\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{grad}\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2\rangle$ были оба положительными. Это возможно, так как векторные поля

$$\mathbf{grad}\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|^2 \quad \text{и} \quad 2\mathbf{x} = \mathbf{grad}\|\mathbf{x}\|^2$$

отличны от нуля всюду в $D_\varepsilon^m \setminus V$ и по следствию 3.4 ни в одной точке не имеют противоположных направлений.

Двигаясь теперь вдоль траекторий векторного поля $\mathbf{v}$, мы диффеоморфно отобразим E на E', чем лемма 11.3 и доказана.

Таким образом, дополнение E' открытой трубчатой окрестности многообразия K в S_ε^{m-1} также может быть расслоено над S_η^{k-1}. Этим завершается доказательство теоремы 11.2.

Замечание. Несколько больше постаравшись, можно доказать, что и все дополнение $S_\varepsilon^{m-1} \setminus K$ также расслаивается над S^{k-1}, причем каждый слой этого расслоения является внутренностью компактного многообразия с границей K.

Однако утверждение о том, что естественное отображение

$$\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}$$

из $S_\varepsilon^{m-1} \setminus K$ в S^{k-1} является проекцией некоторого расслоения, уже неверно. [Это непосредственно видно на примере отображения

$$\mathbf{f}(x_1,\ x_2) = (x_1,\ x_1^2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)).]$$

Заметим, что по любому полиномиальному отображению $R^m - R^k$, удовлетворяющему условию 11.1, можно, взяв его композицию с проекцией $R^k \to R^{k-1}$, построить новое отображение $R^m \to R^{k-1}$, очевидно, также удовлетворяющее условию 11.1.

Гипотеза. Слой расслоения, связанного с этим новым отображением, гомеоморфен произведению старого слоя на единичный отрезок.

Основным недостатком теоремы 11.2 является то, что ее предположения настолько сильны, что очень трудно найти примеры, им удовлетворяющие.

Задача. Для каких размерностей $m \geqslant k \geqslant 2$ существуют нетривиальные примеры?

Не совсем ясно, что надо здесь понимать под словом «нетривиальный». Несомненно, что проекция $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m)$ — это тривиальный пример. Вот пробное определение: будем называть пример *тривиальным* тогда и только тогда, когда слой F расслоения $E' \to S^{k-1}$ диффеоморфен диску D^{m-k}. (Отсюда вытекает, что многообразие K, изотопное ∂F в S_ε^{m-1}, должно быть незаузленной сферой.)

Много нетривиальных примеров имеется для $k = 2$. Действительно, каждое расслоение из § 6 дает такой пример: всякий комплексный многочлен $f(z_1, \ldots, z_m)$ с изолированной критической точкой в начале координат определяет полиномиальное отображение $R^{2km} \to R^2$, очевидно удовлетворяющее условию 11.1.

Задача. Существуют ли другие, принципиально отличные примеры для $k = 2$? Можно ли, например, восьмерку (узел Листинга) рассматривать как пересечение $V \cap S_\varepsilon$, связанное с полиномиальным отображением $R^4 \to R^2$? Имеются ли нетривиальные примеры для нечетных m и $k = 2$?

Можно предположить, что если $m < 2(k-1)$, то все примеры тривиальны. (В противоположность этому для $m = 2(k-1) = 4$, 8 и 16 мы приведем ниже нетривиальные примеры, принадлежащие Кюиперу.)

Лемма 11.4. *Если $m < 2(k-1)$, то слой F стягиваем.*

Доказательство. Сферу S_ε^{m-1} можно получить из подпространства $E' = S_\varepsilon^{m-1} \setminus \operatorname{int} T$ присоединением ряда клеток размерности $\geqslant k$, по одной $(k+i)$-мерной клетке на каждую i-мерную клетку многообразия K. Следовательно,

$$\pi_i E' \cong \pi_i S_\varepsilon^{m-1} = 0$$

для $i \leqslant k-2$.

Так как расслоение $E' \to S^{k-1}$ имеет сечение $S^{k-1} \to dE' \subset E'$, отсюда следует, что точная последовательность

$$0 \to \pi_i F \to \pi_i E' \to \pi_i S^{k-1} \to 0$$

расщепляется. Следовательно, слой F также $(k-2)$-связен.

Предположим, что $m < 2(k-1)$. Тогда $k \geqslant 3$ и, следовательно, слой F односвязен. Как и в следствии 6.2, существует изоморфизм двойственности Александера

$$\tilde{H}_i F \cong \tilde{H}^{m-i-2} F.$$

Отсюда следует, что если размерность $m-k$ слоя F меньше $(m-2)/2$, то слой F имеет гомологии точки. А односвязное пространство с гомологиями точки стягиваемо.

Поскольку условие $m - k < (m-2)/2$ эквивалентно условию $m < 2(k-1)$ леммы 11.4, наше доказательство завершено.

