

סטטיסטיקה והסתברות: תכנית רוטשילד, אביב 2017

מצגת פתיחה

בקורס ילובנו נושאים בסיסיים בסטטיסטיקה ובהסתברות, ובמיוחד הבעיה של בחירת מודל, הסקת מסקנות והחלטות תחת אי-ודאות, עם דגש על טעויות הנובעות משיפוט אינטואיטיבי בחיי יום-יום.

הצהרה:

"סטטיסטיקה והסתברות" הוא המקצוע המתמטי הקשה ביותר !!!

לא בדרישות המתמטיות המוקדמות
לא בקושי של הכלים המתמטיים
לא בהיבט הטכני של הכנסת נתונים לנוסחאות

**אלא בהטמעת הקשר שבין הנוסחאות המתמטיות והתופעות בחיי
יום-יום שהן מבטאות**

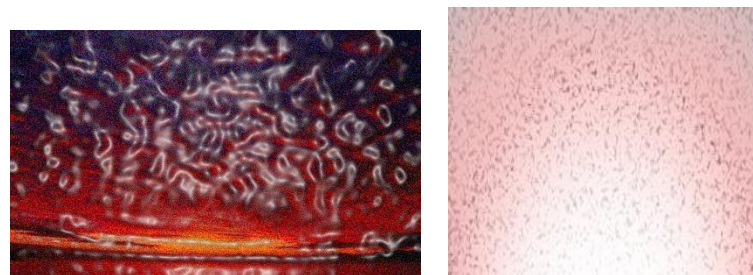
לכן: כמה חוקי יסוד להשתתפות בקורס:

- הופעה חובה
- ללא מחשבים למיניהם בכיתה (כולל טלפונים חכמים)
- השקעה בחזרה על החומר (פרטים יבואו)
- הגשת תרגילים עד ליום שלישי בשבוע שלאחר הפגישה !!
(כאשר ניסוח של תרגיל לא ברור - לך - נסח פרשנות המקובלת עליך ופתור לפי פרשנות זו).

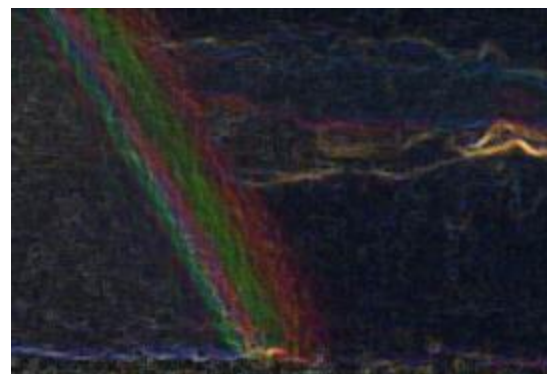
מדוע קשה לדייק בקשר שבין המתמטיקה לבין מה שהיא מתארת (במיוחד במקצועות הסטטיסטיקה וההסתברות)?

- הקומוניקציה בכלל בין בני האדם מבוססת על 1. ידע ו- 2. אינטואיציה, מוקדמים, וכן על הבנה ושפה משותפים.
- האינטואיציה הטבעית לבעיות בסטטיסטיקה והסתברות, המבוססת על חיי יום-יום, אינה מתאימה להרבה תופעות סטטיסטיות, שאפשר לבדוק בעזרת מתמטיקה.
- כאשר פותרים בעיה (במתמטיקה כמו בחיי יום-יום) לא מנתחים בתשומת הלב הראויה מה מתוך הידע שקיים רלבנטי לבעיה ומה לא רלבנטי.

אנחנו לא מוטרדים משפה מעורפלת
ויש לה אפילו יתרונות



ברטרנד ראסל:
קרח, אדום
הם ביטויים מעורפלים

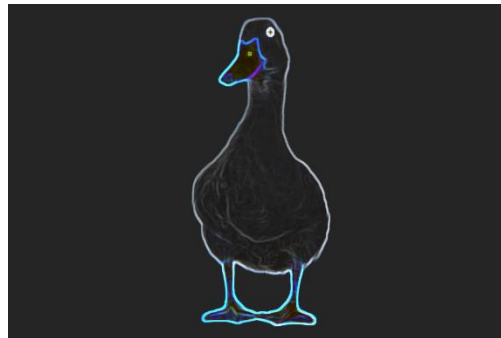


Question:

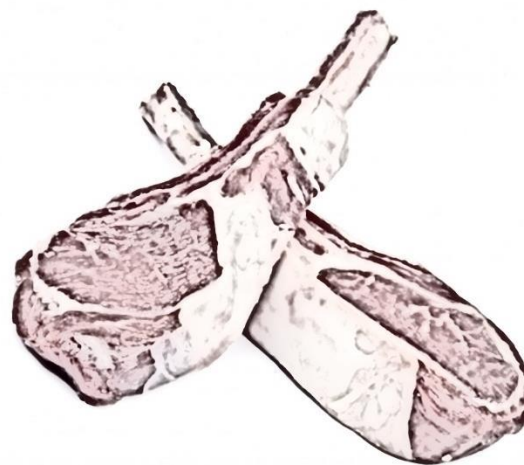
How do you get down from an elephant?

Answer:

You do not get down from an elephant, you get it from a duck



הנה שתי צלעות, ואיפה היתר?



תביא כיכר לחם, ואם יש ביצים תביא תריסר



“In a drought, no fire is too small to ignore”

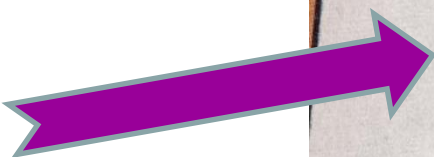
"בשעת בצורת, אין שריפה שהיא קטנה מכדי שיתעלמו ממנה"

מהעיתונות

היוולדו להורים הנכונים

הסיכוי של אדם שלא נולד עשיר להתקדם במעלה מדרג ההכנסות נמוך מתמיד, בעוד העשירים משמרים את כוחם. מחקר שערך מינהל הכנסות המדינה מגלה כי 71% מתור שבי ישראל שחיו בעשירון התחתון ב-2010 נותרו בו ב-2011. אל העשירון העליון, שסף הכניסה אליו הוא 50 אלף שקל ברוטו למשק בית, כמעט שאי-אפשר להיכנס: 88% מהח-

ברים בעשירון זה ב-2009 נותרו בו גם ב-2010 וב-2011. המאיון והאלפיון העליונים דווקא גדלים: שיעור החברים במאיון העליון עלה ב-3% ל-76% ב-2011, ובאלפיון העליון – ב-7.2% ל-63.1%.



עוד מהעיתונות

כותרת בעיתון הארץ – ספטמבר 2014

היכן טוב יותר לגור: שיעור התמותה השנתי בתל אביב הוא 7 נפטרים לכל 100.000 תושבים, בעוד שבברלין השיעור הוא 8 נפטרים לכל מאה אלף תושבים.

