מה ללמד ואיך ללמד מתמטיקה:
הצעה לרפורמה

גרסה 1, 6.10.2015
צבי ארטשטיין
מכון ויצמן למדע, רחובות

ברצוני להציג כאן הצעה לשינוי בגישה ובפרקטיקה של הוראת נושאי המתמטיקה במערכת החינוך, הן לגילאי בית הספר היסודי והן לגילאי בית ספר תיכון. ההצעה מבוססת על תובנות שהתגבשו אצלי במשך תקופה ארוכה, וחלקן הוצגו בספרי "הקשר המתמטי: המתמטיקה של הטבע, הטבע של המתמטיקה והזיקה לאבולוציה" (ספרי עליית הגג וידיעות ספרים, ספטמבר 2014). תובנות אלה מסתמכות במידה רבה על המחקר והעיון בן כמה עשורים, על ידי מספר גדול של חוקרים, בנושאים של פסיכולוגיה התנהגותית, קוגניציה ולמידה. מחקרים אלה לא התייחסו באופן מפורש למתמטיקה. השלכות למתמטיקה מופיעות בספרי אך לא רק בהקשר להוראת המקצוע, והמסקנות מהן אינן מוצגות שם כתכנית לשינוי או שיפור של הוראת המתמטיקה. זאת ברצוני לעשות בעמודים הבאים. אציג בקצרה את הרקע התיאורטי להצעות שלי. הרקע הזה חשוב להבנת הרפורמה שאני מציע. לא אציג תכנית לימודים מסודרת, אלא רק עקרונות כלליים, מהם אפשר לגזור תכנית לימודים ודרכי למידה מפורטים.

חלק מהרעיונות נוגדים את הדרך בה אנו למדנו ואנו מלמדים מתמטיקה, והעיקר, את הדרך לה הורגלנו ולכן אנחנו משוכנעים כי אין בלתה. לכן אני מבקש מקוראי שורות אלה, במיוחד מאלה שאינם מצויים במחקרים בקוגניציה שהזכרתי, להתייחס לכתוב בראש פתוח ונפש המוכנה לשמוע רעיונות חדשים. הטקסט ילווה במספר דוגמאות. הקורא מתבקש שלא להיתפס לדוגמא מסוימת זו או אחרת. אפשר להחליף אותן, להציגן בצורות אחרות ולהרחיב בהן כמעט ללא גבול. להלן סדר הדברים.

1. תקציר

אני מציע להקדיש את מירב שעות הלימוד לנושאים במתמטיקה בהם פוגש התלמיד ויפגוש בעתיד בחיי יומיום, ויתר על כן, להשתית את המתמטיקה הנלמדת על האינטואיציה שהתלמיד כבר פיתח בנושאים אלה. כאשר המתמטיקה הפורמלית תוצג על רקע האינטואיציה שכבר קיימת, יוכל התלמיד, במידת הצורך, לתרגם את האינטואיציה לניתוח מתמטי או לחישובים. רק חלק קטן יחסית צריך להיות מוקדש למתמטיקה פורמלית יותר ואבסטרקטית, וזאת תוך התחשבות בחסמים הקוגניטיביים בלמידה של חומר כזה. מקצת שעות הלימוד יוקדשו לפתיחת צוהר למתמטיקה האבסטרקטית לכול התלמידים, למתעניינים תינתן האפשרות להרחיב את הצוהר הזה.

2. רקע: איך אנחנו מבינים, מסבירים ומגיבים

כדי להבין, בין אם את הנקרא (כולל שורות אלה) ובין את הנשמע, וכדי להתבטא ולהביע את מחשבותינו, אנחנו משתמשים במוח. האיבר המופלא הזה, המוח האנושי, התפתח במאות אלפי ואף מיליוני שנים של האבולוציה של המין האנושי. אני מתייחס כאן לאבולוציה של המין, במשך מיליוני שנים, ולא לאבולוציה של החברות האנושיות שהתרחשה באלפי השנים האחרונות. זו כבר לא השפיעה, ככל שאנו מבינים, על מבנה המוח, והמוח האנושי היום זהה למוח של בני האדם שחיו לפני כמה אלפי שנים. כמו לגבי כל איבר ואיבר בגוף החי, גם ההתפתחות האבולוציונית של המוח במשך מאות אלפי שנים נתנה עדיפות לאותן תכונות והרגלים שעזרו למין האנושי במאבק האבולוציוני. וכך, הדרך בה מוחנו מתפקד משקפת יתרונות במאבק האבולוציוני של מאות אלפי השנים. יתרונות אלה תקפים, בדרך כלל, עד היום הזה. אבל לעתים, הדרך בה מוחנו מתפקד יוצרת חסם קוגניטיבי המשפיע על תפקודנו בהרבה תחומים לרבות על הלימוד של נושאים שהתפתחו רק במאות השנים האחרונות. מחקרים ענפים בפסיכולוגיה של ההכרה והלמידה, מצביעים על החסמים הללו (לא ניתן כאן מראי מקום, אך נוכל לציין מחקרים, וספרים, של טברסקי, כהנמן, גיגרנצ'ר, קוסמידס, ואחרים). מחקרים אלה לא עוסקים דווקא במתמטיקה. בעמודים הבאים נתייחס לכמה מהתכונות והחסמים הללו, הרלבנטיים ללימוד מתמטיקה.