Таким образом, если $m < 2(k-1)$, то слой F стягиваем, а отсюда легко следует, что K является гомологической сферой. Если размерность $m-k$ слоя F не превосходит двух, то слой F является фактически клеткой, и расслоение $E' \to S^{k-1}$ в этом случае является тривиальным примером. Но для $m - k \geqslant 3$ я уже не могу доказать, что F является клеткой, а для $m - k \geqslant 4$ я не могу доказать, что многообразие K является односвязным.

Далее я покажу, что K не может быть экзотической или заузленной сферой, если $k \geqslant 3$, а $m - k \geqslant 6$.

Лемма 11.5. *Если коразмерность $k \geqslant 3$ и K является гомологической сферой, то слой F стягиваем.*

Таким образом, действительно, если K является гомологической сферой размерности $m-k-1 \geqslant 5$, то, как следует из работ Смейла, слой F диффеоморфен диску, и, следовательно, мы опять получаем тривиальный пример расслоения. Не знаю, верно ли это для $m-k-1 = 2, 3, 4$.

Доказательство. Как было показано при доказательстве леммы 11.4, слой F является $(k-2)$-связным. Поскольку K является гомологической $(m-k-1)$-мерной сферой, отсюда в силу двойственности Александера следует, что пространство E' является гомологической $(k-1)$-мерной сферой. Используя последовательность Вана

$$\ldots H_1 F \to H_{k-1} F \to H_{k-1} E' \to H_0 F \to H_{k-2} F \to \ldots$$

нашего расслоения, легко теперь показать, что слой F имеет гомологии точки, чем и завершается доказательство.

В заключение параграфа я приведу некоторые примеры, принадлежащие Кюиперу. Прежде всего покажем, что расслоения Хопфа $S^{2p-1} \to S^p$, $p = 2, 4, 8$, могут быть получены с помощью теоремы 11.2 (ср. Баум [1]).

Пусть A — множество комплексных чисел, кватернионов или чисел Кэли. Определим отображение

$$f\colon A \times A \to A \times R$$

формулой

$$f(x, y) = (2x\bar{y}, \ |y|^2 - |x|^2).$$

Лемма 11.6. *Отображение f переводит единичную сферу пространства $A \times A$ в единичную сферу пространства $A \times R$, и ограничение этого отображения на единичную сферу пространства $A \times A$ совпадает с классическим расслоением Хопфа.*

Доказательство. Тождество

$$\| f(x, y) \|^2 = |2x\bar{y}|^2 + (|y|^2 - |x|^2)^2 = (|x|^2 + |y|^2)^2$$

показывает, что f переводит единичную сферу пространства $A \times A$ в единичную сферу пространства $A \times R$. Рассмотрим теперь композицию отображения f со стереографической проекцией

$$\sigma(z, t) = \frac{z}{(1+t)},$$

которая диффеоморфно переводит единичную сферу пространства $A \times R$ с выколотой точкой $(0, -1)$ на A. Имеем

$$\sigma f(x, y) = \frac{2x\bar{y}}{1 + |y|^2 - |x|^2} = \frac{2x\bar{y}}{2|y|^2} = xy^{-1}$$

(при условии, что $|x|^2 + |y|^2 = 1$).

Сравнивая эту формулу с явным определением расслоения Хопфа (см. Стинрод [1], стр. 128—134), мы

видим, что ограничение отображения f на единичную сферу совпадает с расслоением Хопфа.

Теперь можно описать примеры Кюипера. Пусть A определено, как выше. Зададим отображение

$$f\colon A^n \times A^n \to A \times R$$

формулой

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \ \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2),$$

где скобки обозначают эрмитово скалярное произведение в A^n. Для того чтобы проверить, что матрица первых (вещественных) производных имеет максимальный ранг в каждой точке, отличной от начала координат $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, достаточно, очевидно, рассмотреть случай $n = 1$. Но для $n = 1$ это утверждение легко вытекает из леммы 11.6 и того факта, что отображение f однородно (степени 2) над вещественными числами.

Таким образом отображение f удовлетворяет условию 11.1. Заметим теперь, что f отображает векторное пространство вещественной размерности $4n$, $8n$ или $16n$ в векторное пространство размерности 3, 5 или 9 соответственно. База соответствующего расслоения является сферой размерности соответственно 2, 4 или 8.

Многообразие K в этом примере Кюипера является многообразием Штифеля 2-реперов в A^n, а слой F диффеоморфен пространству расслоения на диски над единичной сферой пространства A^n, состоящему из всех пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^n \times A^n$, таких, что

$$\|\mathbf{x}\| = 1, \ \|\mathbf{y}\| \leqslant 1 \ \text{и} \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

ДОПОЛНЕНИЕ А

ТЕОРЕМА КОНЕЧНОСТИ УИТНИ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

В этом дополнении дается доказательство (лишь незначительно отличающееся от доказательства самого Уитни) теоремы 2.4, которая утверждает, что разность $V \setminus W$ вещественных или комплексных алгебраических множеств имеет самое большее конечное число топологических компонент.

