

מבחן סיום שניתן בעבר לקורס "הסתברות וסטטיסטיקה":
תכנית רוטשילד ויצמן,

ענה על כל השאלות. לרשותך שלוש שעות, אך קח בחשבון כי אין צורך להשתמש בכל הזמן המוקצב. **המבחן לא בודק רק את היכולת להציב נתונים בנוסחה.** תשובה מלאה אמורה להתייחס (בקיצור) **הן למודל שלפיו עובדים והן להנחות** המתבקשות לפני שמשמשים בנוסחה. אם השימוש בנוסחה מחייב ידיעה של פרמטר אותו אינך יודע אתה יכול להשתמש בסימן מתמטי תוך הסבר איזה פרמטר חסר. בכל שאלה הסבר מה אתה עושה. תשובה לקונית, למשל, המספר הנכון בלבד, תזכה רק בחלק קטן של הניקוד.

1. הנה בדיחה. אדם נתפס בעלייה למטוס נושא פצצה בתיק שלו. היה לו הסבר. "כוונתי לא הייתה לפוצץ את המטוס", אמר, "אלא ששמעתי שהסיכוי ששני אנשים שאינם מכירים אחד את השני יעלו בו-זמנית פצצות למטוס קטן בהרבה מן הסיכוי שרק אדם אחד יעלה עם פצצה. הבאתי את הפצצה רק כדי להקטין את הסיכוי שהמטוס יפוצץ".
האם הטענה של אותו אדם מתקבלת על הדעת? נמק את טיעונך תוך שימוש מפורש ומדויק של מושגים מתורת ההסתברות.
2. מכונית ובה שלושה אנשים: שני גברים ואישה, הייתה מעורבת בתאונה. למשטרה לא ידוע מי הנהג ולכן, מלכתחילה, מעריכה את הסיכויים של כל אחד מהשלושה להיות הנהג כ- $\frac{1}{3}$. בדיקה נוספת של המשטרה העלתה ממצאים נוספים. התגלה כי הנהג נפצע וסוג הדם שלו הוא O. התגלה כי לגבר הראשון סוג דם O. לא ידוע סוג הדם של הגבר השני ושל האישה אבל סטטיסטיקה מהימנה אומרת כי 10% מהגברים ו-8% מהנשים הם בעלי סוג דם O. האם תוכל ליעץ למשטרה כיצד לעדכן את הערכת הסיכויים של כל אחד מהשלושה להיות הנהג?
3. א. נסח במדויק את החוק החלש ואת החוק החזק של המספרים הגדולים.
ב. הראה כי חוק המספרים הגדולים (החלש או החזק) אינו נכון ללא הנחת אי-תלות בין המשתנים המקריים.
4. בישראל, לה כ-8 מיליון תושבים, מדגם של 500 אנשים מספיק כדי לאמוד את שיעור התמיכה במפלגה גדולה עם טעות של $\pm 2\%$, וזאת ברמת מובהקות של 95% (כלומר ב-95% מהפעמים האומדן יהיה נכון).
א. מה גודל המדגם הנדרש כדי להשיג אותה רמת טעות ואותה רמת מובהקות בארצות הברית (לה כ-320 מיליון אנשים).
ב. מה גודל המדגם הנדרש בישראל כדי להשיג רמת טעות של $\pm 1\%$ ברמת מובהקות של 99%?
5. ניסיון רב שנים מראה כי מתוך 40,000 הצופים המגיעים למגרש הכדורגל של קבוצת ארסנל מדי שבועיים, מספר המבקשים לקנות לחמנייה עם נקניקיה מתפלג קרוב מאוד להתפלגות נורמלית, עם ממוצע 2000 ושונות 100. הזכיון של אספקת הלחמניות עם נקניקיה התחייב לספק את הביקוש ב-95% של המשחקים.
א. כמה לחמניות עליו להכין מדי שבועיים כדי לעמוד בהתחייבות?
ב. כמה לחמניות יהיה עליו להכין כדי לספק את הביקוש ב-100% של המשחקים?
ג. האם סביר כי הזכיון יניח שהביקוש ללחמניות נעשה על ידי כל צופה וצופה באופן בלתי תלוי אחד בשני ובהסתברות אחידה?
6. א. הגדר מהי התפלגות פואסונית.
ב. הסבר את הקשר שבין מספר גדול של ניסיונות ברנולי שלכל אחד סיכוי הצלחה נמוך לבין התפלגות פואסונית.
ג. תן דוגמה מהחיים למשתנה מקרי שסביר כי יתפלג פואסונית.
ד. הסבר מדוע התפלגות פואסונית לה תוחלת קטנה אינה קרובה להתפלגות נורמלית בעוד שאם התוחלת שלה גדולה היא קרובה להתפלגות נורמלית.

בהצלחה !