

סטטיסטיקה והסתברות: תכנית רוטשילד, אביב 2015

בקורס ילובנו נושאים בסיסיים בסטטיסטיקה ובהסתברות, ובמיוחד הבעיה של בחירת מודל, הסקת מסקנות והחלטות תחת אי-ודאות, עם דגש על טעויות הנובעות משיפוט אינטואיטיבי בחיי יום-יום.

הצהרה:

"סטטיסטיקה והסתברות" הוא המקצוע המתמטי הקשה ביותר !!!

לא בדרישות המתמטיות המוקדמות
לא בקושי של הכלים המתמטיים
לא בהיבט הטכני של הכנסת נתונים לנוסחאות

**אלא בהטמעת הקשר שבין הנוסחאות המתמטיות והתופעות בחיי
יום-יום שהן מבטאות**

לכן: כמה חוקי יסוד להשתתפות בקורס:

- הופעה חובה
- ללא מחשבים למיניהם בכיתה (כולל טלפונים חכמים)
- השקעה בחזרה על החומר (פרטים יבואו)
- הגשת תרגילים עד ליום שלישי בשבוע שלאחר הפגישה !!
(כאשר ניסוח של תרגיל לא ברור - לך - נסח פרשנות המקובלת עליך ופתור לפי פרשנות זו).

מדוע קשה לדייק בקשר שבין המתמטיקה לבין מה שהיא מתארת (במיוחד במקצועות הסטטיסטיקה וההסתברות)?

- הקומוניקציה בכלל בין בני האדם מבוססת על 1. ידע ו- 2. אינטואיציה, מוקדמים, וכן על הבנה ושפה משותפים.
- האינטואיציה הטבעית לבעיות בסטטיסטיקה והסתברות, המבוססת על חיי יום-יום, אינה מתאימה להרבה תופעות סטטיסטיות, שאפשר לבדוק בעזרת מתמטיקה.
- כאשר פותרים בעיה (במתמטיקה כמו בחיי יום-יום) לא מנתחים בתשומת הלב הראויה מה מתוך הידע שקיים רלבנטי לבעיה ומה לא רלבנטי.

מהעיתונות

היוולדו להורים הנכונים

הסיכוי של אדם שלא נולד עשיר להתקדם במעלה מדרג ההכנסות נמוך מתמיד, בעוד העשירים משמרים את כוחם. מחקר שערך מינהל הכנסות המדינה מגלה כי 71% מתוֹ שבי ישראל שחיו בעשירון התחתון ב-2010 נותרו בו ב-2011. אל העשירון העליון, שסף הכניסה אליו הוא 50 אלף שקל ברוטו למשק בית, כמעט שאי-אפשר להיכנס: 88% מהח-

ברים בעשירון זה ב-2009 נותרו בו גם ב-2010 וב-2011. המאיון והאלפיון העליונים דווקא גדלים: שיעור החברים במאיון העליון עלה ב-3% ל-76% ב-2011, ובאלפיון העליון – ב-7.2% ל-63.1%.



עוד מהעיתונות

כותרת בעיתון הארץ – ספטמבר 2014

היכן טוב יותר לגור: שיעור התמותה השנתי בתל אביב הוא 7 נפטרים לכל 100.000 תושבים, בעוד שבברלין השיעור הוא 8 נפטרים לכל מאה אלף תושבים.

עוד מהעיתונות

TheMarker 26.10.2014 ,

שכר הפתחים גבוה? דו"ח OECD קובע: בוגרי בתי ספר מקצועיים מרוויחים 50% פחות מאקדמאים

לפי נתוני הארגון, שכרם של בעלי תעודה מקצועית בישראל גבוה ב-12% בלבד מזה של בעלי השכלה תיכונית • במדינות OECD מסתכם הפער ב-27% בממוצע • מחקר של משרד הכלכלה: רק כמחצית מכלל בוגרי המכללות הטכנולוגיות משתלבים בעבודה בתחום שאותו למדו • ליאור דטל 5

חשך בשרר בנו אקדמאים לרעלי חסודה

OECD: שכר האקדמאים בישראל גבוה ב-51% משכר בוגרי השכלה מקצועית

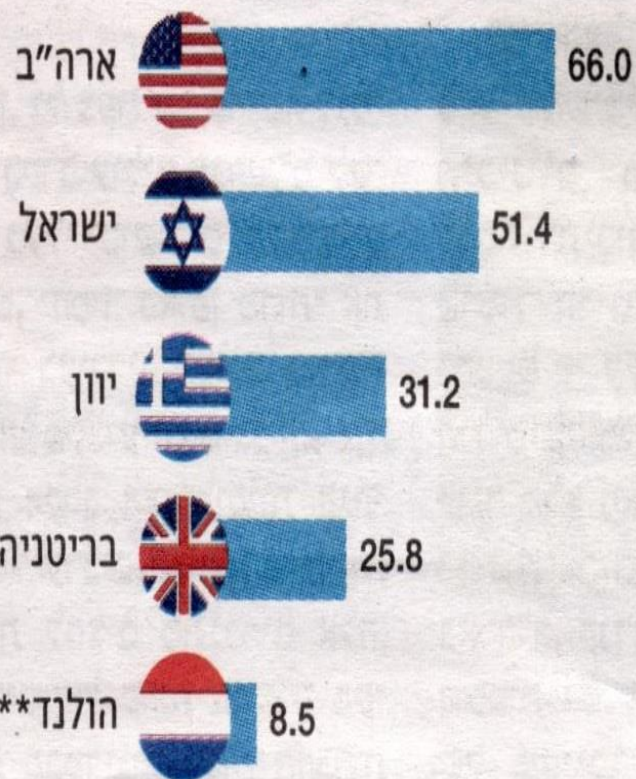
- ללימודים מקצועיים-טכנולוגיים בישראל יש תועלת נמוכה במיוחד במונחי שכר לעומת החברות בארגון המדינות המפותחות פחות מ-40% מבוגרי המכללות הטכנולוגיות בישראל זכאים לתעודת גמר וכ-60% מהם לא מצאו עבודה במקצוע שאותו למדו

פירוט: שכר בוגרי השכלה מקצועית בישראל, דו"ח מחקר המדינה מ-2008

לפי OECD, שכרם של בוגרי תוכנית בלבד, שכרם של בטלי

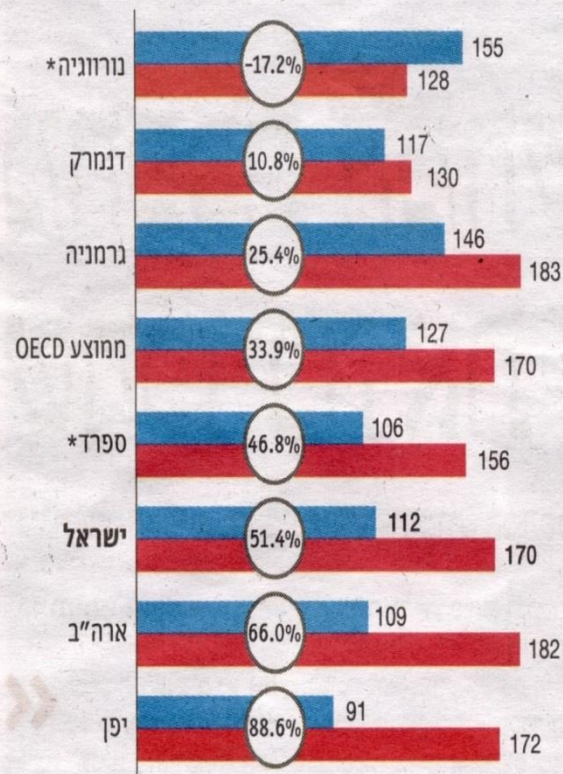
ליאור דטל

פער השכר בין אקדמאים לבעלי תעודה מקצועית, באחוזים*



פערי הכנסה גדולים

הכנסה יחסית של עובדים לפי סוג השכלה, נתוני 2012.
100 = הכנסה ממוצעת מתעסוקה של בעלי השכלה תיכונית



■ השכלה על תיכונית טכנולוגית ■ השכלה על תיכונית אקדמית
○ הפרד בין אקדמי לטכנולוגי

*נתוני 2011

למדעניות בישראל סיכוי נמוך פי 2.5 למצוא משרה אקדמית לעומת מדענים

על פי מחקר של האוניברסיטה העברית, נשים מתקשות להשתלב באקדמיה ורבות מהן חוששות מפגיעה בחייהן ובמשפחתן

ירדן סקופ

מיעוט נשים מרעניות בסגל האקדמי באוניברסיטאות הוא בעיה מוכרת בישראל ובעולם. מחקר חדש, שבחן נשים וגברים שסיימו בהצטיינות את לימודי הדוקטורט במדעים המדויקים, ניסה לבחון את סיכויי ההשתלבות של נשים בתחום ואת החסמים הגיצבים בפניהן. ממצא בולט מהמחקר הוא כי סיכויי של גבר להתקבל למשרה אקדמית בתחום המדעים גבוהים פי 2.5 בהשוואה לסיכוייה של אשה להתקבל למשרה דומה.