Достаточно будет рассмотреть вещественный случай, так как любое комплексное алгебраическое множество в C^m можно представить как вещественное алгебраическое множество в R^{2m}.

Замечание. Если V — комплексное неприводимое множество, то имеет место более сильное утверждение, а именно что множество $V \setminus W$ связно (см. Лефшец [1], стр. 97).

Доказательство основано на следующем. Пусть V — алгебраическое множество в m-мерном координатном пространстве над любым бесконечным полем, и пусть $f_1, \ldots, f_m$ — многочлены, обращающиеся в нуль всюду на V.

Лемма А.1. *Если матрица $(\partial f_i/\partial x_j)$ невырождена в точке $\mathbf{x}^0 \in V$, то дополнение $V \setminus \{\mathbf{x}^0\}$ является алгебраическим множеством.*

В вещественном случае отсюда следует, конечно, что $\mathbf{x}^0$ есть изолированная точка множества V. (Однако обратное неверно: см. пример 2 из § 2.)

Доказательство. Мы можем предположить, что $\mathbf{x}^0 = 0$. Так как многочлен f_j обращается в нуль в начале координат, то нетрудно подобрать многочлены g_{jk}, такие, что

$$f_j(\mathbf{x}) = g_{j1}(\mathbf{x})\, x_1 + \ldots + g_{jm}(\mathbf{x})\, x_m.$$

Обозначим через W алгебраическое множество, состоящее из всех точек $\mathbf{x} \in V$, удовлетворяющих полиномиальному уравнению

$$\det(g_{jk}(\mathbf{x})) = 0.$$

Начало координат не принадлежит множеству W, так как матрица

$$\left(\frac{\partial f_j(0)}{\partial x_k}\right) = (g_{jk}(0))$$

невырождена. Но, как показывает соотношение линейной независимости

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ g_{m1}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} x_1 + \ldots + \begin{pmatrix} g_{1m}(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \vdots \\ g_{mm}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} x_m,$$

$\det(g_{jk}(\mathbf{x})) = 0$ в любой точке $\mathbf{x} \neq 0$ множества V. Таким образом, $V \setminus \{0\} = W$, и следовательно, $V \setminus \{0\}$ является алгебраическим множеством.

Ограничимся теперь случаем поля вещественных чисел R.

Следствие А.2. *Если алгебраическое множество $V \subset R^m$ имеет топологическую размерность нуль (например, если V состоит лишь из изолированных точек), то V является конечным множеством.*

Доказательство. Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — образующие идеала $I(V)$. Достаточно показать, что каждое нульмерное алгебраическое множество V содержит по крайней мере одну точку $\mathbf{x}^0$, в которой матрица $(\partial f_i/\partial x_j)$ имеет ранг m. Действительно, тогда согласно лемме А.1 точку $\mathbf{x}^0$ можно выбросить, в результате чего мы получим собственное алгебраическое подмножество $V_1 = V \setminus \{\mathbf{x}^0\}$. Повторяя этот процесс, мы построим цепь

$$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$$

вложенных алгебраических подмножеств. Поскольку, согласно утверждению 2.1, каждая такая цепь должна оборваться, отсюда и будет следовать, что множество V конечно.

Но если матрица $(\partial f_i/\partial x_j)$ имеет ранг самое большее $\rho \leqslant m-1$ во всех точках множества V, то по теореме 2.3 множество V содержит гладкое многообразие $V \setminus \Sigma(V)$ размерности $m-\rho \geqslant 1$, а это противоречит предположению, что V имеет топологическую размерность нуль, чем и завершается доказательство следствия А.2.

Лемма А.3. *Всякое неособое алгебраическое множество $V \subset R^m$ имеет гомотопический тип конечного комплекса.*

Доказательство. Для любой фиксированной точки $\mathbf{a} \in R^m$ обозначим через

$$r_{\mathbf{a}}\colon V \to R$$

функцию, сопоставляющую точке x квадрат ее расстояния от точки a:

$$r_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2.$$

Лемма Андреотти и Франкеля утверждает, что для почти всех точек $\mathbf{a}$ функция $r_{\mathbf{a}}$ на V имеет лишь невырожденные критические точки.

Пусть $\Gamma \subset V$ — множество всех критических точек функции $r_{\mathbf{a}}$. Согласно лемме 2.7, Γ является алгебраическим множеством. Но невырожденные критические точки, очевидно, изолированы, поэтому, согласно следствию А.2, Γ есть конечное множество.

Элементарные рассуждения показывают теперь, что множество V имеет лишь конечное число компонент. Действительно, каждая компонента $V^{(i)}$ множества V должна пересекаться с множеством критических точек Γ, ибо расстояние от точки $\mathbf{a}$ до точек замкнутого множества $V^{(i)}$ достигает минимума в некоторой точке $\mathbf{x}$ и очевидно, что эта ближайшая точка $\mathbf{x}$ принадлежит множеству Γ.

Итак, множество V может иметь лишь конечное число компонент.