אחת התכונות העיקריות שעזרו במאבק האבולוציוני היא היעילות, ובכללה ההימנעות מדייקנות וירידה לפרטים. אכן, במאבק האבולוציוני שכרו של הדיוק עלול לצאת בהפסדו. לבדוק את כל הפרטים, לוודא שהבנתי נכון או שאני מתבטא נכון עלולים להזיק. הסיבה ברורה, דרוש מאמץ או זמן כדי לדייק ולוודא כל פרט, מאמץ שהרווח ממנו מוגבל ושנזקו עלול להיות יקר במונחי המאבק האבולוציוני. נכון שחוסר הדיוק עלול לגרום טעויות, אפילו דרסטיות במונחי הפרט - אם טעית בכוונות הנמר שממול אתה עלול להיטרף – אבל במונחי השרידות של המין כולו הדייקנות היתרה בדרך כלל מזיקה. כדי לתפקד ביעילות מספיק, ברוב המקרים, שנבין בערך, או בקירוב טוב, וכאן מדובר הן בהבנה פסיבית והן בהבעה של רעיונות או אינפורמציה. לכן גם כיום, הרחק מטווח המאבק האבולוציוני הקלסי, כאשר אנחנו מנסים להבין את מה שנאמר לנו בקומוניקציה היומיומית, איננו מקפידים על המבנה הלוגי של הנשמע או הנקרא. וכבר הבאתי בספרי את המשפט (לקוח משיעורי בלשנות):

"אין פציעת ראש שהיא קטנה מכדי להתעלם ממנה"

שמרבית אם לא כל השומעים (וניסיתי זאת על קהלים שונים) מפרשים אותו כאזהרה שלא להזניח פציעת ראש ותהיה קטנה ככל שתהיה. אבל בחינה לוגית של הנאמר מראה שהמשפט ממליץ להזניח את כל פציעות הראש. דוגמא נוספת: כמעט מדי יום כאשר אני מתהלך בשבילים של מכון ויצמן עוצרת לידי מכונית והנהג שואל: "האם אתה יודע היכן מרכז הנופש?" אני בדרך כלל עונה "כן" ומנסה להמשיך בדרכי. הנהג או מחייך כאילו אומר לעצמו, הבנתי את הבדיחה, או סתם מתעקש "האם תוכל להסביר לי כיצד להגיע?" לעתים גם כאן אני עונה "כן, בוודאי". כאן התגובה היא בנוסח של "נו כבר", או מבט המביע את דעתו של הנהג על המתחכמים המוזרים במכון ויצמן. אף אחד מהשואלים לא מתקן את המבנה הלוגי של השאלה כדי להביע בצורה מדויקת את רצונו, והם צודקים כמובן. השפה היומיומית מעורפלת, וזאת לשם היעילות. הדייקנות בדיבור אינה דרושה.

חלק מהיעילות הוא זמן התגובה. בפעילות יומיומית, בתגובות לשאלות או בשיחה, אין זמן ואין צורך בבחינה מדוקדקת של המצב כדי שתגובתנו תהיה מדויקת. אנו עונים או פועלים באופן אינטואיטיבי, תוך כדי חשיבה אינטואיטיבית, תגובה מהבטן אם תרצו, או מזיכרון מיידי, ללא בחינה ובדיקה של ההנחות. זאת להבדיל מניתוח מדוקדק הגוזר מסקנות מהנחות. כאן אני מציע להבדיל בין חשיבה ובין ניתוח, ולהשתמש במושג חשיבה רק כאשר היא מתבצעת באופן ספונטני, אינטואיטיבי. לבדיקה המדוקדקת הייתי משתמש במונח ניתוח. יש בה פחות ממין החשיבה. הניתוח יכול ויעשה גם על ידי מכונה או מחשב. ההבדל בין חשיבה אינטואיטיבית וניתוח ישחק תפקיד חשוב בהמשך.

אפיון נוסף של למידה: כאשר אנו חשופים לאינפורמציה חדשה, המוח משווה אותה לאינפורמציה שכבר יש בתוכו ומעדכן במידת הצורך. כלומר, הלימוד של הדבר החדש עובר דרך פילטר של מה שיש כבר במוח ומה שכבר כלול במוח משמש כר לפיתוח אינטואיציה לגבי הנושא החדש. ככלל, המוח מתפקד בצורה אסוציאטיבית ואינדוקטיבית. צורה זו, שהיא סך הכול יעילה, ולכן נתמכת אבולוציה, מביאה לפעמים לאי הבנות בסיסיות, כאשר החידוש נוגד את מה שהמוח כבר פיתח כהבנה, כפי שכל אחד מאתנו חווה כאשר הוא או היא מנסה ללמוד או ללמד משהו חדש. אבל התועלת של החשיבה האסוציאטיבית והאינדוקטיבית עולה על הנזקים ממנה, ולכן צורת חשיבה זו היא דומיננטית. לעתים אנו משתמשים גם בניתוח דדוקטיבי, בפילוסופיה, במשפט, אבל אין השימוש הזה יומיומי או "מהבטן", כלומר, אינטואיטיבי.

יתר על כן, אין במוח אלגוריתם למידה אחיד, אלא דרכי למידה שונים לנושאים שונים, וכולם מונעים על ידי התועלת המידית מהלמידה כפי שהשתקפה בתהליך האבולוציה. אין מדובר בתועלת עתידית, שכלתנית, כמו, למשל, "אם תלמד נושא זה תתקבל לחוג יוקרתי באוניברסיטה והמשכורת שלך בעתיד תגדל". זו מוטיבציה שתביא אותך לכתת הלימוד, אבל כאשר תיגש ללימוד עצמו, תהליך הלמידה במוח יחפש באופן תת הכרתי את הסיבה הישירה ללמוד, סיבה ששרתה את האדם תוך כדי האבולוציה. לכן לימוד של נושאים אבסטרקטיים שאינם מתייחסים למצג קונקרטי יהיה קשה הרבה יותר מאשר לימוד המתייחס לסיטואציה קונקרטית שהמוח כבר נתקל בה.

