

מבחן סיום שניתן בעבר לקורס "הסתברות וסטטיסטיקה":
תכנית רוטשילד ויצמן

ענה על כל השאלות. לרשותך שלוש שעות, אך קח בחשבון כי אין צורך להשתמש בכל הזמן המוקצב. **המבחן לא בודק רק את היכולת להציב נתונים בנוסחה.** תשובה מלאה אמורה להתייחס (בקיצור) **הן למודל שלפיו עובדים והן להנחות** המתבקשות לפני שמתמשים בנוסחה. אם השימוש בנוסחה מחייב ידיעה של פרמטר אותו אינך יודע אתה יכול להשתמש בסימן מתמטי תוך הסבר איזה פרמטר חסר. בכל שאלה הסבר מה אתה עושה. תשובה לקונית, למשל, המספר הנכון בלבד, תזכה רק בחלק קטן של הניקוד. הצגת עובדות לא רלבנטיות לא תעלה, ועלולה אף להוריד, את הציון.

1. נתון כי הסיכויים להולדת בן ולהולדת בת שווים. מספרים לך כי למשפחה מסוימת שנבחרה באופן מקרי יש שני ילדים וביניהם בת. שואלים אותך מה הסיכוי שיש לה גם בן? וכן שואלים האם הסיכוי ישתנה אם צלצלת בפעמון הדירה של המשפחה ופותחת את הדלת בת?
לגבי כל אחת מהשאלות הראה כי הנחות שונות לגבי המאורע האקראי מביאות לתוצאות שונות. נסח את ההנחות האלה במדויק תוך התייחסות למרחב מדגם ו/או למאורעות מקריים.
2. בצומת דרכים עוברות אלפי מכוניות כל יום ומדי פעם יש תאונות. מצאו כי התפלגות מספר התאונות לשבוע היא פואסונית וממוצע התאונות לשבוע הוא 1. מה הסיכוי כי בשבוע מסוים מספר התאונות יהיה גדול (או שווה) משתי סטיות תקן מעל הממוצע?
3. א. הסבר מדוע כדי לטעון ששני משתנים מקריים הם בלתי תלויים עליהם להיות מוגדרים על אותו מרחב מדגם.
ב. הסבר מדוע כדי לטעון כי לשני משתנים מקריים עם ערכים ממשיים יש אותה התפלגות אין צורך כי יהיו מוגדרים על אותו מרחב מדגם.
4. יהיה (p, Σ, Ω) מרחב הסתברות ויהיו $X_1, 2, 3, \dots, i$ משתנים מקריים שווי התפלגות ובלתי תלויים מהמרחב לישר הממשי כך שהתוחלת של כל אחד מהם מוגדרת. נסמן את התוחלת המשותפת באות μ . נסמן $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ כלומר, Z_n הוא הממוצע של n המשתנים המקריים הראשונים.
א. נסח במדויק (תוך התייחסות לנתון לעיל) את החוק החלש ואת החוק החזק של המספרים הגדולים והסבר באיזה מובן החוק החלש חלש יותר מאשר החוק החזק.
ב. האם המשתנים המקריים Z_n הם בלתי תלויים?
5. א. הצג במדויק (תוך התייחסות למרחב מדגם) את אי-שוויון צ'בישב.
ב. הראה כי באי-שוויון צ'בישב אי אפשר להשיג הערכה טובה יותר כל עוד אי-השוויון מתייחס להתפלגות כל שהיא.
ג. הראה כי כאשר מתייחסים להתפלגויות מסוימות, ההערכות שאי-שוויון צ'בישב נותן ניתנות לשיפור.
6. תכשיט יקר נגנב ממוזיאון בעיר שבה מיליון וחצי תושבים וידוע כי הגנב הוא תושב העיר. הגנב לא היה זהיר והשאיר טביעת DNA כזו שידוע כי ההסתברות שלאזרח תהיה טביעת DNA זהה היא 10^{-7} . המשטרה בדקה 100.000 תושבים באופן אקראי אחד אחרי השני עד שמצאה אזרח עם טביעת DNA זהה. מה ההסתברות שזה אמנם הגנב?

בהצלחה !