С другой стороны, согласно основной теореме теории Морса, многообразие V гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, у которого имеется по одной клетке на каждую критическую точку невырожденной собственной неотрицательной функции $r_{\mathbf{a}}$ (см. Милнор [2], § 3.5 и 6.6). Таким образом, конечность множества Γ влечет за собой значительно более сильное утверждение, что V имеет гомотопический тип конечного комплекса. Лемма доказана.

Следствие А.4. *Пусть W — алгебраическое подмножество, содержащее множество особых точек $\Sigma(V)$. Тогда для любого вещественного алгебраического множества V множество $V \setminus W$ имеет гомотопический тип конечного комплекса.*

Доказательство. Пусть подмножество W определяется полиномиальными уравнениями $f_1(\mathbf{x}) = \ldots = f_k(\mathbf{x}) = 0$. Полагая

$$s(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})^2 + \ldots + f_k(\mathbf{x})^2,$$

мы видим, что W может быть также определено одним-единственным[1]) полиномиальным уравнением $s(\mathbf{x}) = 0$.

Пусть теперь G — график вещественной рациональной функции $1/s$, определенной на V. Другими словами, G — это множество всех пар

$$(\mathbf{x}, y) \in V \times R \subset R^{m+1},$$

для которых $s(\mathbf{x})\, y = 1$.

Очевидно, G является алгебраическим множеством, гомеоморфным множеству $V \setminus W$. Несложные вычисления показывают, что G не имеет особых точек, чем наше утверждение и доказано.

Теорема. *Для любой пары $V \supset W$ вещественных алгебраических множеств разность $V \setminus W$ имеет не более конечного числа компонент линейной связности.*

Доказательство. Согласно следствию 2.6, множество V можно представить в виде конечного объединения многообразий $M_1 \cup \ldots \cup M_p$, где M_1 есть

[1]) В этом месте доказательства существенно, что мы работаем над полем вещественных чисел.

множество неособых точек алгебраического множества $V_1 = V$; M_2 — множество неособых точек алгебраического множества $V_2 = \Sigma(V_1)$ и т. д. Следовательно,

$$V \setminus W = (M_1 \setminus W) \cup \ldots \cup (M_p \setminus W),$$

где

$$M_i \setminus W = V_i \setminus (\Sigma(V_i) \cup W)$$

является многообразием, имеющим, согласно следствию A.4, не более конечного числа компонент линейной связности.

Отсюда, очевидно, следует, что и их объединение $V \setminus W$ имеет также не более конечного числа компонент линейной связности. Этим завершается доказательство теоремы 2.4.

Замечание 1. Более точная оценка связности алгебраического множества получена в работах Том [1] и Милнор [3].[1])

Значение 2. Представляется естественным предположение, что любая разность $V \setminus W$ имеет гомотопический тип конечного комплекса.

ДОПОЛНЕНИЕ В

КРАТНОСТЬ ИЗОЛИРОВАННЫХ РЕШЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть даны аналитические функции $g_1, \ldots, g_m$ от m комплексных переменных с изолированным общим нулем в точке $\mathbf{z}^0$. Мы определили *кратность* μ как степень соответствующего отображения

$$\mathbf{z} \longmapsto \frac{\mathbf{g}(\mathbf{z})}{\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|}$$

[1]) *Примечание В. И. Арнольда.* Еще более точные оценки для неособых многообразий имеются в работе.
Олейник О. А., Оценки чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей, *Мат. сб.*, 28 (1951), № 3, 635—640.

ε-сферы с центром в $\mathbf{z}^0$ в единичную сферу (см. § 7). В этом дополнении мы постараемся оправдать наше определение, доказав ряд элементарных свойств кратности μ. Первое из них таково:

Лемма В.1. *Если якобиан* $(\partial g_j/\partial z_k)$ *невырожден в точке* $\mathbf{z}^0$, *то* $\mu = 1$.

Доказательство. Рассмотрим разложение в ряд Тэйлора с остаточным членом

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{L}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0) + \mathbf{r}(\mathbf{z}),$$

где линейное преобразование $\mathbf{L}$ по предположению невырождено, а функция

$$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{z})\|}{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^0\|}$$

стремится к нулю при $\mathbf{z} \to \mathbf{z}^0$. Выберем ε настолько малым, чтобы

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{z})\| < \|\mathbf{L}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0)\|$$

при $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}^0\| = \varepsilon$. Из существования однопараметрического семейства отображений

$$\mathbf{h}_t(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{L}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0) + t\mathbf{r}(\mathbf{z})}{\|\mathbf{L}(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0) + t\mathbf{r}(\mathbf{z})\|}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

сферы $S_\varepsilon(\mathbf{z}^0)$ в единичную сферу следует, что степень μ отображения $\mathbf{h}_1$ равна степени отображения $\mathbf{L}/\|\mathbf{L}\|$ на $S_\varepsilon(\mathbf{z}^0)$.