עוד מהעיתונות

TheMarker 26.10.2014 ,

שכר הפתחים גבוה? דו"ח OECD קובע: בוגרי בתי ספר מקצועיים מרוויחים 50% פחות מאקדמאים

לפי נתוני הארגון, שכרם של בעלי תעודה מקצועית בישראל גבוה ב-12% בלבד מזה של בעלי השכלה תיכונית • במדינות OECD מסתכם הפער ב-27% בממוצע • מחקר של משרד הכלכלה: רק כמחצית מכלל בוגרי המכללות הטכנולוגיות משתלבים בעבודה בתחום שאותו למדו • ליאור דטל 5

26.10.2014 | יום ראשון ב' בחשון תשע"ה | TheMarker

חור השדר רון טכנולוגיות לירטלי חנו

OECD: שכר האקדמאים בישראל גבוה ב-51% משכר בוגרי השכלה מקצועית

ללימודים מקצועיים-טכנולוגיים בישראל יש תועלת נמוכה במיוחד במונחי שכר לעומת החברות בארגון המדינות המפותחות • פחות מ-40% מבוגרי המכללות הטכנולוגיות בישראל זכאים לתעודת גמר וכ-60% מהם לא מצאו עבודה במקצוע שאותו למדו

ליאור דטל לפי OECD, שכרם של בוגרי תיכונית בלבד, שכרם של בעלי ד"ר מרכז המדיניות 2008-2010 פורום הוותיק ודוליה

למדעניות בישראל סיכוי נמוך פי 2.5 למצוא משרה אקדמית לעומת מדענים

על פי מחקר של האוניברסיטה העברית, נשים מתקשות להשתלב באקדמיה ורבות מהן חוששות מפגיעה בחייהן ובמשפחתן

עוד מהעיתונות מרס 2015

TheMarker 26.3.2015 ,

בוגרי 5 יחידות מתמטיקה מרוויחים 40% יותר מהשאר

תלמידי חמש יחידות מתמטיקה מקבלים נקודת זינוק עדיפה לחיים כמעט בכל תחום – כך לפי מחקר שערכו אייל קמחי ואריק הורוביץ במכון טאוב. בוגרי חמש יחידות משתכרים 11,600 שקל בחודש – 40% יותר ממי שסיימו בגרות ברמה של 4 יחידות, שמשתכרים 8,200. שכרם יותר מכפול מזה של חסרי בגרות. המחקר גילה כי קיים קשר מובהק בין רמת לימודי המתמטיקה לבין ההצלחה בלימודים האקדמיים ובשוק התעסוקה. גם בעיסוקים ספציפיים היו לבוגרי חמש יחידות יתרונות. כך, בענף הבנקאות והפיננסים ובמינהל הציבורי השתכרו בוגרי חמש יחידות בממוצע יותר מתלמידי 4 ו-3 יחידות לימוד.

מירב ארלוזורוב TheMarker

מי שלמדו 5 יחידות מתמטיקה משתכרים 40% יותר ממי שהסתפקו ב-4 יחידות

שכרם של בוגרי חמש יחידות יותר מכפול מזה של מי שכלל לא ניגשו לבגרות במתמטיקה • 38% מבוגרי חמש יחידות עוסקים בהנדסה, במדעים מדויקים ובמדעי המחשב • רובם המכריע של בוגרי חמש יחידות ילמד באוניברסיטאות – שם תהיה להם עדיפות בחוגים היוקרתיים

השקעה לטווח ארוך

הציון בבגרות במתמטיקה והשכר החודשי הממוצע,
ברוטו, בשקלים*

ציון	3 יחידות	4 יחידות	5 יחידות
עד 60	6,407	7,115	9,326
70-60	5,495	5,955	6,856
80-70	6,873	6,772	7,169
90-80	7,821	8,501	9,421
100-90	11,534	10,759	14,252

* בקרב בוגרי תיכון ילידי 1979

מקור: מחקרם של אייל קמחי ואריק הורזביץ, מכון טאוב

עוד מהעיתונות מרס 2015

מהו ממוצע?

עוד מאמצי התקשורת

לפני מספר חודשים - בחדשות:

"יש משבר בתעשיית ההי-טק – נתנו דוגמא של חברה שעלתה ב-5000 אחוזים בשנה הקודמת והשנה עלתה רק ב-800 אחוז".

האם נראה לכם כי אכן זה מסמן משבר?

מהעיתונות:

מהעיתונות

Unreliable research

Trouble at the lab

- **Scientists like to think of science as self-correcting.
To an alarming degree, it is not**

The Economist Oct 19th 2013

Enormous percentage (some say up to 90%) of results reported in the medical literature could not be verified by repeating the experiment.

האם שפת המתמטיקה בהירה?

שולמית צרפתי

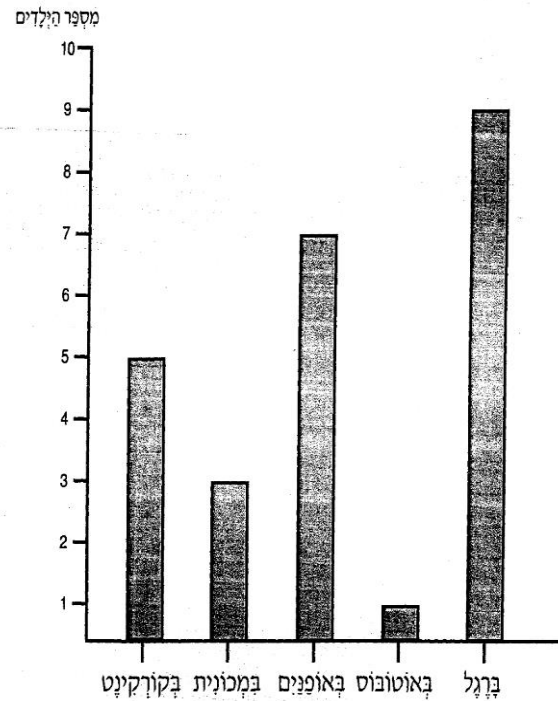
חושבים חשבון



למסיימי כיתות ב'

דיאגרמה

המורה שאלה את הילדים כיצד הם מגיעים לבית הספר בכל בקר.
היא אספה את תשובות הילדים ושרטטה דיאגרמה בהתאם.



כמה ילדים מגיעים לבית הספר במכונית?

כמה ילדים מגיעים לבית הספר בקוויקס ובאופניים?

איך מגיעים רב הילדים לבית הספר?

כמה ילדים מגיעים לבית הספר בכלי תחבורה כלשהו?

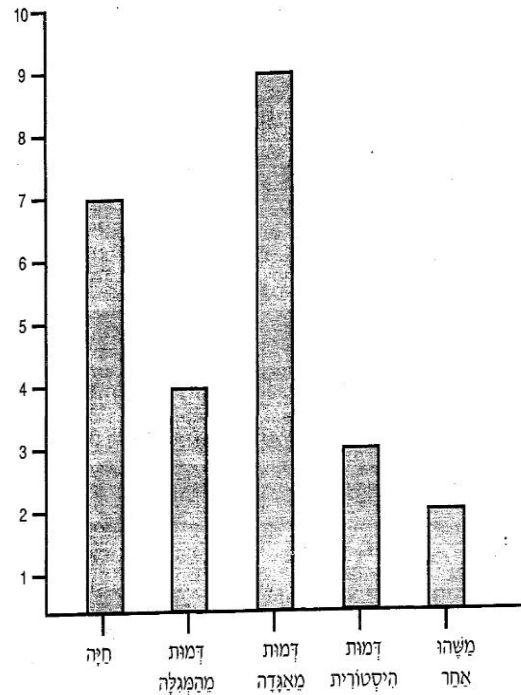
כמה ילדים יש בפתח בסך הכל?

דיאגרמה

הפונדק בדקה למה התחפשו הילדים בפורים.

היא שרטטה דיאגרמה מתאימה.

מספר הילדים



כמה ילדים התחפשו לחיות?

כמה ילדים התחפשו לדמות מאגדה או מהמגלה?

למה התחפשו רב הילדים?

גדי התחפש לאחשוורוש. כמה ילדים נוספים, חוץ ממנו, התחפשו לדמויות מהמגלה?

כמה ילדים יש בכתה בסך הכל?