ונסכם: אנחנו מנסחים את דברנו עד אותה דרגת דיוק בה אנחנו מאמינים כי השומע או הקורא יבין אותנו, אנחנו מבינים דברים חדשים בהסתמך על מה שאנחנו כבר יודעים, ואנחנו לומדים דברים חדשים טוב יותר כאשר הם מתייחסים למציאות שכבר התנסינו בה. זו אסטרטגיה מבוססת אינטואיציה שהייתה יעילה בהתפתחות האבולוציונית והינה יעילה בחיי יומיום אף כיום. יתר על כן, אסטרטגיה זו טבועה במוחנו ואי אפשר להימנע מדרך זו של התנהגות וחשיבה. מי שידייק יתר על המידה בחילופי דברים יומיומיים, או שיהיה טרחן מנדנד או שיזכה לתגובה כפי שתיארתי לעיל. התכונות הללו התפתחו באבולוציה של המין האנושי וצריך להתחשב בהן כאשר מכינים תכנית לימודים וכאשר מלמדים,

3. הקונפליקט שבין התלמידים והמתמטיקה כפי שמלמדים אותה כיום

המפגש עם המתמטיקה כפי שהיא נלמדת היום בבתי הספר מביאה לקונפליקט, לעיתים בלתי מודע, בין הנלמד בכתה לבין הפרקטיקה היומיומית, קונפליקט שמביא לניכור ודחייה אצל רבים מהתלמידים, אם לא אצל רובם, ויתר על כן – כך אטען בהמשך - הקונפליקט מיותר לחלוטין.

אחד משורשי הבעיות העיקריות של הוראת המתמטיקה נעוץ במגבלות הקוגניטיביות שהוצגו בקטע הקודם. הדייקנות הנדרשת מהתלמידים בהבנה ובביצוע של המתמטיקה אותה הם לומדים סותרת את הנטייה הטבעית, ויתר על כן, סותרת את הפרקטיקה שכולנו חווים מחוץ לכותלי בית הספר, גם כאשר אנו מתייחסים או דנים בנושא מתמטי. יש דוגמאות לכך למכביר. אזכיר רק שתיים שהשתמשתי בהן לאחרונה במסגרת קורס לקראת תואר מוסמך למורים. בשער של העיתון דה-מרקר (מה- 26.10.2014) מוצגת כותרת: "בוגרי בתי ספר מקצועיים מרוויחים 50% פחות מאשר אקדמאים". בתוך דפי העיתון, הכותרת של המאמר אומרת "שכר האקדמאים בישראל גבוה ב- 51% אחוז משכר בוגרי השכלה מקצועית" שני הנתונים הללו שונים לחלוטין. הסתירה לא הפריעה למנסחי הכותרות וכנראה גם לרוב קוראי העיתון – למרות שמדובר בנתון מתמטי. מספיק שהמסר עבר. דוגמא נוספת: בערך באותה תקופה, במסגרת הדיון הציבורי האם טוב יותר לחיות בתל אביב לעומת ברלין, הופיעה הכותרת בעיתון הארץ "שיעור התמותה השנתי בתל אביב הוא 7 למאה אלף אנשים בעוד שבברלין השיעור הוא 8 למאה אלף". המסר ברור, אבל מי מהקוראים שם לב לכך, או היה אכפת לו, שלאוכלוסייה עם שיעורי תמותה כאלה תוחלת החיים קרובה לעשרת אלפים שנה? ויש עוד דוגמאות למכביר בכל עיתון או הרצאה, בכל נושא ונושא כולל מתמטיקה. למעשה הדבר נכון גם

בנושאי לימוד אחרים בבית הספר, כולל נושאים מדעיים. השפה לא חייבת להיות מדויקת, ולפעמים כדאי שלא תהיה מדויקת, העיקר שהמסר עובר. בדרך כלל אין זה פרקטי ואין כל צורך לתקן את הטקסטים כדי להשיג דיוק רב יותר. והנה מגיע התלמיד לשיעור מתמטיקה ונדרש לתפקד בצורה אחרת לחלוטין. בצורה שהמוח האנושי לא בנוי אליה, הוא נדרש לדייקנות (עוד מעט נראה כי לעתים קרובות זו רק דייקנות לכאורה). אבל כאשר הוא יוצא מהכיתה, או משיעורי הבית, הוא שוב מתפקד כאחד האדם – אחרת יחשב לטרחן. זה מקור עיקרי לטראומה שהזכרתי.

לפני שנגיע לעוד פנים כאלה של הלימוד אתייחס לתגובה מקובלת לאבחנה שבפסקה הקודמת, כדלהלן. אז מה אם חיי היומיום מרשים טעויות ואי דיוקים. במתמטיקה דרוש דיוק רב ותפקידנו ללמד אותה ככזו. לתשובתי לטענה זו שלוש פנים. ראשית, אין זה נכון שבפרקטיקה המתמטית תמיד מצוי דיוק מעבר לדיוק במקצועות אחרים. שנית, גם באותם מקרים בהם מנסים להגיע לדיוק, זה בהרבה מקרים דיוק לכאורה, וההתייחסות אליו רק מגבירה את הבלבול שבין התלמידים והמורים. ולבסוף, אל תטעו, אני בהחלט בעד ללמד מהו דיוק מתמטי, אלא שללמד כיצד לדייק צריך בזמן ובדרך הנכונים. אפשר לדייק משהו אם הוא נמצא כבר במוח בצורה לא מדויקת. להתחיל מהגרסה המדויקת, שלרוב היא מסורבלת יותר או לא טבעית, עלול להחטיא את המטרה. והעיקר, צריך להבין כי לא תמיד הדיוק המתמטי דרוש או אפילו רצוי. אפרט ואסביר טענות אלה בהמשך.