Замечание. Тот факт, что степень отображения $(\mathbf{L} + \mathbf{r})/\|\mathbf{L} + \mathbf{r}\|$ на S_ε равна степени отображения $\mathbf{L}/\|\mathbf{L}\|$, если $\|\mathbf{r}\| < \|\mathbf{L}\|$ для всех точек сферы S_ε, далее будет несколько раз использоваться. Мы будем ссылаться на него, как на *принцип Руше*.

Продеформируем отображение $\mathbf{L}$ в тождественное отображение по группе $GL(m, C)$, образованной всеми невырожденными линейными преобразованиями. Это возможно, так как группа Ли $GL(m, C)$ связна, Отсюда легко следует, что степень отображения $\mathbf{L}/\|\mathbf{L}\|$ на $S_\varepsilon(\mathbf{z}^0)$ равна $+1$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь компактную область D с гладкой границей в C^m и предположим, что $\mathbf{g}$ имеет лишь конечное число нулей в области D и не имеет нулей на ее границе.

Лемма B.2. *Число нулей отображения* $\mathbf{g}$ *внутри области* D, *подсчитанное с учетом кратности, равно степени отображения*

$$\mathbf{z} \longmapsto \frac{\mathbf{g}(\mathbf{z})}{\|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|}$$

границы ∂D *в единичную сферу.*

Замечание. Для функций одной комплексной переменной это утверждение называется *принципом аргумента* (см., например, Хилле [1], § 9.2.2).

Доказательство. Выбросим из области D малые открытые диски с центрами в нулях отображения $\mathbf{g}$. Тогда функция $\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ будет определена и непрерывна всюду в оставшейся области D_0. Так как граница ∂D гомологична сумме маленьких граничных сфер, расположенных внутри D_0, отсюда следует, что степень отображения $\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ на ∂D равна сумме $\Sigma\mu$ степеней μ ограничений отображений $\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ на эти маленькие сферы (см. Милнор [4], стр. 28, 36).

Лемма доказана.

Пусть опять точка $\mathbf{z}^0$ является изолированным нулем отображения $\mathbf{g}$ кратности μ.

Лемма B.3. *Если* D_ε — *диск с центром в* $\mathbf{z}^0$, *не содержащий других нулей отображения* $\mathbf{g}$, *то для почти всех точек* $\mathbf{a} \in C^m$, *достаточно близких к началу координат, уравнение* $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{a}$ *имеет ровно* μ *решений* $\mathbf{z}$ *внутри* D_ε.

Отсюда, в частности, вытекает такое

Следствие B.4. *В условиях леммы* B.3 *всегда* $\mu \geqslant 0$.

Доказательство леммы B.3. Согласно теореме Сарда, почти все точки $\mathbf{a} \in C^m$ являются регулярными значениями дифференцируемого отображения

$$\mathbf{g}\colon C^m \to C^m$$

(см. де Рам [1]). Другими словами, для всех $\mathbf{a}$, не принадлежащих некоторому множеству лебеговой меры нуль, матрица $(\partial g_j/\partial z_h)$ невырождена в каждой точке $\mathbf{z}$ прообраза $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{a})$.

Заметим, что для каждого такого регулярного значения $\mathbf{a}$ все решения $\mathbf{z}$ системы аналитических уравнений $\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \mathbf{a} = 0$ являются изолированными решениями с кратностью $+1$ (лемма B.1).

Выберем некоторое регулярное значение $\mathbf{a}$ отображения $\mathbf{g}$, достаточно близкое к началу координат и такое, что

$$\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|$$

для всех $\mathbf{z} \in \partial D_\varepsilon$. Тогда, согласно лемме B.2, число решений уравнения $\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \mathbf{a} = 0$ внутри D_ε равно степени отображения $(\mathbf{g} - \mathbf{a})/\|\mathbf{g} - \mathbf{a}\|$ на ∂D_ε. (Каждое решение должно быть подсчитано с учетом кратности, но, как мы уже доказали, все эти кратности равны $+1$.)

Согласно принципу Руше, степень отображения $(\mathbf{g} - \mathbf{a})/\|\mathbf{g} - \mathbf{a}\|$ равна степени μ отображения $\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$, чем и завершается доказательство леммы B.3.

Замечание. Наверное, небесполезна будет следующая интерпретация этих лемм для частного случая $g_j(\mathbf{z}) = \partial f/\partial z_j$, рассмотренного в § 7. Лемма B.1 утверждает, что в случае *невырожденной* критической точки отображения f, в которой матрица $(\partial^2 f/\partial z_j \partial z_k)$ невырождена, целое число μ равно $+1$, а лемма B.3 утверждает, что если мы пошевелим функцию f, вычтя из нее почти любой «малый» линейный многочлен $a_1 z_1 + \ldots + a_m z_m$, то изолированная критическая точка $\mathbf{z}^0$ распадается на множество, состоящее из μ близких критических точек, каждая из которых уже невырождена.

Теперь мы готовы к доказательству теоремы 7.1.