דיאגראמה

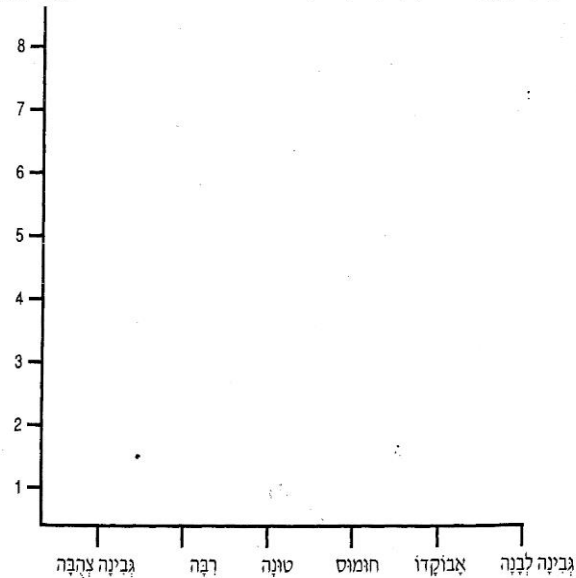
דניאלה שאַלע אַת הילדים איזע סנדוויצ'ים הם מעדיפים לאכל בטייל השנתי.
היא אספה אַת תשובות הילדים בטבלה הבאה:



מספר הילדים	סוג הסנדוויץ'
6	גבינה צהבה
3	רבה
2	טונה
8	חומוס
5	אבוקדו
4	גבינה לבנה

שרטטו דיאגראמה בהתאם לטבלה של דניאלה.

מספר הילדים



דיאגנאָזע

התבוננו בדיאגנאזע שבעמוד הקודם ונענו על השאלות.

כמה ילדים אוהבים סנדוויץ' עם רבה? _____

כמה ילדים אוהבים סנדוויץ' עם גבינה כלשהי? _____

איזה ממרח רב הילדים אוהבים? _____

איזה ממרח רב הילדים לא אוהבים? _____

כמה ילדים לא בחרו סנדוויץ' עם אבוקדו? _____

מיכל בחרה סנדוויץ' עם רבה. כמה ילדים נוספים, חוץ ממנה, בחרו סנדוויץ' עם רבה? _____

כמה ילדים לא בחרו סנדוויץ' עם אבוקדו? _____

כמה ילדים יוצאים לטיול בסך הכל? _____



עוד על טיעונים

האם הטעון הבא תקף:

בחנות הפרחים שברחוב השני 15% של הפרחים הם נבולים
החנות מוכרת חרציות

לכן: חלק מהחרציות שבחנות נבולות

נזכיר מהם כללי הסק:

אבל ההיסק הבא הוא שגיאה:

"A גורר B"

ו- "B"

אז "A"

עוד על דיאגרמות

ב 19/12/2014 [פרסם מעריב](#) סקר בחירות חדש.. הצגה הגרפית של סקרן אין (כמעט) קשר בין גובה העמודות למספר המנדטים. הבולט מכולם היא ההחלטה להציג את יש עתיד (עם 10 מנדטים) בתור עמודה בגובה של 23 מנדטים. להלן התרשים:



התרשים הזה שופע עיוותים נוספים של קשר בין מספרים לעמודות:

סכום המנדטים שבגרף הוא 122 (במקום 120)
 יש עתיד (10) בגובה של העבודה (23), וגבוהה מהליכוד (21) והבית היהודי (16)
 כולנו (10) נמוכה מיש עתיד (10), אבל בגובה של הבית היהודי (16)
 רעם תעל (7) בגובה של חד"ש (5), אבל נמוכים ממרצ (7), וכולם נמוכים מיהדות התורה (7)
 ונמוכים בסידרי גודל מישראל ביתנו (8).
 הגובה של הסיפורה מספר המנדטים של אלי ישי גבוה מהמספר של ש"ס (למרות שהעמודות באותו הגובה)

מאמר מעניין

How to Display Data Badly

Howard Wainer

The American Statistician, Vol. 38, No. 2. (May, 1984), pp. 137-147.

על אינטואיציה והסתברות



הצפה בנתיבי איילון
צילום: נתן אלפרט
תאריך: 05/12/1991

ימת כינרת



פרופסור מהטכניון (1991):

יש 60 אחוז סיכוי כי תהיה הצפה. צריך נס מן השמיים שלא יהיו נזקים".

למה התכוון? האם מימוש של סיכוי של 40 אחוזים הוא נס?

מה פירוש הסיכויים לגשם?

Berlin, Germany Weather

[Save This Location](#)

Updated: Mar 15, 2011, 3:45am Local Time

Overview	Hourly	Tomorrow	Weekend	5-Day	10-Day	Month	Map
Today Mar 15	Wed 16	Thu 17	Fri 18	Sat 19			
							
AM Showers	Cloudy	Showers	Rain / Snow Showers	Mostly Cloudy			
11°C High	10° High	7° High	7° High	9° High			
3° Low	2° Low	1° Low	1° Low	1° Low			
Chance of Rain: 40%	Chance of Precip: 20%	Chance of Rain: 50%	Chance of Precip: 30%	Chance of Precip: 10%			
Details	Details	Details	Details	Next 5 Days			

תחזית לחמישת הימים הבאים

[Customize Your Icons!](#)

שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
				
0° C -7° C	2° C 0° C	2° C -1° C	4° C -1° C	3° C 0° C
עננים פזורים	סיכוי לשלג 20% סיכוי למשקעים	סיכוי לגשם 30% סיכוי למשקעים	סיכוי לשלג 20% סיכוי למשקעים	מעונן
Hourly	Hourly	Hourly	Hourly	Hourly
Today is forecast to be Much Warmer than yesterday.				

תחזית ממשכת



דצמבר 20, 2010 AM CET , מעודכן: 01:00



שני

°C רוח רגוע. רוח צוננת: -10 . °C עננים פזורים. מקס 0



שני בלילה

°C רוח צוננת: -12. (water equivalent of 2.08 mm) רוח רגוע. 30% סיכוי למשקעים. °C סיכוי לשלג. עננים פזורים. מינ -7.



שלישי

(water equivalent of 0.28 mm) רוח רגוע. 20% סיכוי למשקעים. °C סיכוי לשלג. מעונן חלקית. מקס 2

Forecasts: 7-Day Forecast

My Location: Brussels, Belgium

Current Time: 09:16:50 AM CET

[Maps](#) | [More Weather](#)

7-Day Forecast [Updated: Dec 20 2010 / 08:05 AM CET]

Day		High Temp.	Low Temp.	Wind Speed/Dir.	Humidity	Comfort Level	UV Index	Precip. Probability	24hr. Precip. Total
Mon	 More clouds than sun. Chilly.	29°F	20°F	6 mph / ESE	87%	23°F	Minimal	10%	
Tue	 Snow flurries. Mostly cloudy. Cool.	34°F	20°F	7 mph / ESE	90%	28°F	Minimal	39%	0.98"
Wed	 Snow changing to an icy mix. Mostly cloudy. Cool.	35°F	30°F	14 mph / NE	92%	26°F	Minimal	44%	0.82"
Thu	 Snow changing to rain. Mostly cloudy. Cool.	37°F	33°F	11 mph / ESE	91%	29°F	Minimal	50%	0.21"
Fri	 Partly sunny. Cool.	38°F	35°F	13 mph / S	91%	30°F	Minimal	10%	
Sat	 More clouds than sun. Cool.	39°F	35°F	10 mph / S	90%	33°F	Minimal	10%	
Sun	 Afternoon clouds. Cool.	37°F	32°F	9 mph / SSW	85%	30°F	Minimal	20%	

משפטו של או גיי סימפסון



טענת ההגנה: מבין הבעלים שאיימו על נשותיהם כי ירצחו אותן
והאירוע טופל במשטרה, רק אחד מעשרים אכן ניסה יותר מאוחר
לרצוח את אשתו ופחות מאשר אחד ממאה אכן רצח אותה



הטעות

טענת ההגנה: מבין הבעלים שאיימו על נשותיהם כי ירצחו אותן והאירוע טופל במשטרה, רק אחד מעשרים אכן ניסה יותר מאוחר לרצוח את אשתו ורק אחד ממאה אכן רצח אותה

הבדיקה הנכונה: כמה מבין הנשים שגם נרצחו וגם הבעלים איימו עליהן ברצח, נרצחו על ידי בעליהן?

