

הצגנו את הגישה הלוגית להסתברות והקשיים הנובעים ממנה בפרקים 40 עד 43. נראה עכשיו כיצד גם מורי המורים חשופים לטעויות. ונדגיש: הדוגמה כאן לא מוצגת כדי להראות את הטעות, או כדי להביך או חס וחלילה ללגלג על כותב המאמר שאותו אנתח. אני מציג את הדוגמה על פרטיה כיוון שדרכה אפשר לדעת להצביע על מקורות הטעות, והם – הקושי לזהות התניות והשלמת התמונה על ידי המוח. גם, נאריך בדיון, ונפרט, כדי להמחיש את העדינות הדרושה בניתוח בעיות כאלה.

הכותרת למאמר שהופיע בעיתון למורים לפני כמה שנים היתה מבטיחה: "הסתברות מותנית כמקור לפרדוקסים ותוצאות מפתיעות". המבוא הבטיח לא פחות: "חשיבה מתמטית היא אמצעי חשוב לגילוי העולם... תופעות שנראות מסתוריות ופרדוקסליות זוכות להסבר רציונלי..." וכך הלאה. המאמר עצמו מציג דוגמאות לפרדוקסים לכאורה, הזוכים במאמר להסברים רציונליים – לכאורה. הנה אחת הדוגמאות.

בנים ובנות. נתון כי ההסתברות להולדת בן שווה ל- $\frac{1}{2}$. במשפחה מסוימת שלושה ילדים. לתרגיל שני שלבים. ראשית, מחוץ לדירת המשפחה אנו פוגשים שתי בנות השייכות למשפחה זו. מהי ההסתברות שהילד הנוסף יהיה בן? בהמשך, נוסף לשתי הבנות אנו רואים מעבר לדלת לול ובתוכו דמות של תינוק, בן או בת, כלומר אנחנו יודעים שהילד שנשאר בבית קטן משתי הבנות שפגשנו בחוץ. מה אז ההסתברות כי הילד השלישי הוא בן זכר?

הגישה של המאמר לפיתרון השאלות שגויה. נציג את הפיתרון שבמאמר, ואחר כך נצביע על השגיאה. ונדגיש שוב: המטרה שלנו היא לא ללגלג על מחבר המאמר. טעויות הן דבר שיגרתי במתמטיקה. מטרתנו היא להצביע על מקור הטעות. נציג תחילה את הפיתרון.

המחבר פותר את התרגיל לא לפני שהוא עצמו כותב כי תלמידים רבים משוכנעים שהתשובה הנכונה לשלב הראשון היא $\frac{1}{2}$. ההסבר שלהם, כך הוא טוען, הוא כי מטעמי סימטריה הסיכוי שהילד הנוסף יהיה בן או בת שווים זה לזה. אז ניגש המחבר לפיתרון "הנכון". הוא מסמן ילד ממין זכר בספרה "1" וילדה ממין נקבה בספרה "0". בעזרת סימנים אלה נוכל לרשום שמונה מספרים תלת-ספרתיים המתארים את כל המצבים האפשריים במשפחה בת שלושה ילדים:

$$\Omega = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$$

כאשר, למשל, 011 מציין כי בתחילה נולדה בת ולאחריה שני בנים. כאן ממשיך המאמר ברוח הפורמלית שהצגנו בפרק 41. נסמן ב-A את המאורע "במשפחה יש בדיוק בן אחד" ובאות B את המאורע "במשפחה יש לפחות שתי בנות". צריך לחשב את ההסתברות המותנית $P(A|B)$ שהיא $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. ביצוע החישוב קל למדי.

המאמר מציג שתי דרכים המביאות לאותה תוצאה. ניתן כאן את הקצרה בין השתיים: כיוון שידוע כי יש שתי בנות במשפחה, המאורע הרלבנטי, טוען המחבר, מורכב מארבע אפשרויות מתוך השמונה, והן $\{000, 100, 010, 001\}$. בשלוש מאלה יש בן בנוסף לשתי הבנות שפגשנו, לכן ההסתברות היא $\frac{3}{4}$.

כעת ממשיך המאמר לשלב השני. לכאורה, הוא מזהיר, לאור התוצאה הקודמת נצפה כי התשובה היא $\frac{3}{4}$.

אין זה נכון (לפי המאמר). נשים לב: אנחנו יודעים כי השאלה מתייחסת לילד או לילדה האחרונים ולכן מרחב התוצאות הוא רק $\{001,000\}$, ולכן ההסתברות כאן כי התינוק זכר היא $\frac{1}{2}$ ולא $\frac{3}{4}$. כאמור, המחבר רואה בתוצאה זו תוצאה מפתיעה, או פרדוקס, שאותו המתמטיקה מבארת.