מחסום נוסף העומד בין המורה למתמטיקה ובין התלמיד הוא עניין ההוכחה. בתכנית הלימודים היום מוקדש פרק קטן לנושא של הוכחה מהי, וגם זאת רק בתכנית למתקדמים, אבל הצורך בהוכחה, כלומר בשכנוע שמעבר לרושם ראשוני, שזור כמעט לאורך כל נושאי הלימוד. יתר על כן, חלק נכבד מההסברים בכתה משתמשים בטעונים דדוקטיביים, בניגוד לחשיבה האסוציאטיבית והאינדוקטיבית הטבועים במוחנו. אבל, הטבע האנושי מורה לנו כי אם השתכנענו אינטואיטיבית או אחרת בנכונות של טענה, אין כל טעם להמשיך ולהקצות משאבים ואנרגיה כדי להשתכנע מעל כל ספק. בשורש העניין עומדת שוב היעילות. וזו שוב סתירה בין חיי היומיום והשיעור במתמטיקה. יתר על כן, גם בשיעור במתמטיקה לא ברור מתי צריך להוכיח ומתי הטיעון משכנע. קהילות מתמטיות שונות מגדירות לעצמן את ההיקף הדרוש בהוכחות למיניהן, וזאת אפילו במתמטיקה גבוהה ברמת מחקר. אין אפשרות טכנית לרדת ולבדוק את כל הפרטים, ולכן מסתפקים בהוכחה חלקית המביאה לשכנוע שהטענה נכונה, ואכן הדבר מוביל לעתים לטעויות. אבל כבר ציינתי כי רצוי לאפשר שגיאות, אחרת לא נוכל להתקדם. ואם גם במתמטיקה ברמת המחקר ישנה אי בהירות לגבי הפירוט הרצוי של הוכחה, אז מה יכולים אנחנו לדרוש מהתלמידים שלנו, שנטיית לבם היא לא לחפש הוכחה כלל אחרי שהם השתכנעו בנכונות הטענה. ושוב אחזור: איני מכוון כאן רק לצמד משפט/הוכחה של המתמטיקה הגבוהה, אלא אני מתייחס גם לדרישה לנימוקים שמעבר ל- "אנחנו רואים ש...", דרישה המאפיינת את לימוד המתמטיקה בשלבים רבים ושונים. אזכיר כי נושא הבדיקה הנוספת בנושאים הנלמדים בבית הספר מצוי אך ורק במתמטיקה. כאשר מורה לגיאוגרפיה, או היסטוריה, או ביולוגיה, מציין עובדה מסוימת, מהלך השיעור לא נעצר כדי לבדוק האם טעות בידי המורה. מקבלים את הטענה כפי שהיא. אבל לא במתמטיקה, שם המורה עצמו מסביר כי דרוש נימוק, דרושה הוכחה. אין לתלמיד, ולעתים קרובות אף למורה, מושג ברור מתי דרוש נימוק נוסף ומתי ההוכחה שלמה. כתוצאה מכך התלמיד פשוט מחקה את המורה, בלי הבנה אמתית בצורך או אי הצורך בהוכחה. זהו עוד ניגוד טראומטי שבין לימודי המתמטיקה ולימודים אחרים.

התנגשות נוספת נובעת מהשימוש, המובלע לפעמים, בטענות לוגיות, החל מכללי ההיסק דרך, למשל, הוכחה בדרך הסתירה. בחיי יומיום איננו משתמשים בלוגיקה בכלל, ואפילו מתעלמים ממנה. לא אכנס כאן לפרטים, ורק אזכיר שתי דוגמאות. בחיי יומיום הכמת "כל" מתפרש בדרך כלל כ- "רוב". א' אומר "כל חברי הכנסת יומרניים", ב' עונה "ומה עם קדיש לוז?" א' לא לוקח את דבריו חזרה אלא טוען "קדיש לוז היה יוצא מן הכלל". הנקודה היא שאדם א' כלל לא מוטרד מכך שב' מצא אצלו שגיאה לכאורה – לא כל חברי הכנסת יומרניים. הוא לא רואה זאת כשגיאה. לעומת זאת, התלמיד במתמטיקה מודרך לראות יוצא מן הכלל כשגיאה לטענת "כל" ואחת ממטרות תכנית הלימודים הוא להביא את התלמיד להכרה שדוגמא נגדית פוסלת את הטענה. הכרה זו אינה נכונה

בפרקטיקה היומיומית. דוגמא שנייה היא ההצהרה כי מההיגדים A גורר B ו- B מתקיים אי אפשר להסיק כי A מתקיים. אבל בחיי יומיום, בהרבה סיטואציות אפשר גם אפשר להסיק כי A מתקיים, לפחות בדרגת ודאות המספיקה לחיי יומיום. לעומת זאת, התלמידים נדרשים ללמוד כי אי אפשר, בשום תנאי, להסיק כי A מתקיים. דוגמא נוספת מצויה בשימוש בטיעון המתבסס על הוכחה בדרך השלילה (ושוב אדגיש, אינני מתייחס רק למקרים בהם מוצגת ההוכחה בדרך השלילה במפורש, אלא בעיקר לטיעונים בהם, לפעמים במובלע, סתירה מביאה לשלילת ההנחה). מתי בחיי יומיום אנו משתמשים בטיעונים הללו? כמעט אף פעם. יתר על כן, גם כאשר תטיח בפני בן השיח שלך כי ההנחות שלו מביאות לסתירה, לא יביא הדבר לביטול ההנחות הללו. אבל במתמטיקה מתבקש התלמיד לבטל הנחות אלה. אבל כשהוא יוצא מן הכתה, למען תפקוד חברתי נכון, עליו לשכוח את שלמד בכתה.

קושי נוסף קשור לבעייתיות בצורך להגדיר במדויק את נושאי הדיון, להגדיר במדויק את המושגים שמשתמשים ואחר כך לדבוק בהגדרה. אותם מושגים בחיי יומיום משמשים בדרך ערטילאית לפעמים, ולעתים בהרבה יותר משמעויות. הנה מספר שורות מראיון שערכה השדרנית קרן נויבך עם פרופסור ניר סוכן, ראש בית הספר למתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, ביוני 2015 (הטקסט לקוח מאתר רשות השידור). קודם לשורות אלה אמר ניר סוכן כי תפקיד תעודת הבגרות להבדיל בין אלה שמעל הממוצע ובין אלה שמתחתיו.

קרן נויבך : כלומר מערכת החינוך מציבה לעצמה מטרה, והיא שלמאה אחוז מהתלמידים תהיה תעודת בגרות.
פרופ' ניר סוכן : נכון.
קרן נויבך : אוקי.
פרופ' ניר סוכן : אם רוצים להגיד את זה בצורה משעשעת, אז אנחנו נגיד שמערכת החינוך מנסה להעביר מאה אחוז מהתלמידים מעל לממוצע.
קרן נויבך : אוקי. וזה לא מטרה ראויה?
פרופ' ניר סוכן : להעביר מאה אחוז מהאנשים מעל לממוצע? אני לא יודע אם זה ראוי או לא, אבל זה בלתי אפשרי.
קרן נויבך : תסביר.
פרופ' ניר סוכן : באופן טבעי, כן, הממוצע הוא כזה שחלק מעליו וחלק מתחתיו. אי אפשר להעביר את כולם מעל לממוצע.