לא רק בחו"ל

הסיכוי שאדם יודה ברצח שלא ביצע אותו קטן ביותר.

לכן בתי משפט נוטים להרשיע אדם המודה ברצח גם ללא עדויות
תומכות (הם בעיקר בודקים האם ההודאה לא הוצאה בכוח)

האם זו החלטה נבונה?

ניתוח מתמטי

הסיכוי שאדם יודה ברצח שלא ביצע אותו קטן ביותר: **1 למה**
אלף, כלומר הסתברות של 0.00001.

נתפס אדם אחד **מתוך 500.000 אלף** באופן אקראי ומודה ברצח.

מה הסיכוי שהוא הרוצח?

1 : 5 !!!

האם זהו לא ספק סביר?

זו כנראה בעיה רחבה

מִכְשָׁל החלפת ההתניות להרשעה מוטעית על סמך
הודאה – סולימאן אל עביד כמקרה מבחן
(הצעה להיפוך בתפיסת ההודאה: מראה מרכזית המחפשת
תוספת, לתוספת אפשרית לראיות מוצקות)
מרדכי הלפרט ובוועד סנג'רו

מחקרי משפט כו, התשע"א - 2010

נזכיר מהם כללי הסק:

אבל ההיסק הבא הוא שגיאה:

"A גורר B"

ו- "B"

אז "A"

בהכרעת הדין במשפט אולמרט, אחד מנימוקי השופט כללו (לכאורה) שגיאה כזו:

אם עד מסכים עם טענה מביכה לו, הוא מגחך,
טענה המביכה את העדה הוצגה לה והיא גיחכה,
לכן העדה מסכימה עם הטענה

הסתברות מותנית כמקור לפרדוקסים ותוצאות מפתיעות

אלכס קופרמן
אוניברסיטת חיפה

תורת ההסתברות טומנת בחובה פרדוקסים רבים, שלכאורה
עומדים בסתירה ליהגיון הטבעי הצגתם מפתיעה, משעשעת,
לעתים מרגיזה, ומעוררת חשיבה.

אלכס קופרמן
אוניברסיטת חיפה

מבוא

חשיבה מתמטית היא אמצעי חשוב לגילוי העולם. אפשר לחלק אותה לשלושה סוגים עיקריים: חשיבה אנליטית, חשיבה גיאומטרית וחשיבה הסתברותית. לימוד חוקי ההסתברות עשוי להשפיע בצורה חיובית על ההתייחסות של האדם ל**אקראיות הבלתי נסבלת של הקיום**. הבנת חוקים אלה משרה ביטחון עצמי ומאפשרת להבין כי תלק מהכישלונות אינו נובע מ**חוסר מזל** או מסיבות מיסטיות אחרות, אלא מטבען האקראי של תופעות רבות. על-ידי-כך, תופעות שנראו מסתוריות ופרדוקסליות זוכות להסבר רציונלי ובכך מאפשרות ללומד להתמודד טוב יותר עם תופעות אקראיות ומצבי אי-ודאות.

תרגיל:

- נניח שההסתברויות להולדת בן או להולדת בת שוות.
- במשפחה מסוימת שלושה ילדים.
- בכניסה לדירתם אנו פוגשים שתי בנות השייכות למשפחה זו.
- מה ההסתברות שהילד הנוסף יהיה בן?

פתרון התרגיל:

- נסמן ב- 0 בת וב- 1 בן. מכיוון שיודעים כי למשפחה שתי בנות מרחב התוצאות האפשריות הוא 001, 010, 100, 000 ולכולן אותה הסתברות. לכן ההסתברות כי בילד השלישי בן היא $\frac{3}{4}$

ואריאציה על התרגיל:

- נניח שההסתברויות להולדת בן או להולדת בת שוות.
- במשפחה מסוימת שלושה ילדים.
- בכניסה לדירתם אנו פוגשים שתי בנות השייכות למשפחה זו.
- עכשיו גם נניח שרואים מאחרי הדלת לול ובתוכו תינוק, כלומר יודעים שהצאצא הנוסף קטן משתי הבנות שראינו.
- מה ההסתברות שהילד הנוסף יהיה בן?

פתרון הוואריאציה על התרגיל:

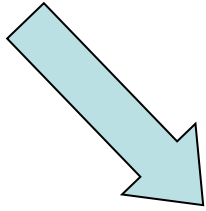
- כעת יודעים כי השאלה מתייחסת לילד השלישי. מרחב התוצאות הוא 001 ו- 000 בהסתברויות שוות. לכן ההסתברות כי הקטן הוא בן היא $\frac{1}{2}$

זהירות: לרוב אין מספיק אינפורמציה כדי
להגיע לתשובה מוסמכת וקשה לאתר מה
האינפורמציה הדרושה, וכאשר יש
אינפורמציה קשה לקבוע מה רלבנטי

סיטואציות דומות

Let's make a deal

The Monty Hall Problem: בעיית מונטי הול



נניח שאתה במשחק טלוויזיה וניתנת לך האפשרות לבחור בדלת אחת מתוך שלוש. מאחורי אחת הדלתות מכונית פאר ששווה 100.000 דולר, מאחורי שתי האחרות - עיזים. אתה בוחר דלת, נניח מספר 1. לפני שהדלת נפתחת, המגיש, שיודע מה נמצא מאחורי כל דלת, פותח את אחת מהדלתות האחרות, נניח דלת מספר 2, ומאחוריה עז. הוא אומר לך "אני מאפשר לך לשנות את הבחירה שלך עכשיו. ולשנות את הבחירה, לדלת מספר 3, תמורת 10 דולר" מה כדאי לעשות? (הנחה: המטרה למקסם את תוחלת התשלום.)

אילוזיה מנטלית: האם יש יד חמה בכדורסל?



תרגיל

זורקים קובייה באופן אקראי.
מה הסיכוי שהתוצאה תהיה 5?



תרגיל

זורקים קובייה באופן אקראי.
מה הסיכוי שהתוצאה תהיה מספר זוגי?



מהיכן באות ההסתברויות?

מהיכן מגיעה האקראיות, מה קובע את ההסתברויות?

לא מוכר בטבע כל מנגנון שמייצר מאורע אקראי

היחס לאי ודאות

בחר בין

הצעה 1:

3.000	בוודאות
-------	---------

לבין

הצעה 2:

4.000	בהסתברות 0.80
0	בהסתברות 0.20

לבין

בחר בין

הצעה 4:

הצעה 3:

0.80	בהסתברות	0
0.20	בהסתברות	4.000

0.75	בהסתברות	0
0.25	בהסתברות	3.000

בחר בין

לבין

הצעה X:

הצעה Y:

0.75	בהסתברות	A
0.25	בהסתברות	B

0.75	בהסתברות	A
0.25	בהסתברות	C

כאשר נתון ש- C יותר טוב מאשר- B

הצעה 1:

בוודאות	3.000
---------	-------

הצעה 2:

בהסתברות	0.80	4.000
בהסתברות	0.20	0

הצעה 3:

בהסתברות	0.75	0
בהסתברות	0.25	3.000

הצעה 4:

בהסתברות	0.80	0
בהסתברות	0.20	4.000

הצעה 3 היא:	0.75	הצעה 1 ועוד	0.25	לקבל	0
הצעה 4 היא:	0.75	הצעה 2 ועוד	0.25	לקבל	0

מי שמעדיף הצעה 1 על הצעה 2 צריך להעדיף הצעה 3 על הצעה 4 ולהיפך.

