

ענה על כל השאלות. לרשותך שלוש שעות, אך קח בחשבון כי אין צורך להשתמש בכל הזמן המוקצב. **המבחן לא בודק רק את היכולת להציב נתונים בנוסחה.** תשובה מלאה אמורה להתייחס (בקיצור) **הן למודל שלפיו עובדים והן להנחות** המתבקשות לפני שמשתמשים בנוסחה. אם ניסוח של שאלה או חלקה לא ברורים לך, נסח אינטרפרטציה סבירה לנוסח הלא ברור והמשך לפיה. אם השימוש בנוסחה מחייב ידיעה של פרמטר אותו אינך יודע, אתה יכול להשתמש בסימן מתמטי תוך הסבר איזה פרמטר חסר. בכל שאלה הסבר מה אתה עושה. תשובה לקונית, למשל, המספר הנכון בלבד או שימוש בנוסחה מבלי לציין מדוע אפשר להשתמש בה, **תזכה רק בחלק קטן של הניקוד.** וגם: התשובות חייבות לכלול רק חומר הרלבנטי לשאלות. הוספת חומר שאינו קשור ישירות לשאלה **תביא להורדה בניקוד.**

1. במיכל ענקי נמצאים כדורים לבנים ושחורים. הוציאו 100 כדורים באופן אקראי והיו ביניהם 55 כדורים שחורים. באיזו רמת מובהקות יודעים כי במיכל כולו יש בין 50% ל- 60% כדורים שחורים.

2. מכונית ובה שלושה אנשים: שני גברים ואישה, הייתה מעורבת בתאונה. למשטרה לא ידוע מי הנהג ולכן, מלכתחילה, מעריכה את ההסתברות של כל אחד מהגברים להיות הנהג כ- 0.4 בעוד שההסתברות כי האישה היא הנהגת מוערכת ב- 0.2. בדיקה נוספת של המשטרה העלתה ממצאים נוספים. התגלה דם על ההגה ומסיקים כי הנהג נפצע, וסוג הדם שלו הוא O. סטטיסטיקה מהימנה אומרת כי 10% מהגברים ו- 8% מהנשים הם בעלי סוג דם O אבל גם נודע כי הגבר הראשון מגיע ממשפחה בה סיכוי לסוג דם O הוא 50%. אנה ייעץ למשטרה כיצד לעדכן את הערכת הסיכויים לגבי כל אחד מהשלושה להיות הנהג?

3. א. נתון כי להתפלגות של משתנה מקרי מסוים X יש פונקציית צפיפות שנסמן ב- $f(x)$. מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $2X + 3$?
 ב. נסח חוק גבול מרכזי.
 ג. בניסוח שבסעיף הקודם מופיע מושג ההתכנסות, או הקרבה, בין התפלגויות. הגדר באופן מדויק למה הכוונה הן לגבי התפלגויות כלליות והן לגבי אלה המופיעות במשפט שניסחת.
 ד. הראה כי אי אפשר להשמיט את הנחת אי-התלות בניסוח חוק הגבול המרכזי.

4. נתונים שני משתנים מקריים X ו- Y שהם שווי התפלגות אבל לא בהכרח בלתי תלויים. נסמן את השונות המשותפת ב- σ^2 . הראה כי השונות של $X + Y$ יכולה לנוע רק בין 0 ובין $4\sigma^2$, ושני ערכים קיצוניים אלה אכן מתקבלים. (רמז: יתכן ותרצה להשתמש באי-שוויון קושי-שוורץ עבור פונקציות אינטגרליות האומר שריבוע האינטגרל של מכפלת שתי פונקציות כאלה הוא קטן או שווה למכפלת האינטגרלים של ריבוע הפונקציות, ובסימול מתמטי $(\int fg)^2 \leq \int f^2 \int g^2$.)

5. אחד משלושה אסירים נבחר באקראי ועתיד להיות מוצא להורג מחר. מנהל בית הסוהר מורה לאחד הסוהרים, שידוע מי אמור להיות מוצא להורג, לבחור בין אסיר ב' ואסיר ג' אחד שלא יוצא להורג ולספר זאת לאסיר א'. הסוהר אומר לאסיר א' כי ב' לא יוצא להורג. האינפורמציה החדשה עשויה לעדכן את סיכוייו של א' להיות זה שיוצא להורג. הראה כי עדיין אי אפשר להסיק מסיפור המעשה מה הסיכוי המעודכן של א' להיות זה המוצא להורג למחרת. הראה זאת על ידי כך שתציג לפחות שתי אסטרטגיות פעולה של הסוהר המביאות למסקנות שונות בדבר הסיכוי הנזכר של א'.

6. א. הגדר מהי התפלגות פואסונית.
 ב. הסבר (במדויק) את הקשר שבין מספר גדול של ניסיונות ברנולי שלכל אחד סיכוי הצלחה נמוך לבין התפלגות פואסונית.
 ג. מספר התביעות לשנה מחברת ביטוח הוא משתנה מקרי מפולג פואסונית עם תוחלת λ . גודל התביעה הממוצעת בכל שנה הוא עצמו משתנה מקרי X , שהוא פונקציה, כך אנו מניחים, של מספר התביעות, וניתנת על ידי הגודל a_k עבור $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. רשום ביטוי המציג מה היא תוחלת הסכום שחברת הביטוח נתבעת לשלם כל שנה? מה תהיה תוחלת התשלום אם a_k אינו תלוי ב- k , נאמר הגודל קבוע וגדול c ?
 ד. הסבר כיצד ייתכן כי התפלגות פואסונית יכולה להיות קרובה לנורמלית כאשר בהתפלגות נורמלית ההסתברות של כל אינטרוול $(-\infty, a)$ כאשר a שלילי, היא חיובית, בעוד שהתפלגות פואסון נותנת הסתברות 0 לכל אינטרוול כזה.

בהצלחה !