כאן עברה השיחה לנושא אחר. כלומר, קרו נויבך רואה במטרה להעביר מאה אחוז מהאנשים מעל לממוצע מטרה ראויה, בעוד פרופסור סוכן רואה בכך סתירה לוגית. שניהם חכמים ואפילו צודקים, אלא שהם מפרשים את המילה ממוצע בדרכים שונות (הסתירה בפירוש המושג ממוצע לא הובהרה בראיון עצמו). אצל פרופסור סוכן ממוצע ניתן על ידי הגדרתו המתמטית, בעוד שאצל השדרנית ממוצע הוא מין רף, שאפשר וצריך להעביר אפילו את כל האוכלוסייה מעליו. כאשר הראיתי את הטקסט בפורומים שונים התגובות של קהל עם רקע מתמטי היו: איך זה שקרן נויבך לא יודעת מה זה ממוצע? בעוד שקהל כללי יותר לא אהב את הדקדקנות של פרופסור סוכן. הלקח: בחיי יומיום הגדרות מדויקות לא תמיד שימושיות ועוזרות לקומוניקציה.

ועוד דוגמא: אפשר למצוא בספרות דיונים ארוכים על השאלה כיצד להגדיר גבול, או רציפות של פונקציה. בהתייחסות למושג הרציפות. הספרות דנה בשאלה האם התיאור הבא (לכך שפונקציה f(x) רציפה בנקודה x=a), הוא שגוי:

"ככל ש- x קרוב יותר ל- a, הערך f(x) קרוב יותר ל- f(a)."

חוקרים ידועים רואים בתיאור זה שגיאה. אני לא רואה זאת כך, בוודאי כאשר מתבקש תיאור אינטואיטיבי למושג הגבול. החוקרים הטוענים שזו שגיאה מציעים הגדרה של גבול המבוססת פחות או יותר על מושג הידוע במחוזותינו כשיטת ה- אפסילון/דלתא, או גרסה מרוככת של הגדרה זו. עכשיו תארו לעצמכם תלמיד החוזר הביתה (לא רק תלמיד, חשבו על עצמכם) ונשאל על ידי אחיו הגדול או ההורים "מה למדת היום?". "רציפות" הוא עונה. "תסביר" הוא מתבקש. האם הוא צריך להסביר במונחי אפסילון/דלתא? האם הסבר אינטואיטיבי בנוסח שלעיל, המכונה שגוי על ידי רבים

בספרות, לא מספיק ולא מספק? והאם התלמידים, או לצורך זה רוב המורים, באמת מסוגלים להצביע מה שגוי בתיאור שלעיל? השגיאה, לכאורה, טמונה בפירוש הבלשני האומר שההגדרה מניחה התקרבות מונוטונית. לדעתי זו התעלמות מאי הדיוק של השפה בחיי יומיום, השפה של יומיום אינה מדויקת מספיק כדי להכריע כי ההתקרבות במשפט שלעיל מונוטונית או לא, שלא לדבר על כך שכפי שכבר אמרנו, לפעמים רצוי וכדאי להרשות אי דיוקים כדי שתושג הבנה. נוסיף גם כי התיאור הפחות מדויק לכאורה, מנוסח דווקא במונחים אינטואיטיביים, שהמוח מסוגל לקלוט, בעוד שההגדרה המדויקת משתמשת בכמתים "לכל" ו-"קיים" שלמוח אין דרך להפנים אותם באופן אינטואיטיבי.

ודוגמא אחרונה לעת עתה (דוגמאות נוספות יינתנו בהמשך): לפני מספר שנים נכחתי בהרצאה בהוראת המתמטיקה, והמרצה חזרה והתייחסה למספרים ראשוניים כמספרים המתחלקים רק בעצמם ובאחד, למעט המספר אחד. ההצהרה הזו חזרה מספר רב של פעמים, ומהתוכן של ההרצאה לא הבנתי מדוע היא מדגישה שאחד איננו ראשוני, אז שאלתי אותה. המרצה (שלא ידעה כי יש לי רקע במתמטיקה) ענתה משהו כמו "אחד איננו ראשוני" כששאלתי: מדוע? התשובה הייתה שזו עובדה ידועה. לא המשכתי להציק. צריך כנראה איזו בשלות במתמטיקה כדי להבין שהגדרות שכאלה לא ירדו מהשמיים יחד. ההגדרות הן לצורך לוקלי בדרך כלל, ובדרך כלל אפשר לערער עליהן או אפילו להתעלם מהן. לרבים מהמורים אין את הבשלות הזו, והמסר לתלמידים הוא כי עליהם לזכור את ההגדרה כפי שהמורה מציג, למרות שהיא נראית להם שרירותית. זהו עוד מקור לניכור, במיוחד מכיוון שבלמידה של נושאים אחרים, שלא לדבר על חיי היומיום, אין דבקות כזו בהגדרות, וכפי שראינו אין דבקות כזו גם כאשר מדובר במושגים מתמטיים.

לסיכום: המתמטיקה כפי שהיא נלמדת בבתי הספר מסתמכת במידה רבה על גישה זרה לצורה שהמוח האנושי מתפקד, ולכן מעוררת ניכור. יתר על כן, הגישה הזו זרה גם לדרך בה משתמשים במתמטיקה בחיי יומיום. להצהרות בתכניות הלימודים השונות כי המתמטיקה הזו תעזור לתלמידים לתפקד בחיי יומיום אין על מה לסמוך. ההיפך הוא הנכון. תלמיד שידבק בהגדרות השרירותיות והלא אינטואיטיביות יתקשה להשתלב ולשלב מתמטיקה בחיי היומיום. יתר על כן, לימוד כזה כמעט ולא ישאיר חותם על עולם הידע של בוגרי בתי הספר בהמשך חייהם, כפי שאכן מדווחים בוגרי המערכת לגבי נושאים שלמדו בבית הספר אך המשך הקריירה שלהם לא השיק לנושאים אלה. והעיקר: בהמשך אנסה לשכנע כי אין כל צורך ללמד כך מתמטיקה.