הפרדוקס של אלאיס (Allais)



מוריס אלאיס

נ. 1911

Maurice Allais

נובל 1988

מתי הסיכוי גדול יותר?

מה הסיכוי שבשנת 2018 רוסיה תנתק את היחסים
עם ארצות הברית?

מה הסיכוי שבשנת 2018 רוסיה תתעמת עם אוקראינה,
ארצות הברית תתערב לטובת אוקראינה ובעקבות כך
רוסיה תנתק את היחסים עם ארצות הברית?

טעויות (הטיות) מקובלות:

מאורעות עם הסתברות קטנה לא יקרו ✓

אקסיומת "האדיטיביות" לא מתקיימת: מאורע גדול יותר יתכן שייחסו לו הסתברות קטנה יותר ✓

שאלה מתבקשת:

אם האקסיומות לא מתקיימות כבר בבסיס
ההערכות: איך אפשר לפתח תורת הסתברות
המתארת התנהגות אנושית?

השאלה הגדולה:

עם התנהגות כל כך לא לוגית: איך אפשר לפתח
הבנה מתמטית ראויה של היחס להסתברות?

הסתברות ואינטואיציה: הילכו יחדיו?

- צדדים מסוימים של אקראיות קל להבין באופן אינטואיטיבי, אחרים לא
- תורה מתמטית מבוססת על אקסיומות קיימת
- חלקים מהמתמטיקה מבוססים על תובנות שאינן מתיישבות עם אינטואיציה ראשונית, ולכן קשים להבנה ולשימוש
- צריך להיזהר כאשר משתמשים בתיאוריה !

**מהיכן הפער שבין האינטואיציה לבין המתמטיקה?
מעט על ההיסטוריה של אקראיות והסתברות**

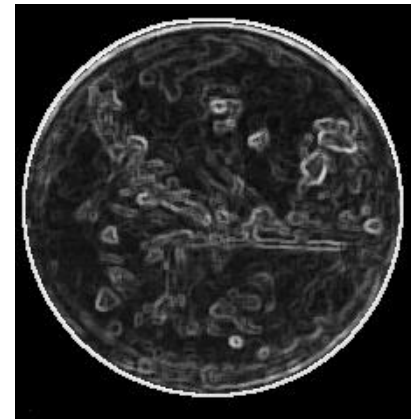
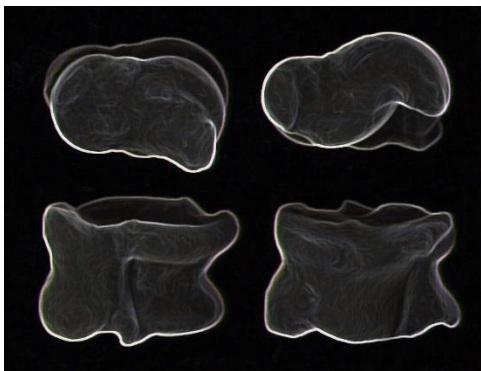
Black-capped Chickadee

ירגזי שחור-כיפה



אקראיות בתקופה העתיקה

משחקי מזל בתקופה העתיקה



משחקי מזל אסורים בתנ"ך

דברים י"ח פסוקים י', י"א

הַגִּוִּיִּם הָהֵם: לֹא־יִמָּצֵא בָךְ מַעֲבִיר בְּנוֹ-וּבִתּוֹ בָּאֵשׁ קֶסֶם קֶסָמִים ¹⁰
מְעִיגָן וּמִנְחָשׁ וּמִכִּשְׁתִּי: וְחֹבֶר חֹבֶר וְשֹׂאֵל אוֹב וַיִּדְעֵנִי וְדֹרֵשׁ אֵל- ¹¹
¹² הַמֵּתִים: כִּי־תוֹעֵבֶת יִהְיֶה כָּל־עֲשֵׂה אֵלֶּה וּבְגִלָּל הַתּוֹעֵבֶת הָאֵלֶּה

שימוש בהגרלות בתנ"ך: מכשיר להשגת צדק

13	מְשִׁיב דָּבָר בְּטָרֶם יִשְׁמַע אֵוֶלֶת הוּא־לּוֹ וּכְלָמָה:
14	רוּחַ־אִישׁ יְכַלְכֵּל מַחְלָו וְרוּחַ נְבִאָה מִי יִשְׁאַנָּה:
15	לֵב גִּבּוֹן יִקְנֶה־דַּעַת וְאֵזֶן חֲכָמִים תִּבְקֶשׁ־דַּעַת:
16	מִתֵּן אָדָם יִרְחִיב לּוֹ וּלְפָנָי גְּדִלִים יִנְחֶנּוּ:
17	צַדִּיק הָרֹאשׁוֹן בְּרִיבוֹ יִבְאֲרֶעְהוּ וַחֲקָרוֹ:
18	מְדִינִים יִשְׁבִּית הַגּוֹרֵל וּבֵין עֲצוּמִים יִפְרִיד:

18
מְדִינִים יִשְׁבִּית הַגּוֹרֵל
וּבֵין עֲצוּמִים יִפְרִיד:

משלי י"ח פסוק י"ח

שימוש בהגרלות בתורה: התנחלות

והתנחלתם את־הָאָרֶץ בְּגוּרָל לְמִשְׁפְּחֹתֵיכֶם לְרֹב
תָּרְבוּ אֶת־נַחֲלָתוֹ וְלִמְעַט תִּמְעִיט אֶת־נַחֲלָתוֹ אֵל־אֲשֶׁר־יֵצֵא לוֹ
55 שָׁמָּה הַגּוּרָל לוֹ יִהְיֶה לְמִשּׁוֹת אֲבֹתֵיכֶם תִּתְנַחֲלוּ:

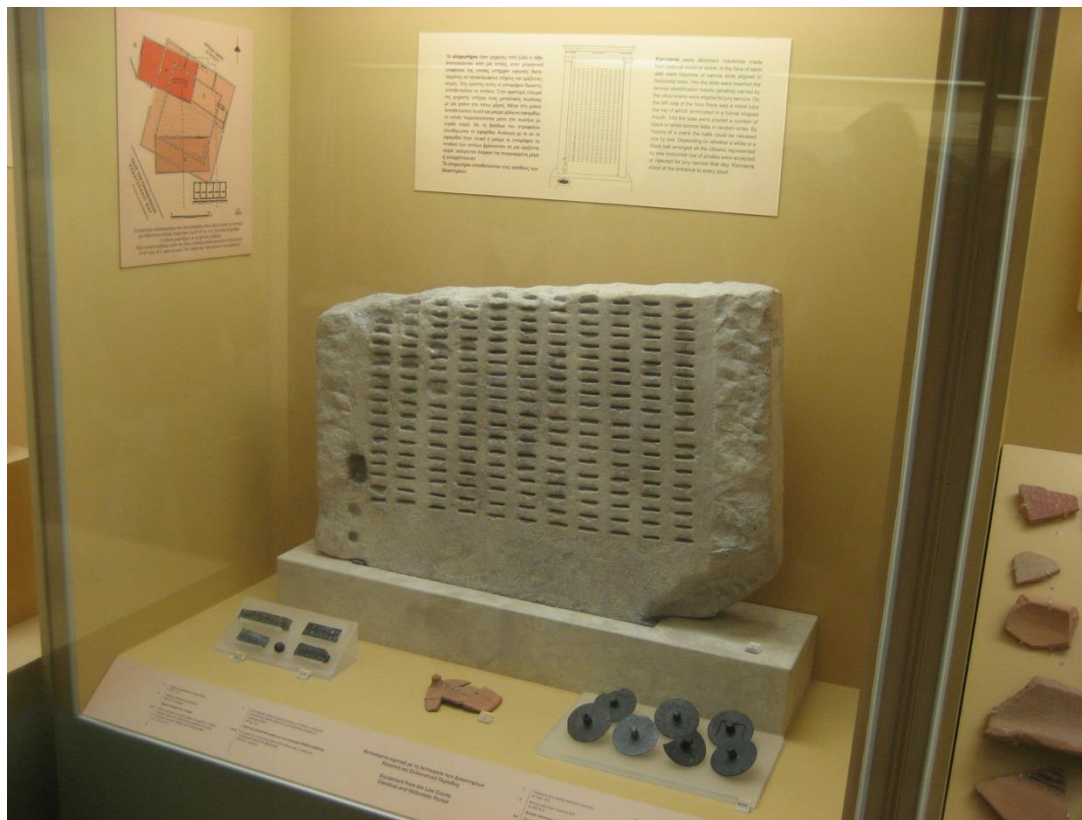
במדבר ל"ג פסוק נ"ה

וַיֵּצֵא

מֹשֶׁה אֶת־בְּנֵי יִשְׂרָאֵל לֵאמֹר זֹאת הָאָרֶץ אֲשֶׁר תִּתְנַחֲלוּ אֹתָהּ בְּגוּרָל
אֲשֶׁר צִוָּה יְהוָה לָתֵת לְתַשְׁעַת הַמִּשּׁוֹת וְחֲצֵי הַמִּשָּׁה: כִּי לָקְחוּ מִשָּׁה

במדבר ל"ד פסוק י"ג

שימוש בהגרלות בתקופה העתיקה



הגרלה כמכשיר להגינות בהחלטות

בתנ"ך

בחירת מושבעים:

ביוון העתיקה

בארצות הברית

גיוס לצבא:

בממלכה האוסטרו-הונגרית 1889

בארצות הברית, 1914, 1970, 1971

הגרלה כמכשיר לגיוס הוגן לצבא ארצות הברית

1914: הגרלה בין כל המועמדים (נערכה בכל מחוז ומחוז לחוד)

1970: הגרלה לפי תאריך לידה. התאריכים הוגרלו על ידי הוצאת פתקים ממיכל

1971: הגרלה לפי תאריכי לידה. רשות הסטטיסטיקה הממשלתית סיפקה 25 סדרות אקראיות, והסדרה הקובעת נבחרה על ידי הוצאת פתק ממיכל.

הגרלה כמכשיר להגינות בהחלטות

בתנ"ך

בחירת מושבעים:

ביוון העתיקה

בארצות הברית

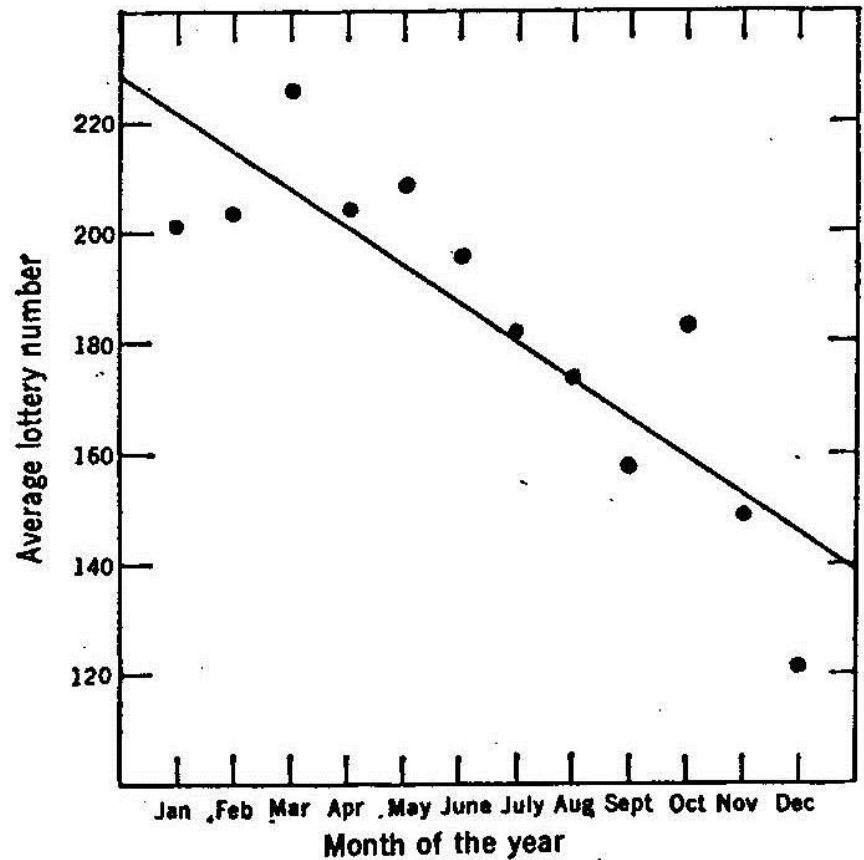
גיוס לצבא:

בממלכה האוסטרו-הונגרית 1889

בארצות הברית, 1914, 1970, 1971

האם הגיוס ב- 1970 היה הוגן?

Month	Average number
January	201.2
February	203.0
March	225.8
April	203.7
May	208.0
June	195.7
July	181.5
August	173.5
September	157.3
October	182.5
November	148.7
December	121.5



דגימות, סקרי דעת קהל

מתוך המבחן בקורס זה בשנת 2013:

בישראל, לה כ- 8 מיליון תושבים, מדגם של 500 אנשים מספיק כדי לאמוד את שיעור התמיכה במפלגה גדולה, ברמת טעות נתונה (טעות של 2 אחוזים).

מה גודל המדגם הנדרש כדי להשיג אותה רמת טעות בארצות הברית (לה כ- 320 מיליון אנשים, פי ארבעים מאשר בישראל)?

מתוך אתר וואלה, 14 לפברואר 2015

- **תחקיר: 90% מההרוגים בהפצצות בתים ב"צוק איתן" - אזרחים**

- לקראת פרסום דוח האו"ם על הפשעים שביצעה לכאורה ישראל במהלך הלחימה, סוכנות הידיעות אי-פי בחנה 247 הפצצות של מתחמים אזרחיים. 60% מההרוגים היו נשים, ילדים וקשישים.

- משרד החוץ: "ישראל לא ביצעה פשעי מלחמה"

- **דובר צהל (קול ישראל, 13 לפברואר):** דובר צהל הגיב כי אי אפשר להסיק מסקנות מתוך בדיקה של מספר קטן כל כך של הפצצות מתוך סך ההפצצות

דוגמא מהחיים:

בכיתה של הבן שלי כאשר היה בכיתה אלף בקשה המורה שיביאו משלוח מנות וכל ילד ייתן את מנותיו לילד אחר שיבחר באופן מקרי. להפתעתה היו ילדים שלא קבלו.

האם הייתה צריכה לצפות כי כל הילדים יקבלו משלוח מנות? מה הסיכויים שכל הילדים יקבלו משלוח מנות בשיטת חלוקה כזו? מה המשמעות של מה הסיכויים?

דגימות, סקרי דעת קהל

במלחמת המפרץ הראשונה בארצות הברית שלחו ילדים מכתבים לחיילים בחזית. חייל אחד קיבל את המכתב שאחותו שלחה. העיתונות האמריקאית עשתה מזה רעש גדול.

האם הרעש מוצדק?

מדוע סקרי בחירות נכשלים?