באמצעות מודל סטטיסטי שמשכלל גם את נתוני הרקע, כגון מוצא ההורים, המגדר ואת מעריכות התמיכה ומוסדות הלימוד, נייס לתאור את ההמשפיעים ביותר הם מגדר, גיל סיום הדוקטורט, רט, יציאה לפוסט דוקטורט בחו"ל ותמיכה מהמנחה. עוד עולה כי התמיכה מהמנחה חשובה יותר ממוצא ההורים בסיכויי החוקר להתקבל לפוסט דוקטורט.

פחות נשים יוצאות לפוסט־דוקטורט בחו"ל, בגלל המרחק מהמשפחה ומהחברים

המחקר, שהוזמן על ידי קרן יד הנדרי, נערך על ידי ר"ד ענת גופן, מבית הספר פדרמן למדיניות ציבורית באוניברסיטה העברית והוצג למשרד המדע. ממצאי המחקר מראים, בין היתר, כי בין השנים 1995-2005 חל גידול של 86% במספר מסיימי הדוקטורט במדעים

המדויקים – פיזיקה, כימיה, מדעי החיים, מדעי המחשב, הנדסה ומתמטיקה – וכן גידול של 43% במספר הנשים המסיימות דוקטורט בתארים אלו. רק 22.4% מכלל המסיימים בהצטיינות את התואר היו נשים.

במחקר של ר"ד גופן השתתפו נשים וגברים 215 בעלי תואר דוקטורט במדעים מדויקים שסיימו את לימודיהם בהצטיינות. מבין 215 המסיימים בהצטיינות שהשתתפו במחקר, 61% מהגברים הצליחו להימנע מקבלת משרת תחקיר אקדמית, לעומת 42.2% מהנשים.

ר"ד גופן מסבירה כי "יש באקדמיה מצב שנקרא 'צינור נוסף': בכל שלב משלבי הקריירה האקדמית, מספר הנשים קטן והולך. בחרנו בתחום המדעים המדויקים כי שם המצב חמור יותר".

במחקר זוהו מספר גורמים חיוניים לסיכויי הקבלה למשרה אקדמית בתקן (מסלול עם אפשרות לקביעות באוניברסיטה, י"ס) בתחום המדעים המדויקים. הגורם הראשון הוא גיל המועמד ופרק הזמן שנדרש להשלמת הדוקטורט. לפי המחקר, ככל שכתיבת הדוקטורט נפרשת על פני שנים מעטות יותר ומסתיימת מוקדם יותר, עולים הסיכויים להגיע למשרה אקדמית בתקן. חישובים שערכה גופן מגלים כי כל שנת גיל נוספת מורידה את הסיכויים למשרה אקדמית בכ-15%.

גורם נוסף שהתגלה כמסייע לקבלת משרה אקדמית, הוא השלמת פוסט־דוקטורט בחו"ל. על פי המחקר, רק 33% ממי שסיימו פוסט־דוקטורט בארץ התקבלו למי

השי האל ויצר רחב בסוג שיין שיין טבע וריפוי סיון ביצי ביט אם רבה כניל חי מ אומ מהמ יישו שבט במח בכת חשג השא תפק

אשה, אקדמאית, ישראלית



שרה אקדמית בתסו. לעומת 65% שרה אקדמית בתסו". אומרת גופו. למשרה. לעומת 19.6% מהנשים. הם צריכים לרסם את טעמם אכ-

מר- יסה 43% טר- ללל ואר תפו יוק- את 215 תפו לה- יעו- בא- טף! אק- ילה קים מים שרה שש- י"ס ורם

מהו ממוצע?

עוד מאמצי התקשורת

לפני מספר חודשים - בחדשות:

"יש משבר בתעשיית ההי-טק – נתנו דוגמא של חברה שעלתה ב-5000 אחוזים בשנה הקודמת והשנה עלתה רק ב-800 אחוז".

האם נראה לכם כי אכן זה מסמן משבר?

עוד מאמצי התקשורת

מתוך אתר וואלה, 14 לפברואר 2015

- **תחקיר: 90% מההרוגים בהפצצות בתים ב"צוק איתן" - אזרחים**

- לקראת פרסום דוח האו"ם על הפשעים שביצעה לכאורה ישראל במהלך הלחימה, סוכנות הידיעות אי-פי בחנה 247 הפצצות של מתחמים אזרחיים. 60% מההרוגים היו נשים, ילדים וקשישים.

- משרד החוץ: "ישראל לא ביצעה פשעי מלחמה"

- **דובר צהל (קול ישראל, 13 לפבואר):** דובר צהל הגיב כי אי אפשר להסיק מסקנות מתוך בדיקה של מספר קטן כל כך של הפצצות מתוך סך ההפצצות

מתוך המבחן בקורס זה בשנת 2013:

בישראל, לה כ- 8 מיליון תושבים, מדגם של 500 אנשים מספיק כדי לאמוד את שיעור התמיכה במפלגה גדולה, ברמת טעות נתונה (טעות של 2 אחוזים).

מה גודל המדגם הנדרש כדי להשיג אותה רמת טעות בארצות הברית (לה כ- 320 מיליון אנשים, פי ארבעים מאשר בישראל)?

מהעיתונות: בחירה של הסטטיסטיקה?

מחקר: מה מסוכן יותר - אלכוהול, גראס או קוקאין

הנה המחקר שיתמוך בליגליזציה של המריחואנה

נתונים האלו עשויים לגרום להרבה מדינות להתיר את עישון הגראס: מחקר בדק עד כמה קטלניים שבעה סמים פופולאריים, כולל אלכוהול וסיגריות. התוצאות המסקרנות מכל: גראס הוא הכי בטוח, אלכוהול קטלני פי 114 מהעשב הירוק. לחיים? לא בטוח

פורסם: 26.02.15, 10:29 YNET **ד"ר איתי גל**

חוקרים מטורונטו בקנדה ודרזדן בגרמניה מצאו כי המריחואנה מסוכנת הרבה פחות מאלכוהול, טבק ומכל סם אפשרי.

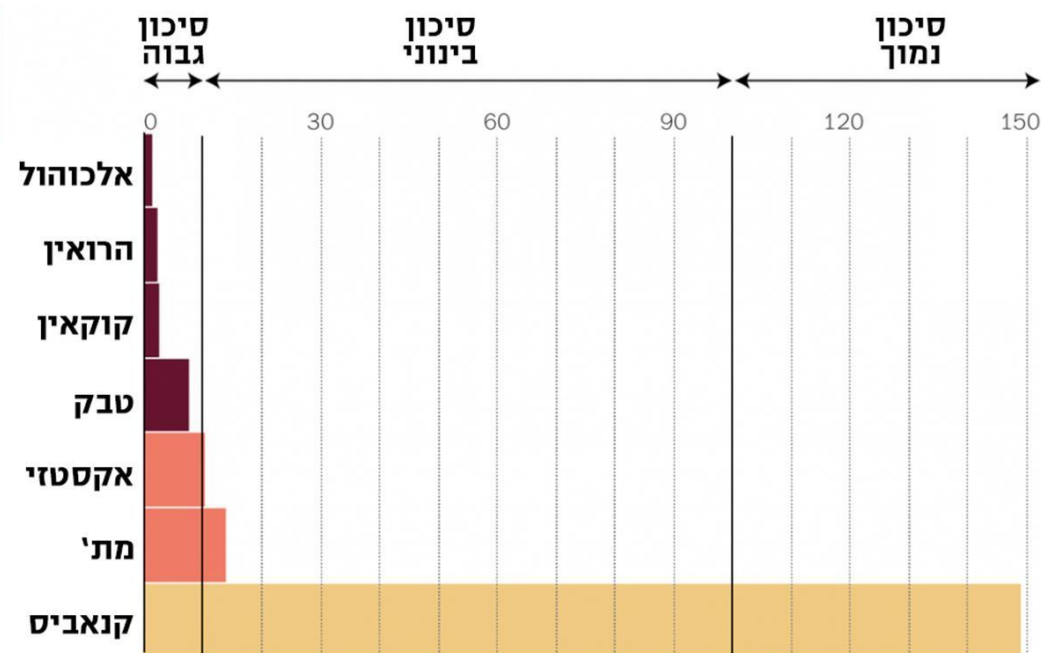
הממצאים פורסמו בגליון החדש של כתב העת המדעי

