

פתרון אפשרי לתרגילי הבחינה העצמית 1:

א. ההגנה במשפטו של או ג'יי סימפסון טענה כי יש ספק סביר אם רצח את אשתו, למרות שלפני הרצח איים עליה כי ירצח אותה ואף היכה אותה עד כדי כך שהיה צורך להזעיק את המשטרה. טענת ההגנה הייתה כי סטטיסטיקה מהימנה מראה כי רק 10 אחוזים מאלה שמאיימים כך על נשותיהם והדבר מגיע לטיפול המשטרה אמנם מנסים לרצוח אותה אחר כך, ומעטים אף יותר מצליחים בכך. וזהו הספק הסביר. לימים טענו כנגדם כי הנימוק הסטטיסטי חסר מכיוון שהוא מתעלם מהעובדה כי אשתו של או ג'יי סימפסון נרצחה.

מי צודק? נתח את הסיטואציה תוך שימוש בכלים שנלמדו בכיתה (מרחבי הסתברות, עיקרון בייס וכדומה). בצע את הניתוח בצורה מדויקת וכמותית ככל האפשר. במידה וחסרים נתונים השלם אותם על ידי השערה סבירה.

נבחר כמרחב המדגם את קבוצת כל הגברים בארצות הברית והתפלגותם אחידה. נסמן ב- A את המאורע: גבר איים על אשתו ברצח והמשטרה טפלה במקרה. נסמן ב- B את המאורע: גבר ניסה לרצוח את אשתו וב- C גבר ניסה לרצוח את אשתו והצליח לעשות זאת. ההגנה טענה ש- $P(A \cap B) = 0.1$ וקל וחומר ש- $P(A \cap C)$ קטן מזאת, וזהו הספק הסביר. הטיעון היה יכול להיות נכון אם לא היה ידוע כי האישה נרצחה. נסמן ב- D את המאורע: האישה של הגבר גם אוימה על ידו וגם נרצחה. בהנחה שהנתונים אמינים, כלומר ההסתברות שנודע לנו D היא ההסתברות של D , ההערכה הסטטיסטית אז ניתנת על ידי $P(A \cap C | D)$ כלומר, ההסתברות המותנית שהגבר גם איים וגם רצח בהינתן שהאישה אוימה ונרצחה, כלומר $P(A \cap C \cap D) / P(D)$ חלקי $P(D)$ (או במילים: הפרופורציה ל הנשים שאוימו ונרצחו על ידי בעליהן מבין אלה שאוימו על ידי בעליהן אבל נרצחו, בין על ידי הבעל או על ידי מישהו אחר). מספר זה לא נתון בסיפור המעשה אבל מתקבל על הדעת שהוא קרוב ל- 1 (וזו האמת).

ב. נתון כי משתנה מקרי X קטן ממש בכל נקודת מדגם ממשתנה אחר Y . האם יתכן כי הם בלתי תלויים?

התשובה חיובית. אין קשר בין גובה הערכים שהמשתנים מקבלים לבין אי התלות. לדוגמא: ניקח כמרחב מדגם $\{(a_1, a_2) : a_i = 0, 1\}$ כלומר כזה שמייצג למשל שתי זריקות בלתי תלויות של מטבע, נגדיר משתנה מקרי $X(1, a_2) = 2$ ו- $X(0, a_2) = 1$ ומשתנה אחר $Y(a_1, 1) = 10$ ו- $Y(a_1, 0) = 8$ ונקבל אי-תלות למרות שהתנאים על אי השוויון מתקיים (באותה מידה אפשר לחבר דוגמא לכך שקימת תלות).

ג. קובייה נזרקת פעמיים באופן בלתי תלוי. האם המאורעות: "סכום התוצאות של שתי הזריקות הוא 4" ו- "לפחות אחת הזריקות העלתה את המספר 3" הם בלתי תלויים?

נבחר כמרחב מדגם את כל הזוגות (a, b) שערכי הקואורדינטות שלהן הם מ- 1 ועד 6, והתפלגות אחידה (לכל הזוגות אותה הסתברות להופיע). נסמן ב- A את המאורע "סכום התוצאות של שתי הזריקות הוא 4" וב- B את המאורע "לפחות אחת הזריקות העלתה את המספר 3" אי התלות מתקיימת אם $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. ספירה פשוטה (שכאן נדלג עליה) מראה כי השוויון לא מתקיים.

ד. נסח במדויק את החוק החלש והחזק של המספרים הגדולים. הראה כי אם משמיטים את ההנחה כי המשתנים המקריים בלתי תלויים החוקים לא מתקיימים.

הי $X_1, X_2, \dots$ סדרה של משתני מקריים שווי התפלגות ובלתי תלויים על מרחב מדגם משותף. נסמן ב- m את התוחלת של ההתפלגות המשותפת. נסמן ב- Z_n את המשתנה המקרי שהוא הממוצע של n המשתנים המקריים הראשונים בסדרה. החוק החלש של המספרים הגדולים הוא שלכל מספר חיובי a ההסתברות $P(|Z_n - m| \geq a) \rightarrow 0$ שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף. החוק החזק של המספרים

הגדולים אומר כי הסדרה של המספרים $Z_n(\tau)$ שואפת ל- m פרט אולי לקבוצה של נקודות מדגם τ שההסתברות שלה שווה לאפס.

כדי להראות שאי אפשר להשמיט את הנחת אי-התלות נסתכל על סדרה של משתנים מקריים X_i שהם זהים, אבל אינם קבוע, למשל $X(\tau) = \tau$ על קטע היחידה. אז $Z_n(\tau)$ גם הוא שווה לאותו משתנה מקרי, ואינו שואף לממוצע.

ה. השונות של משתנה מקרי X הוגדרה על ידי $\sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$ הוכח כי $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

את הפונקציה $(X - E(X))^2$ אפשר לכתוב כ- $X^2 - 2XE(X) + E(X)^2$ מכיוון שלקייחת תוחלת זו פעולה ליניארית במשתנה המקרי ותוחלת של משתנה מקרי קבוע הוא הקבוע עצמו נקבל כי $\sigma^2(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$ כנטען