Теорема. *Кратность μ изолированного решения системы m полиномиальных уравнений от m переменных всегда является положительным целым числом.*

Доказательство. Пусть дан диск D_ε с центром в точке $\mathbf{z}^0$, не содержащий других нулей отображения $\mathbf{g}$. Выберем число η настолько малым, чтобы

$$|\eta| < \|\mathbf{g}(\mathbf{z})\|/\varepsilon$$

для всех $\mathbf{z} \in \partial D_\varepsilon$, и отличным от всех собственных значений матрицы $(\partial g_j(\mathbf{z}^0)/\partial z_k)$. Тогда возмущенное отображение

$$\mathbf{g}'(\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z}) - \eta(\mathbf{z} - \mathbf{z}^0)$$

имеет нуль кратности $+1$ в точке $\mathbf{z}^0$, ибо матрица

$$\left(\frac{\partial g'_j}{\partial z_k}\right) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial z_k} - \eta\delta_{jk}\right)$$

невырождена в точке $\mathbf{z}^0$. Следовательно, в предположении, что $\mathbf{g}'$ имеет лишь конечное число нулей внутри D_ε, мы получаем, что число $\Sigma\mu'$ нулей отображения $\mathbf{g}'$ внутри D_ε заведомо $\geqslant 1$ (все слагаемые в сумме согласно следствию В.4 неотрицательны). Эта сумма равна степени ограничения отображения $\mathbf{g}'/\|\mathbf{g}'\|$ на ∂D_ε, которая, согласно принципу Руше, равна степени μ отображения $\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ на ∂D_ε. Следовательно, $\mu \geqslant 1$.

Остается, по крайней мере теоретически, случай, когда отображение $\mathbf{g}'$ имеет бесконечно много нулей внутри D_ε (см. задачу 1 ниже). Но в этом случае мы можем вычесть из $\mathbf{g}'$ маленький постоянный вектор $\mathbf{a}$ — какое-нибудь регулярное значение отображения $\mathbf{g}'$ (см. лемму В.3). Нули отображения $\mathbf{g}' - \mathbf{a}$ изолированы, следовательно, существует лишь конечное число нулей отображения $\mathbf{g}' - \mathbf{a}$ внутри D_ε. Чтобы гарантировать, что $\mathbf{g}' - \mathbf{a}$ имеет по крайней мере один нуль, мы, используя теорему об обратной функции, выберем окрестность U точки $\mathbf{z}^0$ в D_ε так, чтобы $\mathbf{g}'$ диффеоморфно отображало U на открытую окрестность начала координат. Выбирая $\mathbf{a}$ внутри $\mathbf{g}'(U)$, мы получаем, что уравнение $\mathbf{g}'(\mathbf{z}) - \mathbf{a} = 0$ обязательно имеет решение $\mathbf{z}$ внутри $U \subset D_\varepsilon$, чем и завершается доказательство того, что $\mu \geqslant 1$.

В заключение сформулируем три задачи для читателя. Первые две из них можно решить, используя методы, описанные выше, третья задача — более сложная.

Задача 1. Доказать, что если отображение $\mathbf{g}$ не имеет нулей на ∂D, то оно имеет лишь конечное число нулей внутри D.

Задача 2. Доказать, что если матрица $(\partial g_j/\partial z_k)$ вырождена в точке $\mathbf{z}^0$, то $\mu \geqslant 2$.

Задача 3. Кольцо $C[[\mathbf{z} - \mathbf{z}^0]]$ формальных степенных рядов от переменных $z_j - z_j^0$ можно рассматривать как модуль над подкольцом $C[[g_1, \ldots, g_m]]$. Доказать, что этот модуль является свободным модулем ранга μ. Следовательно, если обозначить через I идеал, натянутый на $g_1, \ldots, g_m$ в $C[[\mathbf{z} - \mathbf{z}^0]]$, то факторкольцо $C[[\mathbf{z} - \mathbf{z}^0]]/I$ имеет размерность μ над C.

(Мне сказали, что это можно доказать следующим образом: показать сначала, что отображение $\mathbf{g}$: $C^m \to C^m$ индуцирует собственное плоское отображение некоторой малой окрестности U начала координат в малую окрестность V начала координат, а затем показать, что прямой образ при отображении $\mathbf{g}$ пучка $\mathcal{O}_U$ ростков голоморфных функций на U локально свободен над соответствующим пучком $\mathcal{O}_V$.)[1]

[1] *Примечание В. И. Арнольда.* См. статью
Паламодов В. П., О кратности голоморфного отображения, *Функц. анализ и его приложения,* 1 (1967), № 3, 54—65.