Scientific Reports

במחקר ביקשו המדענים לבחון עד כמה קטלניים שבעה סמים פופולריים בבני אדם. הממצאים הראו כי אלכוהול הוא הרעיל שבהם, כאשר הפער הוא הקטן ביותר בין חשיפה אליו למינון קטלני כלומר, די בכמות הקטנה ביותר של אלכוהול, בהשוואה לסמים אחרים, כדי להגיע למינון קטלני. מנגד, מריחואנה היא הסם שנפל אל קטגוריית "הסיכון הנמוך ביותר", כאשר הסם נמצא בסיכון נמוך פי 114 מאשר אלכוהול

הסמים האחרים שנבדקו במחקר, מהמסוכן פחות ועד לקטלני ביותר, כללו הרואין, קוקאין, טבק, אקסטזי, ומתמפתאמין (מת'). הממצאים התבססו על רמת הסיכון של הסם, ולא לקחו בחשבון גורמים נוספים. הקשורים בשימוש בסמים

היחס בין מנה לאדם מבוגר ורמת הרעילות של החומר



WASHINGTONPOST.COM/**WONKBLOG**

Source: "Comparative risk assessment of alcohol, tobacco, cannabis and other illicit drugs using the margin of exposure approach"

מהעיתונות

Unreliable research

Trouble at the lab

- **Scientists like to think of science as self-correcting.
To an alarming degree, it is not**

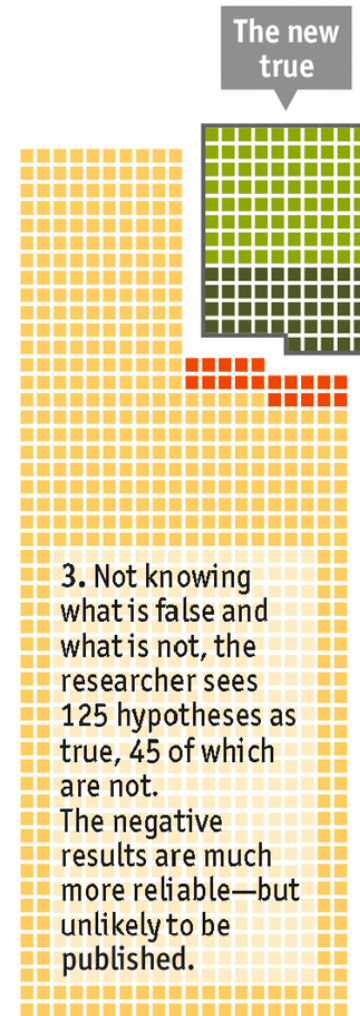
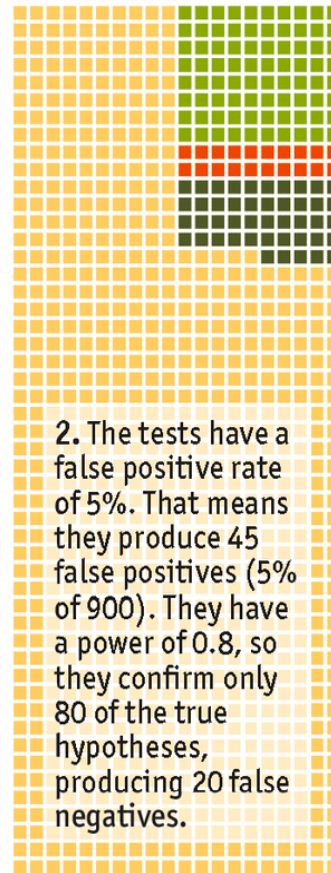
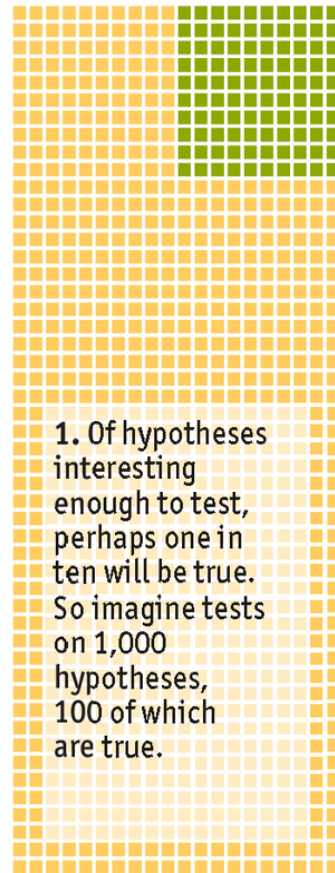
The Economist Oct 19th 2013

Enormous percentage (some say up to 90%) of results reported in the medical literature could not be verified by repeating the experiment.

Unlikely results

How a small proportion of false positives can prove very misleading

False True False negatives False positives



Source: *The Economist*

האם שפת המתמטיקה בהירה?

שולמית צרפתי

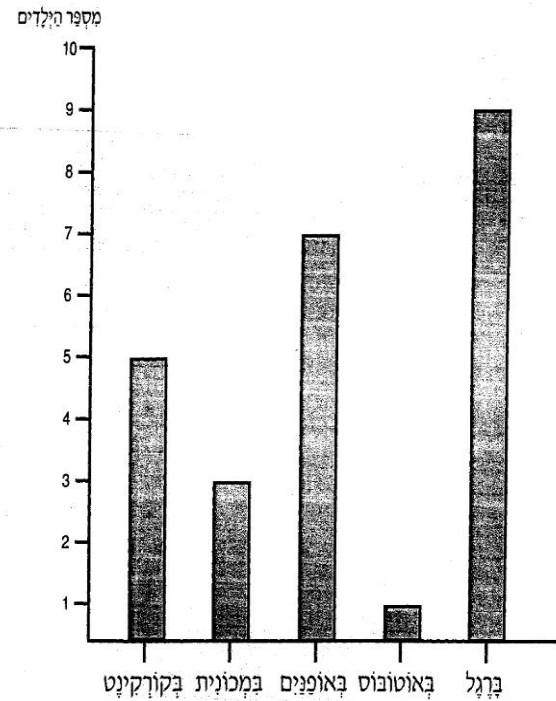
חושבים חשבון



למסיימי כיתות ב'

דיאגרמה

המורה שאלה את הילדים כיצד הם מגיעים לבית הספר בכל בקר.
היא אספה את תשובות הילדים ושרטטה דיאגרמה בהתאם.



כמה ילדים מגיעים לבית הספר במכונית?

כמה ילדים מגיעים לבית הספר בקורקינט ובאופניים?

איך מגיעים רב הילדים לבית הספר?

כמה ילדים מגיעים לבית הספר בכלי תחבורה קלשהו?

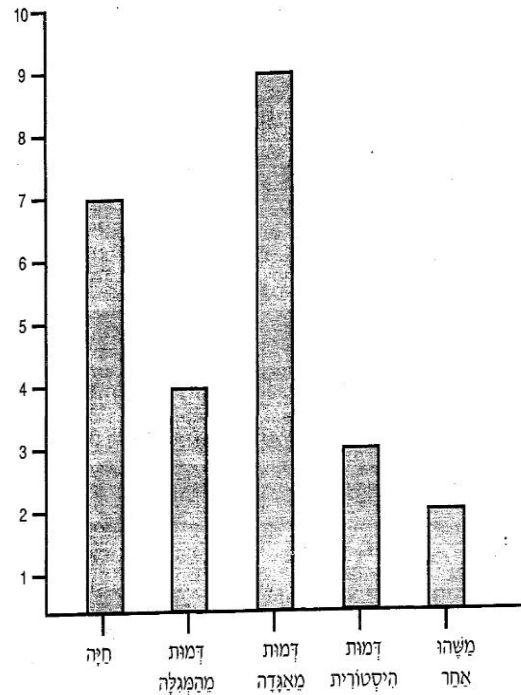
כמה ילדים יש בפתח בסך הכל?

דיאגרמה

הפונדק בדקה למה התחפשו הילדים בפורים.

היא שרטטה דיאגרמה מתאימה.

מספר הילדים



כמה ילדים התחפשו לחיות?

כמה ילדים התחפשו לדמות מאגדה או מהמגלה?

למה התחפשו רב הילדים?

גדי התחפש לאחשוורוש. כמה ילדים נוספים, חוץ ממנו, התחפשו לדמויות מהמגלה?

כמה ילדים יש בכתה בסך הכל?