4. רקע: אינטואיציה מול לוגיקה במתמטיקה

המוח יכול להפעיל חשיבה אינטואיטיבית רק בנושאים ובדרכים שמטבעם מתיישבים עם המהלכים והמטרות לפיהם המוח עוצב על ידי האבולוציה. אין המוח יכול לחשוב אינטואיטיבית על נושאים או מצבים שאינם מתיישבים עם התכונות שהאבולוציה הטביעה בו. דוגמא לנושא אליו המוח אינו יכול להתייחס באופן אינטואיטיבי היא, כפי שראינו, הלוגיקה. איך משתבצת המתמטיקה בדיכוטומיה הזו?

במשך ארבעת אלפים שנה התפתחה מתמטיקה מתוחכמת למדי מבלי להתייחס כלל וכלל למושגים שאנו רואים בהם היום חלק מהמסד של המתמטיקה: הגדרות, הוכחות, הכללות, וכיוצא באלה. יתר על כן, המתמטיקה הזו לא הקפידה על דייקנות ואף הרשתה טעויות כאשר לטעות לא הייתה חשיבות לגבי השימושים. אני מתכוון כמובן למתמטיקה שפיתחו הבבלים והאשורים, והמצרים, בתקופה העתיקה, עד הופעת המתמטיקאים של יוון הקלסית. המתמטיקה הגיעה בשנים הללו להישגים מפליגים, הן מנקודת מבט של מתמטיקה לעזרת ההנדסה, החקלאות, המסחר וכיוצא בזאת. והן כמתמטיקה לשמה הדנה בחישובים מספריים וגיאומטריים לשמם. הגישה הייתה מצד אחד אינטואיטיבית, ומצד שני הסתמכה על דוגמאות קונקרטיות של בעיות או תרגילים, מהם היה על המשתמש – או התלמיד – לגזור את דרך הפעולה לגבי בעיות דומות חדשות. הגזירה של השימושים החדשים הייתה אינדוקטיבית, מעין חיקוי, ללא נימוקים או הוכחות דדוקטיביות. לעתים היה הדיוק לקוי ולא כתוצאה של טעות בחישוב. אכן, נמצאו לוחות וטבלאות של תרגילים עם תשובות לא

מדויקות אבל ברור מההקשר כי הטעויות היו מודעות, ונעשו לשם הנוחיות בלבד. אם הטעות לא משנה מהותית לגבי השימוש בטבלה, למשל לצרכי מסחר, ואם קל יותר להגיע לתוצאה המוטעית, אז לא נורא לטעות.

ואז הופיעו היוונים והציגו לעולם את הדדוקציה, בעיקר בעזרת הלוגיקה - כללי הסק, כמתים, הנמקה בדרך השלילה וכדומה. הם גם הכניסו את הצורך בהגדרות מדויקות, את ההכללה, את ההוכחה. אבל כל אלה, חשובים ככל שיהיו, לא מתיישבים עם הדרך שמוח האדם יכול לתפוס באופן אינטואיטיבי, ובדרך כלל השימוש בהם הוא תחת מה שכינינו קודם לכן ניתוח, להבדיל מחשיבה אינטואיטיבית. איני כופר כמובן בחשיבות העצומה של שיטות מתמטיות אלה ואכן כל אדם צריך להיות מודע לשיטות אלה ועלינו ללמד אותן. אבל גם חשוב להבין כי אין אפשרות למוח להטמיע את הלוגיקה הזו באופן אינטואיטיבי (גם אצל אלה שמתמטיקה היא מקצועם). שלב הניתוח מגיע בדרך כלל כאשר הבנה אינטואיטיבית כבר נמצאת. השיטה היוונית הגיעה יחד עם דרך התבטאות מיוחדת, כלומר, שפה מתמטית. גם זו חשובה מאין כמוה כאשר אתה עוסק במתמטיקה, אבל מפריעה כאשר אתה מחליף רעיונות בשיחה יומיומית. חשוב שהתלמיד יידע אודות שפה זו, יכיר אותה ויידע להשתמש בה בנסיבות הנכונות, אבל אי אפשר להשתמש בה ברמה לא פורמלית מחוץ לכותלי המתמטיקה ושימושיה. המתמטיקה של חיי יומיום אינה המתמטיקה הלוגית.

העולם המתמטי אימץ את הגישה היוונית. אך זו הוגבלה, מטבע הדברים, לשלבי הניתוח. ההתקדמות היצירתית במתמטיקה הייתה מבוססת תמיד על אינטואיציה, וממשיכה כך כיום. רק לאחר שמתמטיקאי מגיע להכרה כי טענה מסוימת נכונה, או שיש לה סיכוי להיות נכונה, הוא או היא מתיישב לכתוב הוכחה לכך. כלומר, לתרגם את ההבנה האינטואיטיבית לניתוח פורמלי לוגי כמקובל בקהילה המדעית. הדבר דורש ניסיון רב ואינו נרכש בקלות.

ומה לגבי הנושאים בתוך המתמטיקה? האם אינטואיציה יכולה לכסות את כולם? אריתמטיקה נופלת בתחום שניתן לתפיסה אינטואיטיבית (איני מתייחס לצד הפורמלי, ולהוכחות באריתמטיקה אלא רק למושגים עצמם). מנייה, חיבור, חיסור, כפל, ישר המספרים וכיוצא באלה ניתנים להתייחסות אינטואיטיבית. גיאומטריה (שוב, המושגים, לא ההוכחות) גם היא מאפשרת התייחסות אינטואיטיבית. גם זיהוי תבניות (patterns) היא תכונה מולדת, אפילו שלתבנית עצמה אין בהכרח הנמקה לוגית. וכן התייחסות לדינמיקה, להתקדמות, גם היא נופלת בתחום האינטואיטיבי. אכן, להתייחסות נכונה של כל אלה היה יתרון במאבק האבולוציוני, ולכן הנושאים הללו, בבסיסם, טבועים כבר במוח שלנו.