כאמור, הגישה של המחבר לפיתרון שגויה, והפרדוקס, או ההפתעה לכאורה – אינם קיימים. המחבר לא שם לב לכך שאין מספיק נתונים כדי להגיע לפיתרון חד-משמעי לשאלה. נראה ראשית מדוע אי-אפשר לקבל את הפיתרון המוצע, וזאת כיוון שלפי הדרך שבה מנוסחת השאלה הפיתרונות של שני החלקים סותרים זה את זה. אם התשובה היא $\frac{1}{2}$ כאשר נודע לנו כי הילד הקטן נשאר בבית, זו תהיה התשובה גם אילו נודע לנו כי הילד שנשאר בבית הוא האמצעי בין השלושה, וזו גם התשובה אילו נודע לנו כי הגדול בין השלושה נשאר בבית. שלושת המקרים הללו זרים זה לזה, ויחד הם ממצים את כל האפשרויות. ואם בכל מקרה כזה ההסתברות היא $\frac{1}{2}$ הרי ההסתברות תהיה $\frac{1}{2}$ גם כאשר אנחנו לא יודעים את המיקום במשפחה של הילד שנשאר בבית. לכן, מכך שנקבל $\frac{1}{2}$ כתשובה נכונה בשלב השני נובע ש- $\frac{1}{2}$ היא התשובה הנכונה גם בשלב הראשון.

אז היכן הטעות של המחבר? אני יכול לעשות לעצמי חיים קלים ולטעון כי המחבר הולך שולל על ידי הכותרת "הסתברות מותנית", שלעיתים מפרשים אותה בספרות כאילו היא מציינת את ההסתברות של A כאשר נודע כי B מתקיים (ראה פרק 40). פירוש זה של מושג ההסתברות המותנית לא נכון, כיוון שהניסוח מתעלם מן השאלה **כיצד נודע** לנו כי B מתקיים. מי שקרא את פרק 40 יודע שכדי לפתור בעיות מן הסוג הזה צריך להשתמש בצורת החשיבה של ג'ייס. אילו ניסה המחבר להפעיל את עיקרון בייס היה רואה, כי בלי אינפורמציה נוספת אי-אפשר להגיע לפיתרון חד-משמעי. (הצגנו לכך דוגמה בפרק 42, בסיפור על שש היפהפיות בתחרות היופי. גם דוגמה דומה לזו נפתרה במאמר באופן שגוי.) כפי שכבר אמרנו, אם חסרים נתונים, המוח של הפותר משלים את החסר בעצמו, ובדרך כלל בצורה לא מודעת. אלא שהשלמות שונות עלולות להביא לתוצאות שונות.

נציג שלוש השלמות שונות של האינפורמציה שכל אחת מביאה לפיתרון שונה. בראשונה, נניח כי במשפחה עם שלושה ילדים, שני הצאצאים היוצאים לשחק בחוץ נבחרים באקראי. אז התשובה המתמטית המלאה תהיה $\frac{1}{2}$ בשני השלבים (אנו מדלגים כאן על החישובים). באפשרות השנייה נניח כי המשפחות בשכונה הן כאלה שתמיד יוצאים לשחק שני ילדים מאותו המין, שני ילדים או שתי ילדות, ואם יש במשפחה שלושה מאותו מין יוצאים לשחק בחוץ שני הבוגרים. במקרה זה, בשלב הראשון של השאלה, ההסתברות שהילד שלא יצא לשחק הוא בן היא $\frac{3}{4}$, וההסתברות בשלב השני היא אמנם $\frac{1}{2}$, כמו במאמר שאנו מתייחסים אליו (שוב נדלג על החישובים אך נעיר כי כאן החשבון שציטטנו מהמאמר תופס). האפשרות השלישית היא שתמיד יוצאים לשחק שני ילדים מאותו המין ואם יש במשפחה שלושה מאותו מין, השניים שיוצאים נבחרים באקראי. אז בשני

השליבים ההסתברות שנשאר בן בבית היא $\frac{3}{4}$. אנחנו רואים אפוא כי אפשר להשלים את האינפורמציה הניתנת בשאלה בדרכים שונות, שמביאות לתוצאות שונות. מה ההשלמה הנכונה? ניסוח השאלה לא נותן לכך תשובה. השימוש שעשה המחבר שלנו בנוסחה המתמטית מגלם בתוכו הנחה סמויה אודות השאלה עצמה (למשל, אחת ההנחות שזה עתה הצגנו), הנחה שלא מופיעה בניסוח השאלה. לכן גם נזהרתי ואמרתי כי גישת מחבר המאמר שגויה ולא כי הפיתרון המספרי שניתן במאמר אינו נכון (אם כי, מכיוון שהמחבר מתייחס רק לנוסחאות קשה להאמין שהוא נתן דעתו לאפשרויות השונות. וגם זה לִקְחַ לַמִּשְׁתַּמֵּשׁ המתמטיקה – לא להשתמש בנוסחאות לפני שמוודאים את הרלבנטיות שלהן).