

פתרון אפשרי לתרגילי הבחינה העצמית:

א. ההגנה במשפטו של או ג'יי סימפסון טענה כי יש ספק סביר אם רצח את אשתו, למרות שלפני הרצח איים עליה כי ירצח אותה ואף היכה אותה עד כדי כך שהיה צורך להזעיק את המשטרה. טענת ההגנה הייתה כי סטטיסטיקה מהימנה מראה כי רק 10 אחוזים מאלה שמאיימים כך על נשותיהם והדבר מגיע לטיפול המשטרה אמנם מנסים לרצוח אותה אחר כך, ומעטים אף יותר מצליחים בכך. וזהו הספק הסביר. לימים טענו כנגדם כי הנימוק הסטטיסטי חסר מכיוון שהוא מתעלם מהעובדה כי אשתו של או ג'יי סימפסון נרצחה.

מי צודק? נתח את הסיטואציה תוך שימוש בכלים שנלמדו בכיתה (מרחבי הסתברות, עיקרון בייס וכדומה). בצע את הניתוח בצורה מדויקת וכמותית ככל האפשר. במידה וחסרים נתונים השלם אותם על ידי השערה סבירה.

נבחר כמרחב המדגם את קבוצת כל הגברים בארצות הברית והתפלגותם אחידה. נסמן ב- A את המאורע: גבר איים על אשתו ברצח והמשטרה טפלה במקרה. נסמן ב- B את המאורע: גבר ניסה לרצוח את אשתו וב- C גבר ניסה לרצוח את אשתו והצליח לעשות זאת.

ההגנה טענה ש-  $P(A \cap B) = 0.1$  וקל וחומר ש-  $P(A \cap C)$  קטן מזאת, וזהו הספק הסביר. הטיעון היה יכול להיות נכון אם לא היה ידוע כי האישה נרצחה.

נסמן ב- D את המאורע: האישה של הגבר גם אוימה על ידו וגם נרצחה. ההערכה הסטטיסטית אז ניתנת על ידי  $P(A \cap C | D)$  כלומר, ההסתברות המותנית שהגבר גם איים וגם רצח בהינתן שהאישה אוימה ונרצחה, כלומר  $P(A \cap C \cap D)$  חלקי  $P(D)$  (או במילים: הפרופורציה ל הנשים שאוימו ונרצחו על ידי בעליהן מבין אלה שאוימו על ידי בעליהן אבל נרצחו על ידי מישהו אחר). מספר זה לא נתון בסיפור המעשה אבל מתקבל על הדעת שהוא קרוב ל- 1 (וזה האמת).

ב. נתון כי משתנה מקרי X קטן ממש בכל נקודת מדגם ממשנתה אחר Y. האם יתכן כי הם בלתי תלויים? בנוסף נתון כי הערך המכסימלי שהמשתנה X מקבל גדול מהערך המינימלי שהמשתנה Y מקבל. האם יתכן כי X ו- Y בלתי תלויים?

התשובה חיובית. אין קשר בין גובה הערכים שהמשתנים מקבלים לבין אי התלות. לדוגמא: ניקח כמרחב מדגם  $\{(a_1, a_2) : a_i = 0, 1\}$  כלומר כזה שמייצג למשל שתי זריקות בלתי תלויות של מטבע, נגדיר משתנה מקרי  $X(1, a_2) = 2$  ו-  $X(0, a_2) = 1$  ומשתנה אחר  $Y(a_1, 1) = 10$  ו-  $Y(a_1, 0) = 8$  ונקבל אי-תלות למרות שהתנאים על אי השוויון מתקיים (באותה מידה אפשר לחבר דוגמא לכך שקימת תלות).

ג. קובייה נזרקת פעמיים באופן בלתי תלוי. האם המאורעות: "סכום התוצאות של שתי הזריקות הוא 4" ו- "לפחות אחת הזריקות העלתה את המספר 3" הם בלתי תלויים?

נבחר כמרחב מדגם את כל הזוגות (a,b) שערכי הקואורדינטות שלהן הם מ- 1 ועד 6, והתפלגות אחידה (לכל הזוגות אותה הסתברות להופיע). נסמן ב- A את המאורע "סכום התוצאות של שתי הזריקות הוא 4" וב- B את המאורע "לפחות אחת הזריקות העלתה את המספר 3" אי התלות מתקיימת אם  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . ספירה פשוטה (שכאן נדלג עליה) מראה כי השוויון לא מתקיים

ד. השונות של משתנה מקרי X הוגדרה על ידי  $\sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$  הוכח כי  $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

את הפונקציה  $(X - E(X))^2$  אפשר לכתוב כ-  $X^2 - 2XE(X) + E(X)^2$  מכיוון שלקייחת תוחלת זו פעולה ליניארית במשתנה המקרי ותוחלת של משתנה מקרי קבוע הוא הקבוע עצמו נקבל כי  $\sigma^2(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$  כנשען