הדגימה מבוצעת תוך קיצורים וחסכונות
פונים למי שקל לפנות אליו
אין אי תלות
סתם מרמים

לסוקרים יש קונספציה משלהם

במה עוסקת המתמטיקה של תורת ההסתברות והסטטיסטיקה?

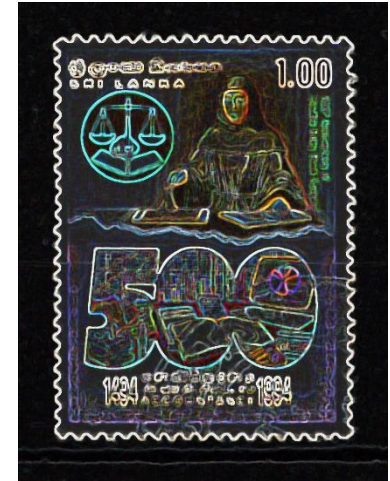
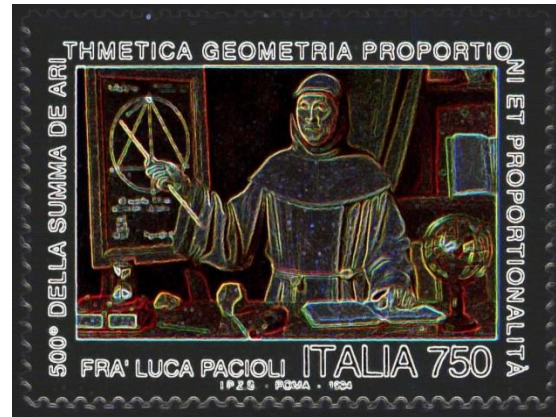
שני פנים לאי ודאות

- פעולות אקראיות החוזרות על עצמן עם חוקיות סטטיסטית.
- אי ודאות, הערכה (סובייקטיבית?) לסיכוי שיקרה משהו.
- פן נוסף שימוש באי ודאות:
שימוש בהגרלה כמכשיר החלטה להכרעה הוגנת בין כמה אפשרויות

הסיבות לתחילה של מתמטיקה של הסתברות וסטטיסטיקה המאה ה-17

- ניסיונות להבנת הימורים
- נפילות בענף הקצבאות
- אי ודאות בנושאים משפטיים

לוקה פקיולי 1446 – 1517



"המשחק הבלתי גמור"
מתוך:

"הכול אודות אריתמטיקה, אלגברה ופרופורציות", 1494

חליפת המכתבים בין פסקל ופרמה - 1654

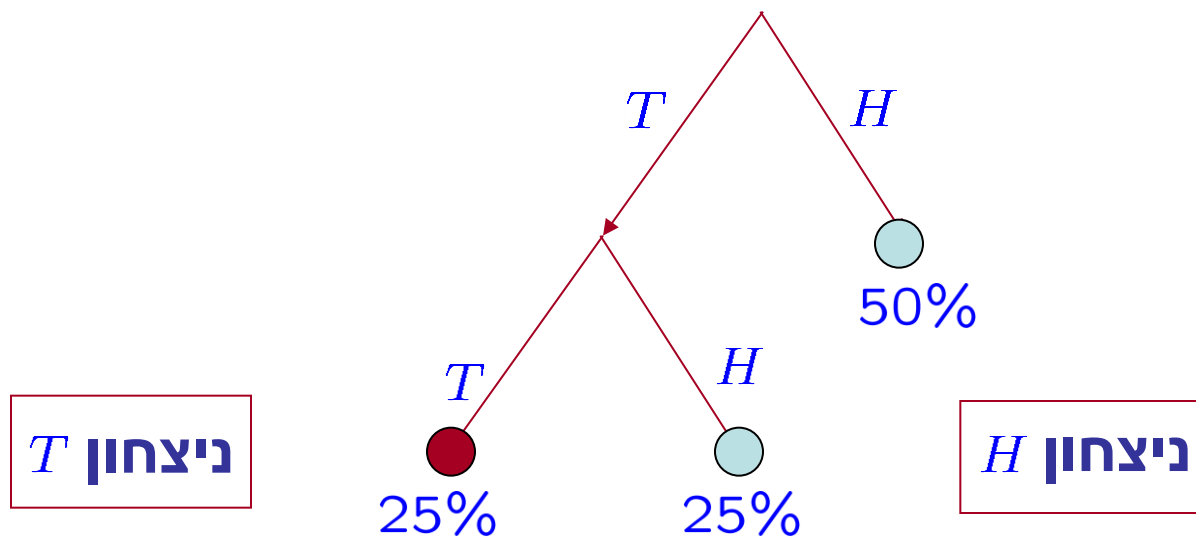


דוגמא לבעיה שנידונה במכתבים: סכום כסף ניתן לחלוקה בין שני צדדים. הם מחליטים כי יזרקו מטבע חמש פעמים. אם H ייפול יותר פעמים מאשר T צד א' יקבל את כל הסכום, אחרת, כלומר T ייפול יותר פעמים מאשר H , צד ב' יקבל את כל הסכום. אחרי שלוש הטלות שמהן שתיים יצאו על H ואחת על T המשחק הופסק. איך יהיה הוגן לחלק את הסכום לאור תוצאה זו?

פתרון במונחים של היום:

בהפסקת המשחק: HH T

המשכים אפשריים



בלייז פסקל 1662 – 1623



ההימור של פסקל

$X\%$	$(1-X)\%$	
יש אלוהים	אין אלוהים	
נהנה לעד בגן עדן	קשה לי, דרגה $-N$	מאמין
סובל לעד בגיהנום	קל לי, דרגה N	לא מאמין

גייקוב-גיימס ברנולי 1705 – 1654 Jacob-James Bernoulli



החוק החזק של המספרים הגדולים

ככל שמבצעים יותר ניסיונות, הממוצעים של יותר ויותר סדרות של הטלות קרובים לממוצע התיאורטי של הזכייה

הטעות של המהמר:

המשפט:

ככל שמבצעים יותר ניסיונות, **הממוצעים** של יותר ויותר סדרות של הטלות קרובים לממוצע התיאורטי של הזכייה

אבל:

הסטיות מהממוצע יכולות להיות גבוהות מאוד – למעלה מהיכולת של המהמר המצוי

קרל פירסון 1857 – 1936 Karl Pearson



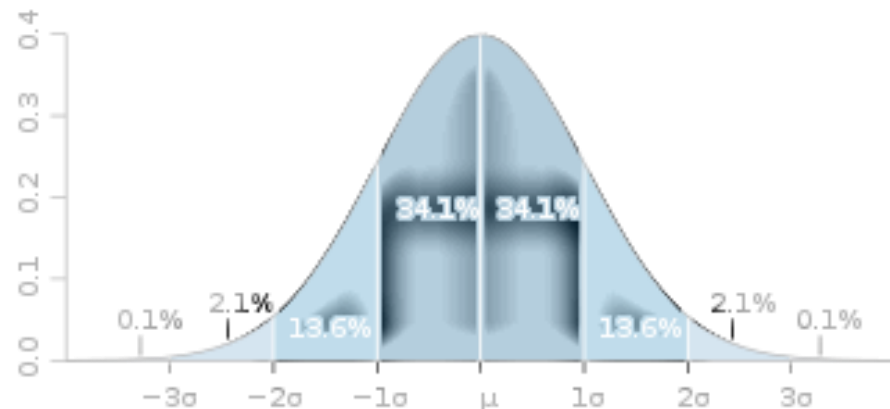
בצע 24000 זריקות מטבע מהן יצאו 12012 הטלות על "ראש"

משפט הגבול המרכזי

משפט הגבול המרכזי – שאיפה להתפלגות נורמלית (גאוסית)



חלוקה בשורש מספר
הנסיונות מובילה
להתפלגות גאוסית



חישובי הסתברויות על סמך אינפורמציה נתונה

תומס בייס 1702 – 1761 Thomas Bayes



פרסם שני מאמרים:

Attempt to Prove That the Principal End of the Divine Providence and Government is the Happiness of His Creatures

An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst

פרסם שני מאמרים.

