# על"ה 22

## עלון למורה המתמטיקה

עורכות: אנה ספרד
חנה פרל

מאי 1998
אייר תשנ"ח

**האוניברסיטה העברית בירושלים - המרכז להוראת המדעים**

יוצא לאור ביוזמתו של המרכז הישראלי לחינוך מדעי - טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט
מיסודם של משרד החינוך, התרבות והספורט, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

# הסתברות מותנית כמקור לפרדוקסים ותוצאות מפתיעות

**אלכס קופרמן**
אוניברסיטת חיפה

## מבוא

חשיבה מתמטית היא אמצעי חשוב לגילוי העולם. אפשר לחלק אותה לשלושה סוגים עיקריים: חשיבה אנליטית, חשיבה גיאומטרית וחשיבה הסתברותית. לימוד חוקי ההסתברות עשוי להשפיע בצורה חיובית על ההתייחסות של האדם ל'**אקראיות הבלתי נסבלת של הקיום**'. הבנת חוקים אלה משרה ביטחון עצמי ומאפשרת להבין כי חלק מהכישלונות אינו נובע מ'**חוסר מזל**' או מסיבות מיסטיות אחרות, אלא מטבען האקראי של תופעות רבות. על-ידי-כך, תופעות שנראו מסתוריות ופרדוקסליות זוכות להסבר רציונלי ובכך מאפשרות ללומד להתמודד טוב יותר עם תופעות אקראיות ומצבי אי-ודאות.

תורת ההסתברות טומנת בחובה פרדוקסים רבים, שלכאורה עומדים בסתירה להגיון הטבעי. הצגתם מפתיעה, משעשעת, לעתים מרגיזה, ומעוררת חשיבה.

אכן, כפי שמובשוביץ-הדר וקליינר (1996) ציינו:

> 'פרדוקסים יכולים למלא תפקיד שימושי גם בכיתה. את המבוכה וחוסר הביטחון הזמניים שהם עשויים לגרום לתלמידים אפשר לנצל לטובה. מצבים של קונפליקט ושל חוסר נוחות הם כלים פדגוגיים רבי-תועלת (בתנאי, כמובן, שהם מטופלים). הם יכולים לסייע בטיפוח של גישה בלתי תבוסתנית למצב של "אני תקוע", הם יכולים לספק לתלמידים הזדמנות לויכוח ולבירור של מחלוקות בנושאים מתמטיים, לקדם את ההכרה שלהם בכך שפעמים רבות זוהי הדרך שבה מתפתחת המתמטיקה.'

במאמר זה נציג מספר בעיות הקשורות בהסתברות מותנית.

תחילה נזכיר מספר הגדרות ותוצאות.

(*) תודתי נתונה לגברת קלרה זיסקין על עזרתה בהכנת חומר זה.

**הגדרה 1**

אם A ו-B הם שני מאורעות במרחב התוצאות $\Omega$, ההסתברות

שהמאורע A יתרחש כאשר ידוע מראש שהמאורע B התרחש, מסומנת על-ידי $P(A|B)$ ונקראת ההסתברות המותנית. כידוע, עבור $P(B)>0$:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

**הגדרה 2**

שני מאורעות A ו-B נקראים **בלתי תלויים** אם $P(A|B)=P(A)$, $P(B|A)=P(B)$. במקרה שהמאורעות A ו-B בלתי תלויים, מתקיים:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

### בנים ובנות

נתון שההסתברות להולדת בן שווה ל-0.5. במשפחה מסוימת שלושה ילדים. בכניסה לדירתם אנו פוגשים שתי בנות השייכות למשפחה זו.

מהי ההסתברות שהילד הנוסף יהיה בן?

**פתרון**

תלמידים רבים משוכנעים שהתשובה הנכונה היא 0.5. ההסבר שלהם הוא, שמטעמי הסימטריה, הסיכויים שהילד הנוסף יהיה בן או בת שווים זה לזה. כדי להשיב על השאלה, נסמן ילד ממין זכר בספרה '1', וממין נקבה נסמן ב-'0'. בעזרת סימנים אלה נוכל לרשום שמונה מספרים תלת-ספרתיים המתארים את כל המצבים האפשריים במשפחה בת שלושה ילדים:

$$\Omega=\{000,100,010,001,110,101,011,111\}$$

למשל הסידור '011' מסמן כי בהתחלה נולדה בת ואחריה בן ושוב בן.

נסמן ב-A את המאורע '**במשפחה יש בדיוק בן אחד**'
נסמן ב-B את המאורע '**במשפחה יש לפחות שתי בנות**'
צריך לחשב את ההסתברות המותנית $P(A|B)$.