ЛИТЕРАТУРА

Александер (Alexander J. W.)
[1] Topological invariants of knots and links, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30** (1928), 275—306.
Александер и Бриггс (Alexander J. W., Briggs G. B.)
[1] On types of knotted curves, *Ann. Math.*, **28** (1927), 562—586.
Александров П. С. и Хопф (Hopf H.)
[1] Topologie, Springer, 1935.
Альфан (Halphen G.-H.)
[1] Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes, Oeuvres, tome 4, 1—93.
Андреотти и Франкель (Andreotti A., Frankel T.)
[1] The Lefschetsz thorem on hyperplane sections, *Ann. Math.*, **69** (1959), 713—717.
Баум (Baum P.)
[1] Quadratic maps and stable homotopy groups of sphere, *Illinois J. Math.*, **11** (1967), 586—595.
Браудер и Левин (Browder W., Levine J.)
[1] Fibering manifolds over a circle, *Comment. Math. Helv.*, **40** (1965/66), 153—160.
Браунер (Brauner K.)
[1] Zur Geometrie der Funktionen zweier komplexen Veranderlichen III, IV, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **6** (1928), 8—54.
Брискорн (Brieskorn E.)
[1] Examples of singular normal comlex spaces which are topological manifolds, *Proc. Nat. Acad. USA*, **55** (1966), 1395—1397.
[2] Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, *Inventiones Math.*, **2** (1966), 1—14. [Русский перевод: Примеры из дифференциальной топологии многообразий с особенностями, *Математика*, **11**: **6** (1967), 132—143.]
[3] Rationale Singularitäten Komplexer Flächen, *Inventiones Math.*, **4** (1968), 336—358.
Брюа и Картан (Bruhat F., Cartan H.)
[1] Sur la structure des sous-ensembles analitiques reels, *C. R.*, **244** (1957), 988—990.
Бурау (Burau W.)
[1] Kennzeichnung der Schlauchknoten, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **9** (1932), 125—133.

[2] Kennzeichnung der Schlauchverkettungen, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **10** (1934), 285—397.
Ван (Wang H. C.)
[1] The homology groups of the fibre bundles over a sphere, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 33—38.
Ван дер Варден (van der Waerden B. L.)
[1] Zur algebraische Geometrie III; Über irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **108** (1933), 694—698.
[2] Einführung in die algebraische Geometrie, Springer, 1939.
[3] Современная алгебра, т. 1 и 2, Гостехиздат, М. — Л., 1947.
Вейль (Weil A.)
[1] Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 497—508.
Вендт (Wendt H.)
[1] Die gordische Auflösung von Knoten, *Math. Zeitschr.*, **42** (1937), 680—696.
Ганнинг и Росси (Ganning R., Rossi H.)
[1] Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969.
Гротендик (Grothendieck A.)
[1] On monodromy theorem, CGA IHES, 1968.
Грэйвс (Graves L. M.)
[1] The Theory of Functions of Real Variables, 2d ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., N. Y., 1956.
Дюваль (Du Val P.)
[1] On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **30** (1934), 453—459.
Зарисский (Zariski O.)
[1] On the topology of algebroid singularities, *Amer. J. Math.*, **54** (1932), 453—465.
Картан (Cartan H.)
[1] Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, Algebraic Geometry and Topology (Lefschetz symposium volume), Princeton Univ. Press, 1957, 90—102.
Кервэр (Kervaire M.)
[1] A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960), 257—270.
Кервэр и Милнор (Kervaire M., Milnor J.)
[1] Groups of homotopy spheres I, *Ann. Math.*, **77** (1963), 504—537.
Клейн (Klein F.)
[1] Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree, Dover, 1956.
Кобаяси (Kobayashi S.)
[1] Fixed points of isometries, *Nagoya Math. J.*, **13** (1958), 63—68.
Коксетер (Coxeter)
[1] Regular Polytopes, N. Y., 1963, Вклейки IV, VII.

Кроуэлл (Crowell R. H.)
[1] Corresponding group and module sequences, *Nagoya Math. J.*, **19** (1961), 27—40.
[2] The group G'/G'' of a knot group G, *Duke Math. J.*, **30** (1963), 349—354.
Кроуэлл и Фокс (Crowell R. H., Fox R. H.)
[1] Введение в теорию узлов, «Мир», М., 1966.
Кэлер (Kähler K.)
[1] Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in der Umgebung einen singulären Stelle, *Math. Zeit.*, 30 (1929), 188—204.
Левин (Levine J.)
[1] Polynomial invariants of knots of codimension two, *Ann. Math.*, **84** (1966), 537—554.
Ленг (Lang S.)
[1] Introduction to Algebraic Geometry, Interscience, 1958.
[2] Введение в теорию дифференцируемых многообразий, «Мир», М., 1967.
[3] Алгебра, «Мир», М., 1968.
Лефшец (Lefschetz S.)
[1] Algebraic Geometry, Princeton Univ. Press, 1953.
[2] Алгебраическая топология, ИЛ, М., 1949.
Лоясевич (Lojasiewicz S.)
[1] Sur le problème de la division, *Rozprawy Math.*, 22 (1961), 57 pp., или *Studia Math.* 18 (1959), 87—136.
[2] Triangulation of semi-analitic sets, *Annali Scu. Norm. Sup. Pisa, Sc. Fis. Mat. Ser.* 3, 18 (1964), № 4, 449—474.
Мамфорд (Mumford D.)
[1] The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. math. № 9 l'Inst. des hautes études sci, Paris, 1961. [Русский перевод: Топология нормальных особенностей алгебраической поверхности и критерий простоты, *Математика*, **10**:**6** (1966), 3—24.]
Милнор (Milnor J.)
[1] Construction of universal boundles II, *Ann. Math.*, **63** (1956), 430—436.
[2] Теория Морса, «Мир», М., 1965.
[3] On the Betti numbers of real varieties, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 275—280.
[4] Topology from the Differentiable Viewpoint, Univ. Virginia Press, 1965.
[5] Infinite cyclic coverings, в печати.
Морс (Morse M.)
[1] The calcules of variations in the large, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., 18, 1934.
Нойвирт (Neuwirth L.)
[1] The algebraic determination of the genus of knots, *Amer. J. Math.*, **82** (1962), 791—798.
[2] On Stallings fibrations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 380—381.