אבל ידוע בעיקר כמנסח של חוקי ההסתברות של הסקה של
הסתברויות מתוצאות נתונות – חוקי בייס

חוק בייס – דוגמא

ניתנות שלוש קופסאות. באחת (A) שתי מטבעות כסף, בשנייה (B) שתי מטבעות זהב בשלישית (C) מטבע זהב ומטבע כסף



A



C



B

חישובי הסתברות ישירים:

. אחת הקופסאות נבחרת באופן מקרי. מה הסיכוי שתצא מטבע כסף?



חישוב: אם A נבחרה הסיכוי 100 אחוז

אם B נבחרה הסיכוי 50 אחוז

אם C נבחרה הסיכוי 0 אחוזים

$$\frac{1}{3}100 + \frac{1}{3}50 + \frac{1}{3}0 = 50 \quad \% \quad \text{סה"כ"}$$

חישובי הסתברות הפוכים:



אחת הקופסאות נבחרת באופן מקרי. מתוכה נבחרת באופן מקרי מטבע כסף. מה הסיכוי שהקופסה שנבחרה A ?

חישובי הסתברות הפוכים:



אחת הקופסאות נבחרת באופן מקרי. מתוכה נבחרת באופן מקרי מטבע כסף. מה הסיכוי שהקופסה שנבחרה A ?

חישוב: הסיכוי שמטבע כסף נבחרה מורכב מ- $\frac{1}{3}100\%$
שקופסה A נבחרה ו- $\frac{1}{3}50\%$ שהקופסה B נבחרה
סה"כ מתוך הסיכוי שמטבע כסף יצאה תופס הסיכוי ש- A
נבחרה, מתוך כלל האפשרויות, $\frac{2}{3}$

חוק בייס – נוסחה/הסבר

אם אתה רוצה לדעת מהי ההסתברות שמאורע X התרחש כאשר נודע לך כי מאורע Y התקיים: תבדוק מהו חלק ההסתברות ש- X הביא לכך שנודע לך כי Y מתקיים, מתוך כלל ההסתברויות שהביאו לכך שנודע לך כי Y מתקיים

דוגמא

כל תרומת דם נבדקת שמא הדם נגוע ב-HIV או בצהבת. הבדיקה אמינה בדרגה של 99.5 אחוזים (בשני הכיוונים).
תורם מסוים נבדק והבדיקה יצאה חיובית – הראתה שהתורם נגוע ב-HIV.

השאלה: מה סיכויים שהתורם אכן נגוע?

נזכיר: אם אתה רוצה לדעת מהי ההסתברות שמאורע A התרחש כאשר נודע לך כי מאורע B התקיים: תבדוק מהי חלק ההסתברות ש- A הביא לכך שנודע כי B מתקיים, מתוך כלל ההסתברויות שהביאו לכך שנודע לך כי B מתקיים

הבדיקה הנכונה: למצוא את שיעור חולי ה-HIV באוכלוסיה, נניח רבע אחוז. ואז החשבון הוא:

$$\frac{99.5 \times 0.25}{99.5 \times 0.25 + 0.5 \times 99.75} = 0.33$$



RECKONING WITH **RISK**

GERD GIGERENZER



LEARNING TO LIVE
WITH UNCERTAINTY

'Gigerenzer is brilliant and
his topic is fabulous'

STEVEN PINKER

אבל: לרוב אין מספיק אינפורמציה כדי
להגיע לתשובה מוסמכת וקשה לאתר
מה האינפורמציה הדרושה, וכאשר יש
אינפורמציה קשה לקבוע מה רלבנטי

ג'ורג בול 1815 – 1864 George Boole



טען שהדרך הלוגית לנתח הסתברויות היא לראות מה הסתברות של קבוצות של אפשרויות

הקבוצות עצמן כפופות לחוקים לוגיים של איחוד, חיתוך, וכדומה – האלגברה הבוליאנית

George Boole “no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognize ... those universal laws of thought which are the basis of all reasoning”

מהיכן באות ההסתברויות?

מהיכן מגיעה האקראיות, מה קובע את ההסתברויות?

לא מוכר בטבע כל מנגנון שמייצר מאורע אקראי

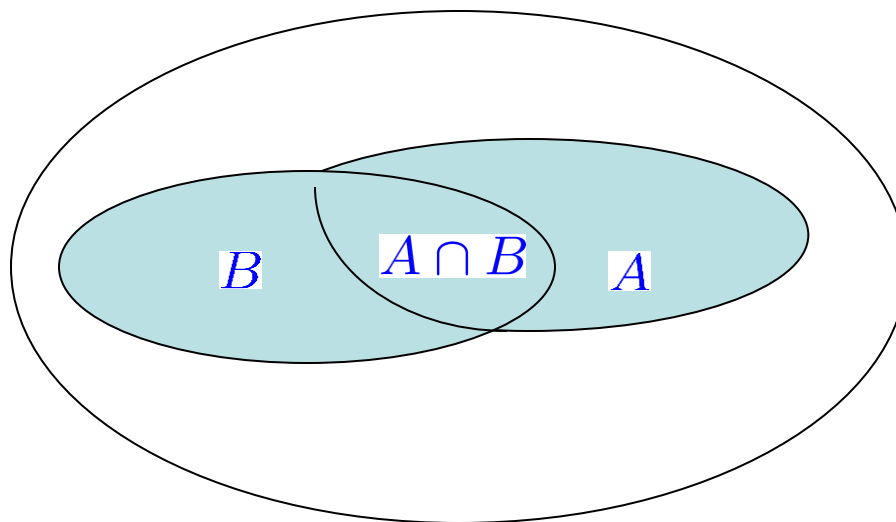
ואז הגיע קולמוגורוב

אנדריי ניקולאיביץ קולמוגורוב
1984 – 1903
Andrey Nikolaevich Kolmogorov



(בין השאר) אקסיומטיזציה של מושג ההסתברות

מרחב המדגם



ההסתברויות נתונות:

$$P(B) \quad P(A) \quad P(A \cap B)$$

מהיכן מגיע מרחב המדגם?
צריך או לזהות אותו או לבנות אותו

מהיכן נוצרות ההסתברויות?
אלה אקסיומות !

מעניין:

בערוב ימיו זנח קולמוגורוב את "מרחב המדגם" כמושג בסיסי
והחל לפתח הסתברות וסטטיסטיקה רק בעזרת סדרות של
ניסיונות חוזרים.

סטטיסטיקה והסתברות בפעולה: הבעיות

נזכיר:

הדואליות של אי ודאות

- פעולות אקראיות החוזרות על עצמן עם חוקיות סטטיסטית.
- אי ודאות, הערכה (סובייקטיבית?) לסיכוי שיקרה משהו.
- פן נוסף: שימוש בהגרלה כמכשיר החלטה, למשל, להכרעה הוגנת בין כמה אפשרויות.

הסיבות לתחילה של מתמטיקה של הסתברות וסטטיסטיקה

- ניתוח של קצבאות
- התפתחות ההימורים
- אי ודאות בנושאים משפטיים

מצב העניינים היום:

פעולות אקראיות החוזרות על עצמן עם חוקיות סטטיסטית
דגימות
ניתוח של קצבאות
הימורים
שוק המניות (משוואות בלק-שולס)
שימוש בבתי משפט

המתמטיקה בסדר – החיים לא תמיד מסתדרים בהתאם