נתון ש- $P(B)=\frac{4}{8}$ ו- $P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

ולכן $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{3}{4}$

אפשר להגיע לתוצאה זו גם באופן ישיר. היות שידוע מראש שבמשפחה יש לפחות שתי בנות, הרי שמרחב התוצאות מורכב מ-4 תוצאות בלבד: {000, 100, 010, 001}.

המאורע A מורכב מ-3 התוצאות: A={100, 010, 001} ולכן ההסתברות שווה ל- $\frac{3}{4}$.

כעת, נניח שאנו רואים מעבר לדלת לול ובתוכו דמות של תינוק (בן או בת). מהי ההסתברות שבמשפחה זו יש בדיוק בן אחד?

לכאורה נראה שהתשובה היא $\frac{3}{4}$, אך נשים לב כי הפעם אנו יודעים כי השאלה מתייחסת לילד (או ילדה) **האחרון** במשפחה ולכן מרחב התוצאות מורכב אך ורק משתי תוצאות אפשריות: {001, 000}.

לכן ההסתברות שבמשפחה זו יש בדיוק בן אחד שווה הפעם ל- $\frac{1}{2}$!

## איך לזכות במכונית ולא בחמור?

בארצות הברית קיים משחק טלוויזיוני ידוע. באולפי הטלוויזיה שלוש דלתות. מאחורי דלת אחת נמצאת מכונית ומאחורי כל אחת מהדלתות האחרות עומד חמור.

בשלב הראשון של המשחק מתבקש המשתתף להצביע על אחת משלוש הדלתות כדי לזכות במכונית (או אולי בחמור...). אחרי שהדלת נבחרה על-ידי המשתתף (אך לא נפתחה!) פותח המנחה של התכנית אחת משתי הדלתות שנשארו, ומאחורי הדלת מתגלה חמור. בשלב זה של המשחק ניתנת למשתתף הזכות לשנות את דעתו ולבחור בדלת השלישית.

עיתונאית בעלת שם[1], כתבה במדורה כי לדעתה, בכל מקרה כדאי למשתתף לשנות את ההחלטה המקורית כדי להגדיל את סיכוייו לזכות במכונית. בתגובה לכתבה זו כתבו קוראים רבים (ביניהם מורים למתמטיקה ומהנדסים) כי עצתה של העיתונאית היא שטות מוחלטת וכי הדבר אינו מגדיל ואינו מקטין סיכויי הזכייה. מי מהם צדק?

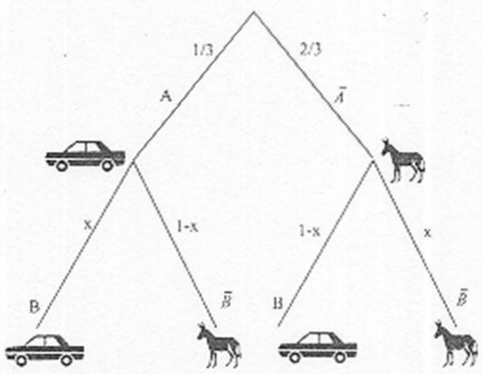
**פתרון**

נסמן A: '**בחירת דלת שמאחוריה המכונית בשלב הראשון של המשחק**'

B: '**בחירת דלת שמאחוריה המכונית בשלב השני של המשחק**'

בנוסף, נסמן ב-x את ההסתברות כי המשתתף לא ישנה את דעתו במהלך המשחק וב-(1-x) את ההסתברות כי הוא כן ישנה את דעתו במהלך המשחק.

נבנה את דיאגרמת העץ.




ההסתברות **לזכייה** במכונית שווה ל-

$$P=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=$$
$$\frac{1}{3}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot(1-x)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot x$$

היות ש- $0\le x\le 1$, ברור כי הערך של P יהיה הגדול ביותר כאשר x=0, במקרה ש- x=0 נקבל P=2/3. לעומת זאת עבור x=1, P=1/3 בלבד.

כלומר, בכל מקרה כדאי למשתתף לשנות את דעתו!

תוצאה זו מתקבלת בדרך כלל בחוסר אימון של מורים ותלמידים כאחד. תגובתם האופיינית היא: '**אנו רואים אך לא מאמינים**'.

אפשר לנמק תוצאה זו גם באופן אינטואיטיבי: נניח שהמשתתף משחק במשחק זה מספר רב של פעמים **ואף פעם אינו משנה את דעתו**. במקרה זה יזכה במכונית רק אם בחר בהתחלה בדלת שמאחוריה עמדה המכונית. ההסתברות לכך שווה ל-1/3.