דיאגראמה

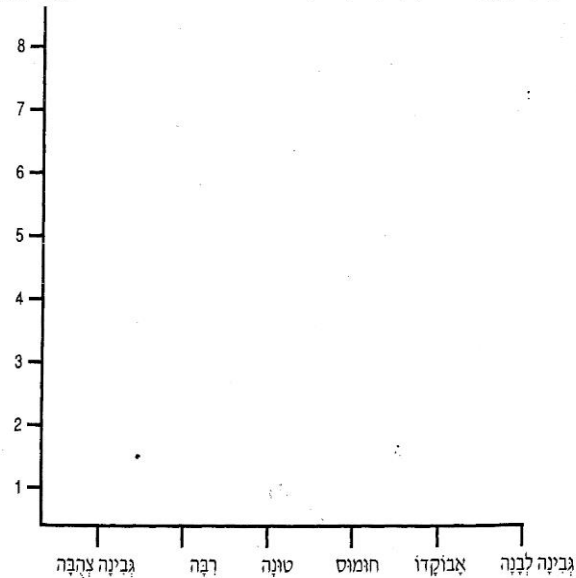
דניאלה שאָלע אַת הילדים איזע סנדוויצ'ים הם מעדיפים לאכל בטייל השנתי.
היא אספה אַת תשובות הילדים בטבלה הבאה:



מספר הילדים	סוג הסנדוויץ'
6	גבינה צהבה
3	רבה
2	טונה
8	חומוס
5	אבוקדו
4	גבינה לבנה

שרטטו דיאגראמה בהתאם לטבלה של דניאלה.

מספר הילדים



דיאגנאָזע

ה'תשנ"ו דיאגנאָזע שפּעצערדיקע קינדער ווערן ערשטאלט.

כמה ילדים אוהבים סנדוויץ' עם רבה? _____

כמה ילדים אוהבים סנדוויץ' עם גבינה כלשהי? _____

איזה ממרח רב הילדים אוהבים? _____

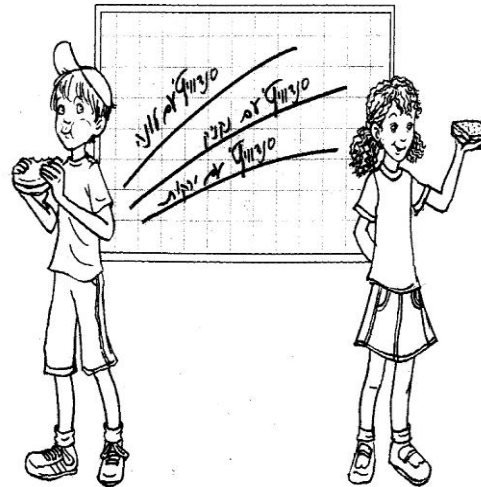
איזה ממרח רב הילדים לא אוהבים? _____

כמה ילדים לא בחרו סנדוויץ' עם אבוקדו? _____

מיכל בחרה סנדוויץ' עם רבה. כמה ילדים נוספים, חוץ ממנה, בחרו סנדוויץ' עם רבה?

כמה ילדים לא בחרו סנדוויץ' עם אבוקדו? _____

כמה ילדים יוצאים לטיול בסך הכל? _____



חבור וחיסור עד 30

פתרו את התרגילים הבאים.

עבדו רק את השטחים שבהם כתובות התוצאות וקבלתם
שימו לב, כל מספר יכול להופיע יותר מפעם אחת!

מה מסתתר בתמונה?

$$21 + \boxed{9} = 30$$

$$25 + \boxed{5} = 30$$

$$29 + \boxed{1} = 30$$

$$20 + \boxed{10} = 30$$

$$22 + \boxed{8} = 30$$

$$24 + \boxed{6} = 30$$

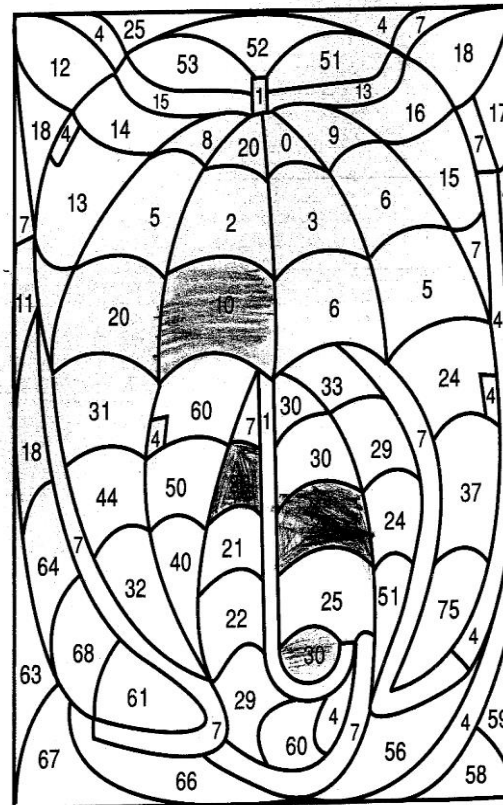
$$30 - \boxed{3} = 27$$

$$30 - \boxed{2} = 28$$

$$30 - \boxed{4} = 26$$

$$30 - \boxed{20} = 10$$

$$30 - \boxed{0} = 30$$



עוד על דיאגרמות

ב 19/12/2014 [פרסם מעריב](#) סקר בחירות חדש.. הצגה הגרפית של סקרן אין (כמעט) קשר בין גובה העמודות למספר המנדטים. הבולט מכולם היא ההחלטה להציג את יש עתיד (עם 10 מנדטים) בתור עמודה בגובה של 23 מנדטים. להלן התרשים:



התרשים הזה שופע עיוותים נוספים של קשר בין מספרים לעמודות:

סכום המנדטים שבגרף הוא 122 (במקום 120)
 יש עתיד (10) בגובה של העבודה (23), וגבוהה מהליכוד (21) והבית היהודי (16)
 כולנו (10) נמוכה מיש עתיד (10), אבל בגובה של הבית היהודי (16)
 רעם תעל (7) בגובה של חד"ש (5), אבל נמוכים ממרצ (7), וכולם נמוכים מיהדות התורה (7)
 ונמוכים בסידרי גודל מישראל ביתנו (8).
 הגובה של הסיפורה מספר המנדטים של אלי ישי גבוה מהמספר של ש"ס (למרות שהעמודות באותו הגובה)

מאמר מעניין

How to Display Data Badly

Howard Wainer

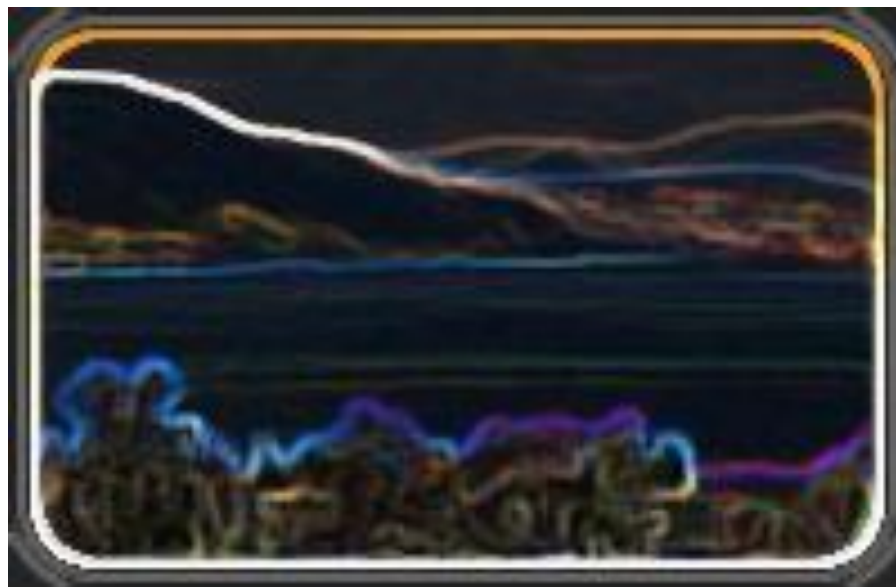
The American Statistician, Vol. 38, No. 2. (May, 1984), pp. 137-147.

על אינטואיציה והסתברות



הצפה בנתיבי איילון
צילום: נתן אלפרט
תאריך: 05/12/1991

ימת כינרת



פרופסור מהטכניון (1991):

יש 60 אחוז סיכוי כי תהיה הצפה. צריך נס מן השמיים שלא יהיו נזקים".

למה התכוון? האם מימוש של סיכוי של 40 אחוזים הוא נס?

דוגמא מהתכנית של ג'ון סטוארט:

מתנגדת של אובמה טענה כי הוא מוסלמי ויהפוך את ארצות הברית למדינה מוסלמית. כאשר שאל אותה המראיין מה הסיכויים לכך אמרה: "הסיכויים שארה"ב תהיה מדינה מוסלמית בתוך 40 שנה הם 75 אחוז".

מה פשר דבריה?

מה פירוש הסיכויים לגשם?