Рам (de Rham G.)
[1] Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
Рапапорт (Rapaport E. S.)
[1] On the commutator subgroup of a knot group, *Ann. Math.*, **71** (1960), 157—162.
Рив (Reeve J. E.)
[1] A summary of results in the topological classification of plane algebroic singularities, *Rend. Sem. Mat. Torino*, **14** (1954/55), 159—187.
Ритт (Ritt J. F.)
[1] Differential equations from the algebraic standpoint, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 14, N. Y., 1932.
Сард (Sard A.)
[1] The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 883—897.
Серр (Serre J.-P.)
[1] Алгебраические группы и поля классов, «Мир», М., 1968.
Смейл (Smale S.)
[1] Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. Math.*, **74** (1961), 391—406.
[2] On the structure of 5-manifolds, *Ann. Math.*, **75** (1962), 38—46.
Спеньер (Spanier E.)
[1] Алгебраическая топология, «Мир», М., 1971.
Спрингер (Springer G.)
[1] Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960.
Стинрод (Steenrod N.)
[1] Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.
Столлингс (Stallings J.)
[1] Polyhedral homotopy spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 485—488.
Стюарт (Stewart T. E.)
[1] On groups of diffeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 559—563.
Том (Thom R.)
[1] Sur l'homologie des variétés algébriques réels, Differential and Combinatorial Topology (Morse symposium, S. Cairns ed.), Princeton Univ. Press, 1965, 255—265.
Уитни (Whitney H.)
[1] Elementary Structure of Real Algebraic Varieties.
Уолл (Wall C. T. C.)
[1] Classifications of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, *Ann. Math.*, 75 (1962), 163—198.
Уоллес (Wallace A. H.)
[1] Homology Theory of Algebraic Varieties, Pergamon Press, 1958.
[2] Algebraic approximation of curves, *Canad. J. Math.*, **10** (1958), 242—278.

Фам (Pham F.)
[1] Formules de Picard — Lefschetz généralisées et ramification des integrales, *Bull. Soc. Math. France*, 93 (1965), 333—367. [Русский перевод: Обобщенные формулы Пикара — Лефшеца и ветвление интегралов, *Математика*, 13 : 4 (1969), 61—93.]

Фари (Fáry I.)
[1] Cohomologie des variétés algébriques, *Ann. Math.*, 65 (1957), 21—73.

Фокс (Fox R. H.)
[1] Free differential calculus, II. The isomorphism problem, *Ann. Math.*, 59 (1954), 196—210.

Хёрмандер (Hörmander L.)
[1] On the division of distributions by polynomials, *Ark. Mat.*, 3 (1958), 555—568.

Хилле (Hille E.)
[1] Analytic Function Theory, v. 1, Ginn, 1959.

Хирцебрух (Hirzebruch F.)
[1] The topology of normal singularities of an algebraic surface (d'après Mumford), Séminaire Bourbaki, 15e année, 1962/63, № 250.
[2] Singularities and exotic spheres, Séminaire Bourbaki, 19e année, 1966/67, № 314.
[3] $O(n)$-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären, kuriose Involutionen (preliminary draft), March 1966.

Хирцебрух и Майер (Hirzebruch F., Mayer K. H.)
[1] $O(n)$-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten, Springer Lecture Notes in Mathematics, 57, 1968.

Ходж и Пидо (Hodge W. V. D., Pedoe D.)
[1] Методы алгебраической геометрии, т. 2, ИЛ, М., 1954.

Ху Сы-цзян (Hu S. T.)
[1] Theory of Retracts, Wayne State Univ. Press, 1965.

Цассенхауз (Zassenhaus H.)
[1] The Theory of Groups, Chelsea, 1958.

Шевалле (Chevalley C.)
[1] Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer. Math. Soc. Surveys, № 6, 1951.

Эресманн (Ehresmann C.)
[1] Sur les espaces fibrés différentiables, *C. R.*, 224 (1947), 1611—1612.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