1. Marylin vas Savant

כעת נניח שהמשתתף **תמיד משנה את דעתו**. במקרה זה יזכה במכונית רק אם בחר בהתחלה בדלת שמאחוריה עמד חמור. ההסתברות לכך שווה ל-2/3, ולכן כדאי למשתתף **תמיד לשנות את דעתו**.

## מלכות היופי וההסתברות[2]

מתוך שלוש נערות: ריקי, טלי וציפי, אשר הגיעו לחצי הגמר בתחרות 'מלכת היופי' צריך לבחור על-ידי הגרלה שתי נערות לשלב הגמר. ריקי מעריכה כי ההסתברות שאמנם היא תיבחר לשלב הגמר שווה ל-2/3. תוצאות ההגרלה יימסרו לנערות רק כעבור מספר שעות, ועד אז כל אחת אינה יכולה להעביר שום מידע לחברותיה.

ריקי שלא יכלה להתאפק, פנתה לאחד השופטים שעבר במקרה לידה, לברר אם עלתה לשלב הגמר. '**אסור לי לגלות לך מה עלה בגורלך**', השיב השופט, '**כל שאוכל לומר הוא, שטלי נבחרה לגמר**'.

'**אוי לי, קלקלתי הכול!**' - בכתה ריקי. '**רק לפני רגע הסיכוי שלי להגיע לגמר היה 2/3 ועכשיו הוא רק 1/2...**'

מה דעתך, האם ריקי צדקה?

**פתרון**

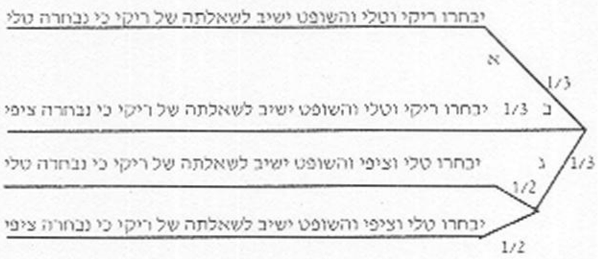
ריקי חשבה שהניסוי יכול להסתיים בשלוש דרכים שונות: '**ייבחרו ריקי וטלי**', או '**ייבחרו ריקי וציפי**', או '**ייבחרו טלי וציפי**'. בנוסף, הניחה ריקי, כי ההסתברויות לכל אחת משלוש אפשרויות אלו זהות ושוות ל-1/3. זהו מרחב התוצאות מנקודת ראותו של חבר השופטים אך בבניית מרחב התוצאות מנקודת ראותה של ריקי יש לקחת בחשבון גם את תשובתו של השופט. בבניית המרחב נבחין בשלושה מצבים שונים:

א. ייבחרו ריקי וטלי והשופט ישיב לריקי כי טלי נבחרה. ההסתברות לכך שווה ל-1/3.

ב. ייבחרו ריקי וציפי והשופט ישיב לריקי כי ציפי נבחרה. ההסתברות לכך שווה ל-1/3.

ג. יבחרו טלי וציפי. ההסתברות לכך גם שווה ל-1/3, אך במקרה זה השופט יכול להשיב לשאלתה של ריקי כל אחת משתי התשובות: 'נבחרה טלי', או 'נבחרה ציפי'. ברור שההסתברות לכל אחת מהן שווה ל-1/2.

נפרט את המצבים האלה בדיאגרמת עץ:




ריקי יודעת שבכל מקרה טלי תעלה לגמר. לכן יש לחשב את ההסתברות המותנית לאירוע שבו תיבחר ריקי כאשר **ידוע מראש שטלי נבחרה לגמר**. הסתברות זו שווה למנה

$$P = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

תוצאה זו נראית הגיונית, לאור העובדה, שבשאלתה לא יכלה ריקי להשפיע בדיעבד על סיכוייה להיבחר לשלב הגמר.

## מתמטיקה בבית המשפט

כידוע, בימי האינקוויזיטור הגדול תומס דה טורקמדה, הודאת הנאשם באשמה שימשה סיבה מספקת להרשעתו, למרות שהיא נגבתה לרוב בעינויים קשים. בזמננו בתי המשפט מתייחסים בזהירות להודאות באשמה. בייחוד, הדבר בולט במשפטים של חברי מחתרות וארגוני טרור בין-לאומי. חברי ארגונים אלה עוברים אימונים שמטרתם לחשל אותם לעמידה בלחץ החוקירות המשטרתיות. מסיבה זו, הודאתו של החשוד באשמתו מעוררת לעתים קרובות ספק באמינותה.