Berlin, Germany Weather

[Save This Location](#)

Updated: Mar 15, 2011, 3:45am Local Time

Overview	Hourly	Tomorrow	Weekend	5-Day	10-Day	Month	Map
Today Mar 15	Wed 16	Thu 17	Fri 18	Sat 19			
							
AM Showers	Cloudy	Showers	Rain / Snow Showers	Mostly Cloudy			
11°C High	10° High	7° High	7° High	9° High			
3° Low	2° Low	1° Low	1° Low	1° Low			
Chance of Rain: 40%	Chance of Precip: 20%	Chance of Rain: 50%	Chance of Precip: 30%	Chance of Precip: 10%			
Details	Details	Details	Details	Next 5 Days			

תחזית לחמישת הימים הבאים

[Customize Your Icons!](#)

שני	שלישי	רביעי	חמישי	שישי
				
0° C -7° C	2° C 0° C	2° C -1° C	4° C -1° C	3° C 0° C
עננים פזורים	סיכוי לשלג 20% סיכוי למשקעים	סיכוי לגשם 30% סיכוי למשקעים	סיכוי לשלג 20% סיכוי למשקעים	מעונן
Hourly	Hourly	Hourly	Hourly	Hourly
Today is forecast to be Much Warmer than yesterday.				

תחזית ממשכת



דצמבר 20, 2010 AM CET , מעודכן: 01:00



שני

°C רוח רגוע. רוח צוננת: -10 . °C עננים פזורים. מקס 0



שני בלילה

°C רוח צוננת: -12. (water equivalent of 2.08 mm) רוח רגוע. 30% סיכוי למשקעים. °C סיכוי לשלג. עננים פזורים. מינ-7



שלישי

(water equivalent of 0.28 mm) רוח רגוע. 20% סיכוי למשקעים. °C סיכוי לשלג. מעונן חלקית. מקס 2

Forecasts: 7-Day Forecast

My Location: Brussels, Belgium

Current Time: 09:16:50 AM CET

[Maps](#) | [More Weather](#)

7-Day Forecast [Updated: Dec 20 2010 / 08:05 AM CET]

Day		High Temp.	Low Temp.	Wind Speed/Dir.	Humidity	Comfort Level	UV Index	Precip. Probability	24hr. Precip. Total
Mon	 More clouds than sun. Chilly.	29°F	20°F	6 mph / ESE	87%	23°F	Minimal	10%	
Tue	 Snow flurries. Mostly cloudy. Cool.	34°F	20°F	7 mph / ESE	90%	28°F	Minimal	39%	0.98"
Wed	 Snow changing to an icy mix. Mostly cloudy. Cool.	35°F	30°F	14 mph / NE	92%	26°F	Minimal	44%	0.82"
Thu	 Snow changing to rain. Mostly cloudy. Cool.	37°F	33°F	11 mph / ESE	91%	29°F	Minimal	50%	0.21"
Fri	 Partly sunny. Cool.	38°F	35°F	13 mph / S	91%	30°F	Minimal	10%	
Sat	 More clouds than sun. Cool.	39°F	35°F	10 mph / S	90%	33°F	Minimal	10%	
Sun	 Afternoon clouds. Cool.	37°F	32°F	9 mph / SSW	85%	30°F	Minimal	20%	

משפטו של או גיי סימפסון



טענת ההגנה: מבין הבעלים שאיימו על נשותיהם כי ירצחו אותן
והאירוע טופל במשטרה, רק אחד מעשרים אכן ניסה יותר מאוחר
לרצוח את אשתו ופחות מאשר אחד ממאה אכן רצח אותה



הטעות

טענת ההגנה: מבין הבעלים שאיימו על נשותיהם כי ירצחו אותן והאירוע טופל במשטרה, רק אחד מעשרים אכן ניסה יותר מאוחר לרצוח את אשתו ורק אחד ממאה אכן רצח אותה

הבדיקה הנכונה: כמה מבין הנשים שגם נרצחו וגם הבעלים איימו עליהן ברצח, נרצחו על ידי בעליהן?

Let's make a deal

The Monty Hall Problem: בעיית מונטי הול



נניח שאתה במשחק טלוויזיה וניתנת לך האפשרות לבחור בדלת אחת מתוך שלוש. מאחורי אחת הדלתות מכונית פאר, מאחורי שתי האחרות - עיזים. אתה בוחר דלת, נניח מספר 1. לפני שהדלת נפתחת, המגיש, שיודע מה נמצא מאחורי כל דלת, פותח את אחת מהדלתות האחרות, נניח דלת מספר 2, ומאחוריה עז. הוא אומר לך "אני מאפשר לך לשנות את הבחירה שלך עכשיו. האם אתה נשאר עם הבחירה שלך או רוצה לשנות אותה לדלת מספר 3?" מה כדאי לעשות?

The Monty Hall Problem:

בעיית מונטי הול



נניח שאתה במשחק טלוויזיה וניתנת לך האפשרות לבחור בדלת אחת מתוך ארבע. מאחורי אחת הדלתות מכונית פאר, מאחורי שלוש האחרות - עיזים. אתה בוחר דלת, נניח מספר 1. לפני שהדלת נפתחת, המגיש, שיודע מה נמצא מאחורי כל דלת, פותח את אחת מהדלתות האחרות, נניח דלת מספר 2, ומאחוריה עז. הוא אומר לך "אני מאפשר לך לשנות את הבחירה שלך עכשיו. האם אתה נשאר עם הבחירה שלך או רוצה לשנות אותה לדלת מספר 3 או ל דלת מספר ארבע?" מה כדאי לעשות?

12. SCIENCE

*Lord Rees, president
of the Royal Society*

a) You're on a game-show, with a chance to win a second home.

You have to choose one of three doors.

Behind one is a second home, behind the other two, duck houses. You choose a door, but before it is opened, the game-show host opens one of the other doors to reveal a duck house.

You now have the opportunity to change the door you choose. Should you change or should you stick with the door that you originally picked?

b) What would you do if you needed scientific advice?

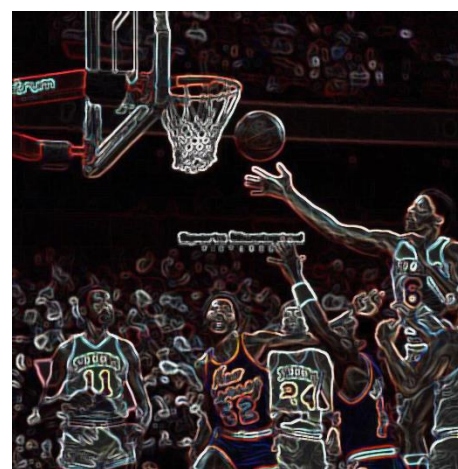
מה דרוש כדי להיות ראש
ממשלה?

שאלתו של נשיא האקדמיה
המלכותית

Financial Times
Weekend Magazine
November 14/15 2009

12a) Imagine that the second home is behind the first of the three doors. Before the host opens one of the others, you have a 1 in 3 chance of picking the right door. Now consider the options once the host has opened a door and revealed the duck house. Suppose you have picked the first door, which is the right one – switching would be the wrong choice. Suppose you have picked the second, then the host opens the third door – switching would be the right choice. Now suppose you have picked the third, then the host opens the second door – switching would again be the right choice. Therefore, switching would be the right choice two out of three times, and changing from whichever door you originally chose will improve your chances of winning the second home.

אילוזיה מנטלית: האם יש יד חמה בכדורסל?



תרגיל

זורקים קובייה באופן אקראי.
מה הסיכוי שהתוצאה תהיה 5?



תרגיל

זורקים קובייה באופן אקראי.
מה הסיכוי שהתוצאה תהיה מספר זוגי?



מהיכן באות ההסתברויות?

מהיכן מגיעה האקראיות, מה קובע את ההסתברויות?

לא מוכר בטבע כל מנגנון שמייצר מאורע אקראי

היחס לאי ודאות

בחר בין

הצעה 1:

3.000	בוודאות
-------	---------

לבין

הצעה 2:

4.000	בהסתברות 0.80
0	בהסתברות 0.20

לבין

בחר בין

הצעה 4:

הצעה 3:

0.80	בהסתברות	0
0.20	בהסתברות	4.000

0.75	בהסתברות	0
0.25	בהסתברות	3.000

בחר בין

לבין

הצעה X:

הצעה Y:

0.75	בהסתברות	A
0.25	בהסתברות	B

0.75	בהסתברות	A
0.25	בהסתברות	C

כאשר נתון ש- C יותר טוב מאשר- B

הצעה 1:

בוודאות	3.000
---------	-------

הצעה 2:

בהסתברות	0.80	4.000
בהסתברות	0.20	0

הצעה 3:

בהסתברות	0.75	0
בהסתברות	0.25	3.000

הצעה 4:

בהסתברות	0.80	0
בהסתברות	0.20	4.000

הצעה 3 היא:	0.75	הצעה 1 ועוד	0.25	לקבל	0
הצעה 4 היא:	0.75	הצעה 2 ועוד	0.25	לקבל	0

מי שמעדיף הצעה 1 על הצעה 2 צריך להעדיף הצעה 3 על הצעה 4 ולהיפך.