לעומת זאת, מערכות של אקסיומות אינן יכולות להיות חלק מאינטואיציה (האדם הקדמון לא הגביל את עצמו לאקסיומות מסוג שהוא). כמו כן בניות אבסטרקטיות שבאות לעזור למתמטיקאי לטפל במערכות מסובכות, כמו מטריצות, מספרים מרוכבים, וכיוצא בזה, חשובות ככל שיהיו, לא יכולות להיטמע במוח. נכון שמהנדס או מתמטיקאי שמשתמש במספרים מרוכבים או במטריצות מפתח מין אינטואיציה לגבי אלה, אבל אפילו הוא, אם יפסיק להשתמש בכלים הללו, ימחק הארסנל הזה ממוחו. אם יצטרך לכך, יוכל לחדש את הידע, אבל זה ידרוש לימוד מחדש, אולי לא מאפס, אבל בכל זאת לימוד. במוחם של אלה שלא יזכו להשתמש במבנים הללו לא יישאר להם זכר.

5. מה ללמד

ההחלטה מה ללמד בשיעורי המתמטיקה תלויה כמובן במטרות שרוצים להשיג ובמגבלות הקיימות, אני אתייחס כאן בעיקר למגבלות הקוגניטיביות כפי שתיארתי בפרקים הקודמים. לעניין זה הפרק הבא - כיצד ללמד ולמה לצפות - חשוב אף יותר מהפרק הנוכחי.

מטרות הלימוד לדעתי (ועליהן הרחבתי מעט בספרי, שהזכרתי קודם לכן) הן כדלהלן. מטרה ראשונה היא לתת לתלמיד את **הכלים המתמטיים הבסיסיים** לתפקוד בעולם המודרני. מטרה שנייה היא להיפגש עם **מערכת לוגית, הבודקת בקפדנות את טענותיה**. מטרה שלישית היא **הכרת המתמטיקה כחלק מהתרבות האנושית.** המטרה האחרונה שאציג כאן היא **פתיחת החלון** וההכנה למתעניינים וחוקרים עתידיים במדעים, בהנדסה, ובמתמטיקה.

המטרה הראשונה היא העיקרית לדעתי (ואינה קשורה למטרה השנייה). כל התלמידים אמורים להצטייד בכלים מתמטיים שמשתמשים בהם ביומיום. כדי להחליט מה יש ללמד בקטגוריה זו צריך פשוט להסתכל מסביב ולראות מהי המתמטיקה המשמשת, או צריכה לשמש, את הקהל הרחב. הנה רשימה שערכתי לפי גישה זו, היא חלקית אולי, ואינה ערוכה בהכרח לפי סדר שנות הלימוד.

- **אריתמטיקה**: מנייה, חיבור, חיסור, כפל, ישר המספרים, כולל מספרים שליליים, שברים עשרוניים ופשוטים, אחוזים, ריבית, רביית דריבית. היוון, המרה מסרגל לסרגל, המרה ממטבע למטבע, יחסים בין מספרים, ערך משולש.

- **אלגברה**: פתרון משוואות ליניאריות ומשוואות ריבועיות, הבינום של ניוטון.

- **גיאומטריה**: הכרה של צורות במישור ובמרחב התלת ממדי, קואורדינטות, חישובי שטחים ונפחים, סימטריה. פרספקטיבה. קני מידה. מעבר בין סקלות שונות. מפות גיאוגרפיות, הטלות, גיאומטריה על כדור, אלמנטים של גיאומטריה אנליטית.

- **תבניות והתאמות:** הכרות עם תבניות שונות, סדרות של מספרים, מחזוריות, פונקציות.

- **סטטיסטיקה והסתברות**: ממוצעים שונים, חציון, שכיח, הצגה על ידי היסטוגרמות, עשירונים, טבלאות, התפלגויות, חוק המספרים הגדולים, חוק הגבול המרכזי, אלמנטים שונים של דגימה, מובהקות, סיכונים, הסתברות אלמנטרית (בשום אופן לא להשתמש במרחבי מדגם! אסביר בהמשך), חישובי סיכויים בהגרלות.

- **דינמיקה**: קצבי התקדמות, אינפלציה, החודש הירחי לעומת השמשי, המחזוריות של הגאות והשפל, משוואות דיפרנציאליות, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, עלייה אקספוננציאלית.

- **מתמטיקה דיסקרטית:** קומבינטוריקה אלמנטרית, מנייה של פרמוטציות, מיון, אלמנטים בתורת הגרפים.

בכל הנושאים הללו השאיפה היא שרמת המיומנות תהיה כזו שכאשר תלמיד נתקל בחיים בסיטואציה בה צריך מתמטיקה כדי להבין את המתרחש, יהיו לו הכלים להבין זאת כבר ברמה האינטואיטיבית. החלק הפורמלי של הלימוד צריך להיות כזה שאם יהיה צורך בכך, יוכל התלמיד, גם לאחר שיתבגר ויתפקד בחברה כמבוגר, לעשות את המעבר למתמטיקה הפורמלית ולבצע את הניתוח והחישובים הדרושים. זאת, למשל, בלקיחת הלוואות, בהבנה מדוע הטיסה מתל אביב לניו יורק עוברת דרך איסלנד, ומניעת סיטואציה כמו המורה בכיתה של בני, שהדריכה את תלמידיה לתת את משלוח המנות שהביאו בפורים לתלמיד אחר באופן אקראי, כדי שלא כל המשלוחים יינתנו, למשל, למלכת הכתה. היא התאכזבה קשות מכך שחלק מהילדים נשארו ללא משלוח מנות,

המלצתי היא להקדיש לנושאים שלעיל את מרבית שעות הלימוד, בכל שנות הלימוד, כדי שרמת המיומנות תהיה שלמה ככל שאפשר, הן ברמה האינטואיטיבית והן ברמה הפורמלית חישובית במידת הצורך.