סטיואורט (Stewart 1996) מביא לכך נימוקים מתמטיים המבוססים על ההסתברות המותנית:

נסמן: $A$ - '**החשוד אמנם ביצע את הפשע**'

$\overline{A}$ - '**החשוד חף מפשע**'

$C$ - '**החשוד הודה באשמה**'

במקרה זה $P(A)$ היא ההסתברות לאשמתו של החשוד על סמך הממצאים שנאספו לפני חקירתו. מנוסחה להסתברות מותנית נקבל:

$$P(A|C) = P(A \cap C) / P(C) \qquad (1)$$

2. שאלה זו מבוססת על פרוזקט האסירים.

מצד שני:

$$P(C|A) = P(A \cap C) / P(A)$$

נחלץ מהשוויון הזה את $P(A \cap C)$ ונציב ב-(1) נקבל

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(C)} \qquad (2)$$

אך $$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(\overline{A}) \cdot P(C|\overline{A})$$

ולכן נוכל לרשום את השוויון (2) כך:

$$P(A|C) = \frac{P(C|A) \cdot P(A)}{P(A) \cdot P(C|A) + P(\overline{A}) \cdot P(C|\overline{A})}$$

אחרי שנחלק בשוויון הזה את המונה ואת המכנה בביטוי $P(C|A)$, נקבל

$$P(A|C) = \frac{P(A)}{P(A) + \frac{P(C|\overline{A})P(\overline{A})}{P(C|A)}} \qquad (3)$$

נסמן $p=P(A)$, $r = \frac{P(C|\overline{A})}{P(C|A)}$ ונשתמש בעובדה כי

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

על-ידי-כך נקבל את הנוסחה:[3]

$$P(A|C) = \frac{1}{p + r(1-p)} \qquad (4)$$

כדי שההודאה באשמה תגדיל את ההסתברות לאשמתו של החשוד, צריך לדרוש שיתקיים האי-שוויון $P(A|C)>P(A)$. מ-(4) נקבל $\frac{1}{p + r(1-p)} > 1$ ולכן $r<1$.

ניסיון ומחקרים פסיכולוגיים מוכיחים, שבדרך כלל אנשים נורמליים החפים מפשע נוטים פחות להודות באשמה מאשר אנשים שביצעו פשע, ולכן תוצאה זו נראית הגיונית. מצד שני, ידוע שאנשים חלשי אופי ומוגבלים או חברי ארגוני טרור, נוטים להודות באשמה כאשר למעשה לא ביצעו את הפשע. במקרים אלה $P(C|\overline{A}) > P(C|A)$, כלומר, $r>1$. באופן פרדוקסלי, במקרים מסוימים ההודאה באשמה אינה מגדילה אלא מקטינה את ההסתברות לביצוע העבירה!

## סיכום

בארבעת הבעיות שהצגנו, הדגמנו כיצד עשויות ההסתברויות המקוריות להשתנות לאור קבלת אינפורמציה חדשה. עבור תלמידים רבים זהו גילוי מפתיע ומרתק ויש לכך השפעה חיובית להתפתחותם המתמטית. להצגת בעיות אלו ודומות להן יש מטרה נוספת: הן מביאות להכרה כי יש להתייחס בזהירות להנחות אינטואיטיביות שנראות לכאורה כברורות מאליהן. לחשיבה אינטואיטיבית ולחיפוש הסימטריה והאנלוגיה יש ערך רב מבחינה מתמטית ויש לעודד תכונות אלו אצל התלמידים. מצד שני, תהליך זה טומן בחובו סיכונים אם הוא מתבצע ללא חשיבה ביקורתית. חקירת בעיות אלו מראה לתלמידים שהשיטה הדדוקטיבית היא האמצעי העיקרי והחשוב ביותר לחקר האמת. מסיבות אלו נראה לנו כי יש להעמיק ולהרחיב את הנושא של ההסתברות המותנית במסגרת הוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון.

### רשימת ספרות


M. Gardner [1966]. *New Mathematical Diversions.* New York, Simon & Shuster.

I. Stewart [1996]. Mathematics Recreation, *Scientific American* 11(63).

T. Varga [1972]. Logic and Probability in the Lower Grades. *Educational Studies in Mathematics* 4.

נ' מובשוביץ-הדר [1990]. הא כיצד?!?, אוסף פרדוקסים מתמטיים. מהדורת עיצוב. טכניון-מכון טכנולוגי לישראל, המחלקה להוראה הטכנולוגיה ומדעים.

נ' מובשוביץ-הדר וי' קליינר [1996]. תפקידם של פרדוקסים בהתפתחות המתמטיקה, עלייה 18.

א' קופרמן [1995]. סטטיסטיקה והסתברות. חיפה, הוצאת בק - ספרי לימוד.


3. נוסחה זו פיתח Robert A.J. Matthews.