הפרדוקס של אלאיס (Allais)



מוריס אלאיס

נ. 1911

Maurice Allais

נובל 1988

מתי הסיכוי גדול יותר?

מה הסיכוי שבשנת 2018 רוסיה תנתק את היחסים
עם ארצות הברית?

מה הסיכוי שבשנת 2018 רוסיה תתעמת עם אוקראינה,
ארצות הברית תתערב לטובת אוקראינה ובעקבות כך
רוסיה תנתק את היחסים עם ארצות הברית?

**מהיכן הפער שבין האינטואיציה לבין המתמטיקה?
מעט על ההיסטוריה של אקראיות והסתברות**

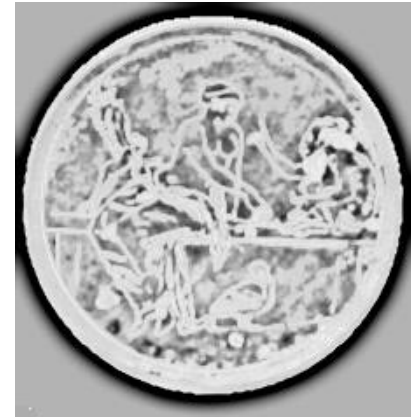
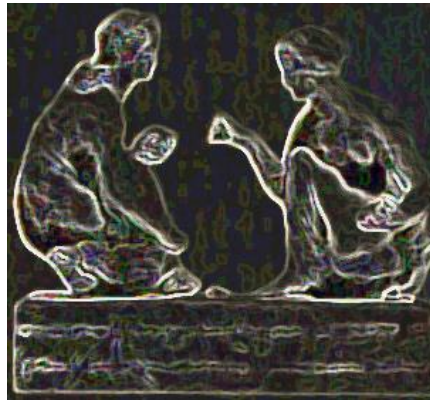
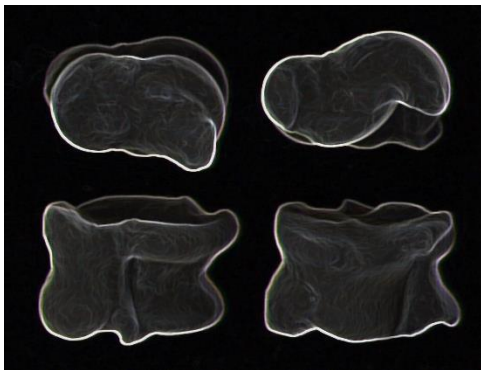
Black-capped Chickadee

ירגזי שחור-כיפה



אקראיות בתקופה העתיקה

משחקי מזל בתקופה העתיקה



משחקי מזל אסורים בתנ"ך

דברים י"ח פסוקים י', י"א

הַגִּוִּיִּם הָהֵם: לֹא־יִמָּצֵא בָךְ מַעֲבִיר בְּנוֹ-וּבִתּוֹ בָּאֵשׁ קֶסֶם קֶסָמִים ¹⁰
מְעִיגָן וּמִנְחָשׁ וּמִכִּשְׁתָּה: וְחֹבֶר חֹבֶר וְשֹׂאֵל אוֹב וַיִּדְעֵנִי וְדֹרֵשׁ אֵל- ¹¹
¹² הַמֵּתִים: כִּי־תוֹעֵבֶת יִהְיֶה כָּל־עֲשֵׂה אֵלֶּה וּבְגִלָּל הַתּוֹעֵבֶת הָאֵלֶּה

שימוש בהגרלות בתנ"ך: מכשיר להשגת צדק

13	מְשִׁיב דָּבָר בְּטָרֶם יִשְׁמַע אֲנֹלֶת הוּא־לּוֹ וּכְלָמָה:
14	רוּחַ־אִישׁ יְכַלְכֵּל מַחֲלֹהוּ וְרוּחַ נְבִיאָה מִי יִשְׁאַנָּה:
15	לֵב גִּבּוֹן יִקְנֶה־דַּעַת וְאֵזֶן חֲכָמִים תִּבְקֶשׁ־דַּעַת:
16	מִתֵּן אָדָם יִרְחִיב לּוֹ וּלְפָנָי גְּדִלִים יִנְחֶנּוּ:
17	צַדִּיק הָרֹאשׁוֹן בְּרִיבוֹ יִבְאֲרֶעְהוּ וַחֲקָרוֹ:
18	מְדִינִים יִשְׁבִּית הַגּוֹרֵל וּבֵין עֲצוּמִים יִפְרִיד:

מְדִינִים יִשְׁבִּית הַגּוֹרֵל
וּבֵין עֲצוּמִים יִפְרִיד:

18

משלי י"ח פסוק י"ח

שימוש בהגרלות בתורה: התנחלות

והתנחלתם את־הָאָרֶץ בְּגוּרָל לְמִשְׁפְּחֹתֵיכֶם לְרֹב
תָּרְבוֹ אֶת־נַחֲלָתוֹ וְלִמְעַט תִּמְעִיט אֶת־נַחֲלָתוֹ אֵל־אֲשֶׁר־יֵצֵא לוֹ
55 שָׁמָּה הַגּוּרָל לוֹ יִהְיֶה לְמִשּׁוֹת אֲבֹתֵיכֶם תִּתְנַחֲלוּ:

במדבר ל"ג פסוק נ"ה

וַיֵּצֵא

מֹשֶׁה אֶת־בְּנֵי יִשְׂרָאֵל לֵאמֹר זֹאת הָאָרֶץ אֲשֶׁר תִּתְנַחֲלוּ אֹתָהּ בְּגוּרָל
אֲשֶׁר צִוָּה יְהוָה לָתֵת לְתַשְׁעַת הַמִּשּׁוֹת וְחֲצֵי הַמִּשָּׁה: כִּי לָקְחוּ מִשָּׁה 14

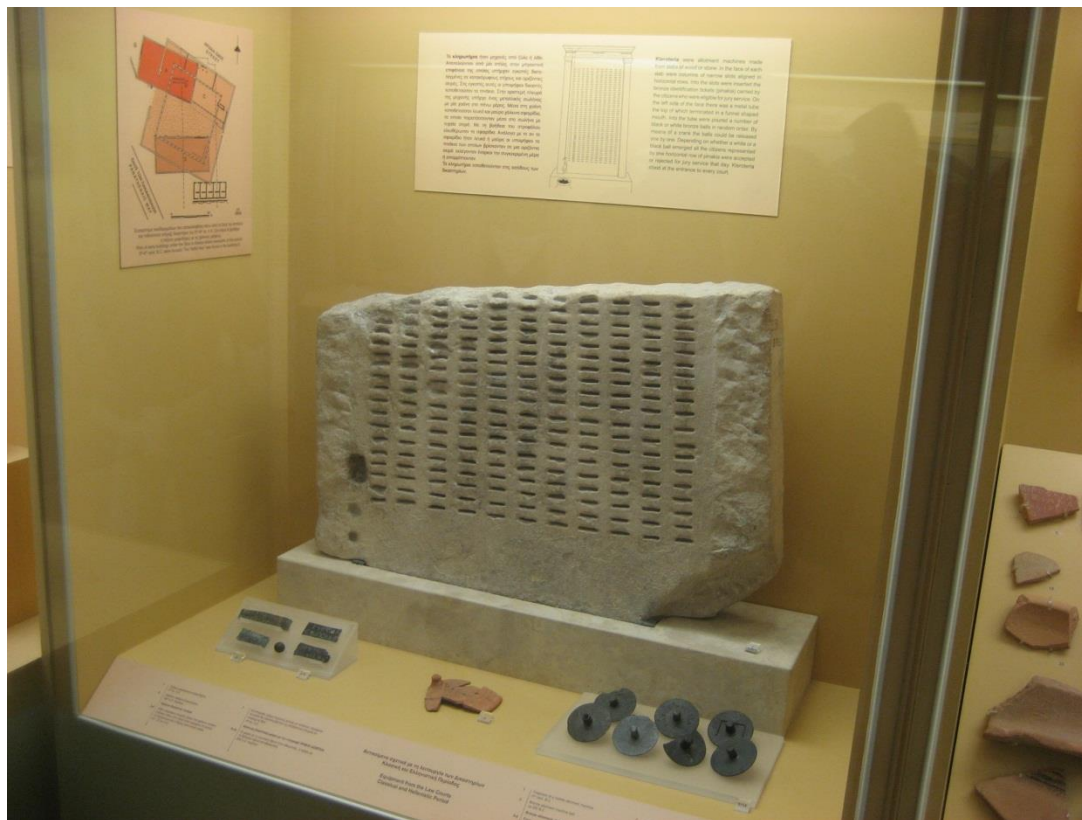
במדבר ל"ד פסוק י"ג

יחס להסתברויות במשנה

מסכת תרומות פרק ה

ה,ה סאה תרומה שנפלה למאה, הגביהה ונפלה למקום אחר--
רבי אליעזר אומר, מדמעת כתרומה ודאי; וחכמים אומרים,
אינה מדמעת אלא לפי חשבון.

שימוש בהגרלות בתקופה העתיקה



במה עוסקת המתמטיקה של תורת ההסתברות והסטטיסטיקה?

שני פנים לאי ודאות

- פעולות אקראיות החוזרות על עצמן עם חוקיות סטטיסטית.
- אי ודאות, הערכה (סובייקטיבית?) לסיכוי שיקרה משהו.
- פן נוסף שימוש באי ודאות:
שימוש בהגרלה כמכשיר החלטה להכרעה הוגנת בין כמה אפשרויות

הסיבות לתחילה של מתמטיקה של הסתברות וסטטיסטיקה המאה ה-17

- ניסיונות להבנת הימורים
- נפילות בענף הקצבאות
- אי ודאות בנושאים משפטיים

לוקה פקיולי 1446 – 1517



"המשחק הבלתי גמור"
מתוך:

"הכול אודות אריתמטיקה, אלגברה ופרופורציות", 1494

חליפת המכתבים בין פסקל ופרמה - 1654

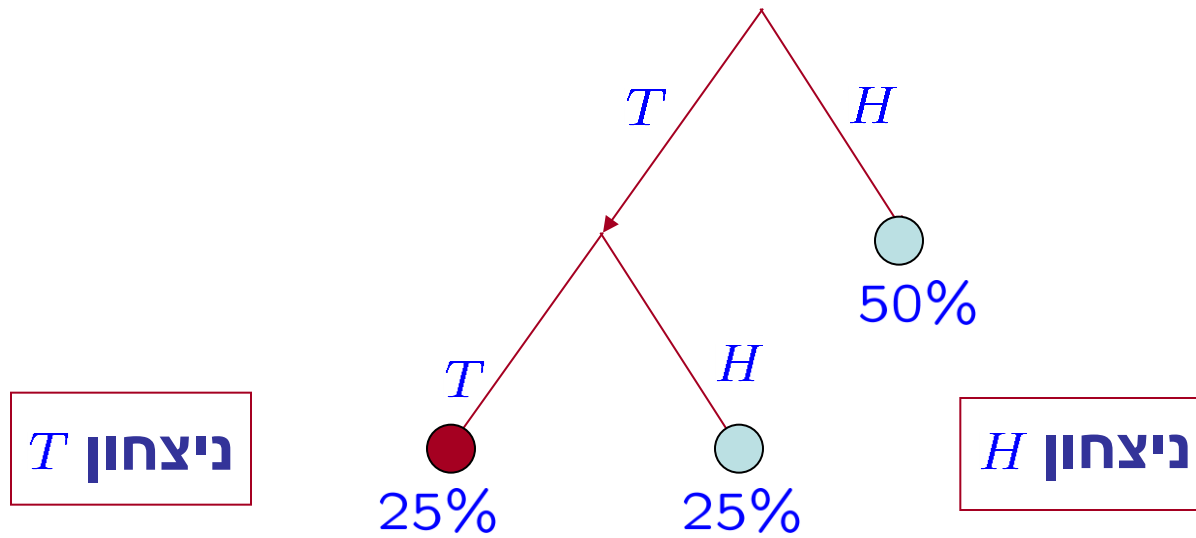


דוגמא לבעיה שנידונה במכתבים: סכום כסף ניתן לחלוקה בין שני צדדים. הם מחליטים כי יזרקו מטבע חמש פעמים. אם H ייפול יותר פעמים מאשר T צד א' יקבל את כל הסכום, אחרת, כלומר T ייפול יותר פעמים מאשר H , צד ב' יקבל את כל הסכום. אחרי שלוש הטלות שמהן שתיים יצאו על H ואחת על T המשחק הופסק. איך יהיה הוגן לחלק את הסכום לאור תוצאה זו?

פתרון במונחים של היום:

בהפסקת המשחק: HH T

המשכים אפשריים



בלייז פסקל 1662 – 1623



ההימור של פסקל

$X\%$	$(1-X)\%$	
יש אלוהים	אין אלוהים	מאמין
נהנה לעד בגן עדן	קשה לי, דרגה $-N$	לא מאמין
סובל לעד בגיהנום	קל לי, דרגה N	

גייקוב-גיימס ברנולי 1705 – 1654 Jacob-James Bernoulli



החוק החזק של המספרים הגדולים

ככל שמבצעים יותר ניסיונות, הממוצעים של יותר ויותר סדרות של הטלות קרובים לממוצע התיאורטי של הזכייה

הטעות של המהמר:

המשפט:

ככל שמבצעים יותר ניסיונות, **הממוצעים** של יותר ויותר סדרות של הטלות קרובים לממוצע התיאורטי של הזכייה

אבל:

הסטיות מהממוצע יכולות להיות גבוהות מאוד – למעלה מהיכולת של המהמר המצוי

קרל פירסון 1857 – 1936 Karl Pearson



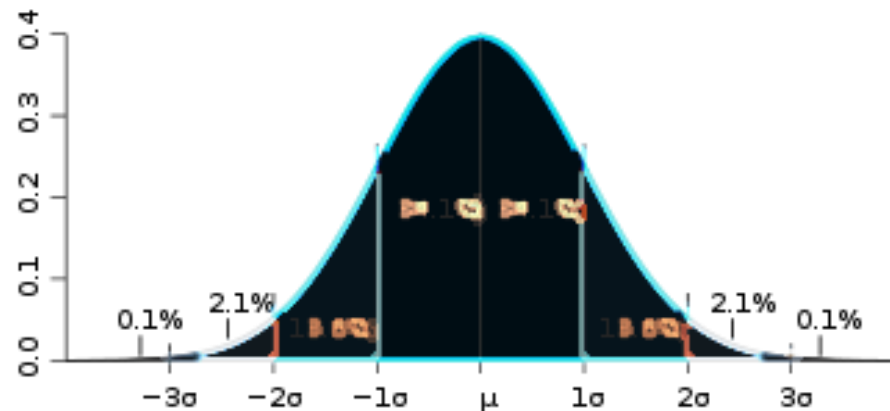
בצע 24000 זריקות מטבע מהן יצאו 12012 הטלות על "ראש"

משפט הגבול המרכזי

משפט הגבול המרכזי – שאיפה להתפלגות נורמלית (גאוסית)



חלוקה בשורש מספר
הנסיונות מובילה
להתפלגות גאוסית



חישובי הסתברויות על סמך אינפורמציה נתונה

תומס בייס 1702 – 1761 Thomas Bayes



פרסם שני מאמרים:

Attempt to Prove That the Principal End of the Divine Providence and Government is the Happiness of His Creatures

An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst

פרסם שני מאמרים.

אבל ידוע בעיקר כמנסח של חוקי ההסתברות של הסקה של
הסתברויות מתוצאות נתונות – חוקי בייס

חוק בייס – דוגמא

ניתנות שלוש קופסאות. באחת (A) שתי מטבעות כסף, בשנייה (B) שתי מטבעות זהב בשלישית (C) מטבע זהב ומטבע כסף



A



C



B

חישובי הסתברות ישירים:

. אחת הקופסאות נבחרת באופן מקרי. מה הסיכוי שתצא מטבע כסף?



חישוב: אם A נבחרה הסיכוי 100 אחוז

אם B נבחרה הסיכוי 50 אחוז

אם C נבחרה הסיכוי 0 אחוזים

$$\frac{1}{3}100 + \frac{1}{3}50 + \frac{1}{3}0 = 50 \quad \% \quad \text{סה"כ"}$$

חישובי הסתברות הפוכים:



אחת הקופסאות נבחרת באופן מקרי. מתוכה נבחרת באופן מקרי מטבע כסף. מה הסיכוי שהקופסה שנבחרה A ?

חישובי הסתברות הפוכים:



אחת הקופסאות נבחרת באופן מקרי. מתוכה נבחרת באופן מקרי מטבע כסף. מה הסיכוי שהקופסה שנבחרה A ?

חישוב: הסיכוי שמטבע כסף נבחרה מורכב מ- $\frac{1}{3}100\%$
שקופסה A נבחרה ו- $\frac{1}{3}50\%$ שהקופסה B נבחרה
סה"כ מתוך הסיכוי שמטבע כסף יצאה תופס הסיכוי ש- A
נבחרה, מתוך כלל האפשרויות, $\frac{2}{3}$

חוק בייס – נוסחה/הסבר

אם אתה רוצה לדעת מהי ההסתברות שמאורע X התרחש כאשר ידוע לך כי מאורע Y התקיים: תבדוק מהו חלק ההסתברות ש- X הביא לכך ש- Y מתקיים, מתוך כלל ההסתברויות שהביאו לכך ש- Y מתקיים

ג'ורג בול 1815 – 1864 George Boole



טען שהדרך הלוגית לנתח הסתברויות היא לראות מה הסתברות של קבוצות של אפשרויות

הקבוצות עצמן כפופות לחוקים לוגיים של איחוד, חיתוך, וכדומה – האלגברה הבוליאנית

George Boole “no general method for the solution of questions in the theory of probabilities can be established which does not explicitly recognize ... those universal laws of thought which are the basis of all reasoning”

מהיכן באות ההסתברויות?

מהיכן מגיעה האקראיות, מה קובע את ההסתברויות?

לא מוכר בטבע כל מנגנון שמייצר מאורע אקראי

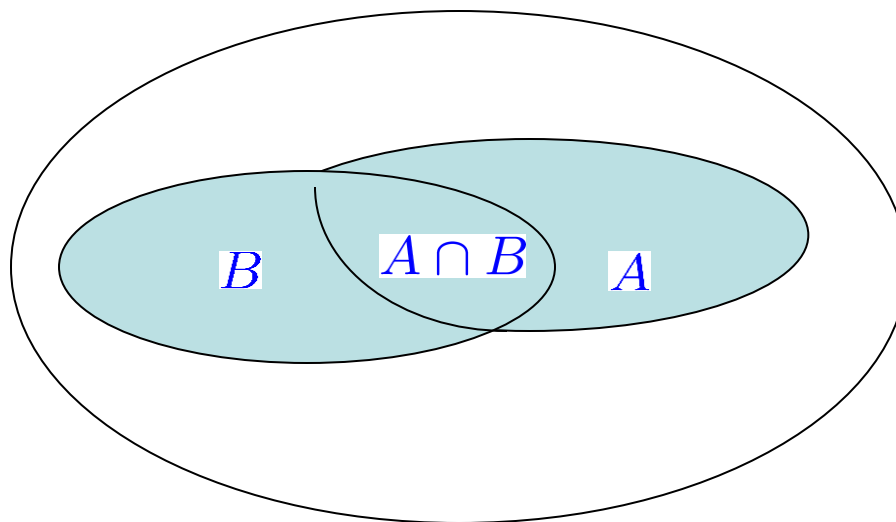
ואז הגיע קולמוגורוב

אנדריי ניקולאיביץ קולמוגורוב
1984 – 1903
Andrey Nikolaevich Kolmogorov



(בין השאר) אקסיומטיזציה של מושג ההסתברות

מרחב המדגם



ההסתברויות נתונות:

$$P(B) \quad P(A) \quad P(A \cap B)$$

מהיכן מגיע מרחב המדגם?
צריך או לזהות אותו או לבנות אותו

מהיכן נוצרות ההסתברויות?
אלה אקסיומות !

מעניין:

בערוב ימיו זנח קולמוגורוב את "מרחב המדגם" כמושג בסיסי
והחל לפתח הסתברות וסטטיסטיקה רק בעזרת סדרות של
ניסיונות חוזרים.

סטטיסטיקה והסתברות בפעולה: הבעיות

נזכיר:

הדואליות של אי ודאות

- פעולות אקראיות החוזרות על עצמן עם חוקיות סטטיסטית.
- אי ודאות, הערכה (סובייקטיבית?) לסיכוי שיקרה משהו.
- פן נוסף: שימוש בהגרלה כמכשיר החלטה, למשל, להכרעה הוגנת בין כמה אפשרויות.

הסיבות לתחילה של מתמטיקה של הסתברות וסטטיסטיקה

- ניתוח של קצבאות
- התפתחות ההימורים
- אי ודאות בנושאים משפטיים

מצב העניינים היום:

פעולות אקראיות החוזרות על עצמן עם חוקיות סטטיסטית
דגימות
ניתוח של קצבאות
הימורים
שוק המניות (משוואות בלק-שולס)
שימוש בבתי משפט

המתמטיקה בסדר – החיים לא תמיד מסתדרים בהתאם

דגימות, סקרי דעת קהל

דוגמא מהחיים:

בכיתה של הבן שלי כאשר היה בכיתה אלף בקשה המורה שיביאו משלוח מנות וכל ילד ייתן את מנותיו לילד אחר שיבחר באופן מקרי. להפתעתה היו ילדים שלא קבלו.

האם הייתה צריכה לצפות כי כל הילדים יקבלו משלוח מנות? מה הסיכויים שכל הילדים יקבלו משלוח מנות בשיטת חלוקה כזו? מה המשמעות של מה הסיכויים?

דגימות, סקרי דעת קהל

במלחמת המפרץ הראשונה בארצות הברית שלחו ילדים מכתבים לחיילים בחזית. חייל אחד קיבל את המכתב שאחותו שלחה. העיתונות האמריקאית עשתה מזה רעש גדול.

האם הרעש מוצדק?

מדוע סקרי בחירות נכשלים?

הדגימה מבוצעת תוך קיצורים וחסכונות
פונים למי שקל לפנות אליו
אין אי תלות
סתם מרמים

לסוקרים יש קונספציה משלהם

סטטיסטיקה והסתברות במשפט

סיפור מהחיים:

נהג החנה רכבו במקום שמותר לחנות רק שעה אחת.
הפקח מסמן את "השעות" אליה מכוונים הונטילים של הגלגלים ליד
המדרכה. לאחר ארבע שעות חזר וראה כי "השעות" האלה זהות.
הנהג טען בבית המשפט כי במקרה חזר לאותו מקום והגלגלים היו
באותו מצב.

מה על השופט לעשות?

סיטואציות דומות

טעויות דומות מופיעות בחיי יום יום

נזכיר

כל תרומת דם נבדקת שמא הדם נגוע ב-HIV או בצהבת. הבדיקה אמינה בדרגה של 99.5 אחוזים (בשני הכיוונים).
תורם מסוים נבדק והבדיקה יצאה חיובית – הראתה שהתורם נגוע ב-HIV.

השאלה: מה סיכויים שהתורם אכן נגוע?

נזכיר: אם אתה רוצה לדעת מהי ההסתברות שמאורע A התרחש כאשר ידוע לך כי מאורע B התקיים: תבדוק מהי חלק ההסתברות ש- A הביא לכך ש- B מתקיים, מתוך כלל ההסתברויות שהביאו לכך ש- B מתקיים

הבדיקה הנכונה: למצוא את שיעור חולי ה-HIV באוכלוסיה, נניח רבע אחוז. ואז החשבון הוא:

$$\frac{99.5 \times 0.25}{99.5 \times 0.25 + 0.5 \times 99.75} = 0.33$$



RECKONING WITH **RISK**

GERD GIGERENZER



LEARNING TO LIVE
WITH UNCERTAINTY

'Gigerenzer is brilliant and
his topic is fabulous'

STEVEN PINKER

סיכום: לרוב אין מספיק אינפורמציה כדי
להגיע לתשובה מוסמכת וקשה לאתר
מה האינפורמציה הדרושה, וכאשר יש
אינפורמציה קשה לקבוע מה רלבנטי

הגרלה כמכשיר להגינות בהחלטות

בתנ"ך

בחירת מושבעים:

ביוון העתיקה

בארצות הברית

גיוס לצבא:

בממלכה האוסטרו-הונגרית 1889

בארצות הברית, 1914, 1970, 1971

הגרלה כמכשיר לגיוס הוגן לצבא ארצות הברית

1914: הגרלה בין כל המועמדים (נערכה בכל מחוז ומחוז לחוד)

1970: הגרלה לפי תאריך לידה. התאריכים הוגרלו על ידי הוצאת פתקים ממיכל

1971: הגרלה לפי תאריכי לידה. רשות הסטטיסטיקה הממשלתית סיפקה 25 סדרות אקראיות, והסדרה הקובעת נבחרה על ידי הוצאת פתק ממיכל.

האם הגיוס ב- 1970 היה הוגן?

Month	Average number
January	201.2
February	203.0
March	225.8
April	203.7
May	208.0
June	195.7
July	181.5
August	173.5
September	157.3
October	182.5
November	148.7
December	121.5