חלק קטן משעות הלימוד יש לדעתי להקדיש למטרה השנייה שלעיל. כאן יש לבחור מספר קטן של נושאים ובהם להתעמק לרמה שלפחות בזמן הלימודים ירגישו התלמידים נוח עם חומר הלימוד. אין לדעתי סיכוי שהחומר עצמו ישמש את התלמידים, או אפילו יזכרו אותו, בהמשך הדרך, אלא אם כן עיסוקם ישיק לצורך להשתמש בחומר זה. לכן אין כל סיבה לכסות חומר רב בנושאים שונים. ממילא הלימוד של נושאים אלה באוניברסיטה אינו מסתמך על הלימוד בבית הספר. המהנדסים לעתיד, הכלכלנים, הפיזיקאים, וכיוצא באלה, ילמדו את המתמטיקה הדרושה להם במסגרת לימודי המקצוע, אבל הכרות עם מספר קטן של מערכות אבסטרקטיות כאלה, תוך כדי הבנה למה הן משמשות ופגישה עם הרקע הלוגי שלהן, כולל הוכחות למשל, ישיגו את המטרה כפי שנוסחה לעיל. הטמעה של כמה נושאים תביא לפתיחות ללימוד של נושאים אחרים בהמשך הדרך, וכן להשגה חלקית של המטרות השלישית והרביעית שלעיל. בין הנושאים שאפשר ללמד הייתי מונה את

- **טריגונומטריה**
- **מספרים מרוכבים**
- **הטכניקה של החשבון האינפיניטסימלי**
- **מבנים אלגבריים**
- **הגדרות אלגוריתמיות**
- **מבנים רקורסיביים**

ויש נושאים נוספים כמובן, ולא אפרט כאן את רמת העומק בכל נושא שכזה. אבל אחזור ואדגיש, המלצתי היא להציג מספר קטן של נושאים, אפילו לא את כל אלה שהזכרתי כאן, אך לכל אחד מהנושאים להקדיש מספיק זמן כדי שהתלמיד יפנים, יבין, וישיג בכך את המטרה השנייה שלעיל. לימוד של מספר גדול מהנושאים הללו הוא ברכה לבטלה. אין לצפות כי התלמיד יפתח אינטואיציה בנושאים אלה (אפשר לפתח אינטואיציה כזו לגבי הצגה או שימוש קונקרטיים, אבל איני בטוח שכדאי לעשות זאת). אפשר לצפות כי אם התלמיד נדרש, למשל, לפתור תרגיל או להתייחס לשאלה בנושא מסוים, הוא ידע לגשת לחומר הנלמד ולנתח את הנושא באופן פורמלי וכך לפתור את השאלה או התרגיל.

המטרה השלישית, כלומר המתמטיקה כחלק מהתרבות האנושית, תושג באופן חלקי כבר בלימוד הנושאים שפרטתי. אני ממליץ לעבות את הפרק הזה על ידי סקירות היסטוריות עם מנעד רחב, שייוצגו יותר כשיעור בהיסטוריה מאשר שיעור במתמטיקה. השיעורים הללו יצביעו הן על ההתפתחות בתוך המתמטיקה והן על התרומה לתרבות האנושית. בין הנושאים שאפשר להציג (ויש כמובן הרבה אחרים):

- **השימוש בלוגיקה וכללי הסק – תרומת היוונים**
- **השיטה האקסיומטית , אקסיומות המישור - אוקלידס**
- **קואורדינטות קארטזיות – דקארט**
- **חשבון אינפיניטסימלי – ניוטון**
- **סטטיסטיקה והסתברות – הויכנס, ברנולי, גאוס**
- **גיאומטריות לא אוקלידיות – רימן ואחרים**
- **התפתחות המחשבים האלקטרוניים – פון נוימן ואחרים**
- **מודלים מתמטיים, פרקטלים**

לא אסקור כאן את הרלבנטיות לתרבות, אבל , למשל, אנשים מופתעים מכך שהגדרת הממוצע האריתמטי והשימוש בו התבססו רק במאה ה- 17, אנשים לא יודעים את המוטיבציה של ניוטון לפתח את החשבון האינפיניטסימלי וכדומה.

לגבי המטרה הרביעית, פתיחת צוהר לאלה שימשיכו במקצועות מדעיים, הרי שהצוהר כבר נפתח בשתי הקטגוריות הקודמות, אם נעשו נכון. הייתי ממליץ לעבות זאת על ידי הרצאות קצרות בנושאים מתמטיים שונים. אין כמו הרצאה מעניינת, מלווה בתמונות או סרטים מתאימים, כדי לרתק ולמשוך בני נוער (ומבוגרים כמובן) שעשויים להתעניין. צריך שמצגות אלה יהיו רציניות, ושלא יגלשו לפופוליזם רדוד (כבר שמעתי מפי פרשן מדעי שניזון כנראה ממצגות קלוקלות שכאלה, כי הוריקנים במפרץ מקסיקו נגרמים על ידי פרפרים בדרום מזרח אסיה. גם ההצהרה כי מוצאים פרקטלים בטבע, עננים למשל, אינה נכונה. פרקטלים הם מודל בלבד והעננים או חוף ים הם רק קירוב למודל). כמה פרויקטים מוצלחים מאד המקדמים הרצאות כאלה כבר פותחו – בטכניון למשל, ובכמה מכללות. צריך ואפשר לעבות ולהרבות אותם, ולשלבם בתכנית הלימודים, כדי שיקדמו את המטרה הרביעית שהזכרתי. ואפשר כמובן להציע לתלמידים הטובים לחפש (בעצמם, לא בהדרכת המורים) ברשת סרטונים או מצגות בנושאים מתמטיים, להציג ולהסביר אותם בכתה לכלל התלמידים.

6. איך ללמד ולמה לצפות

במבט שטחי הנושאים שבתכנית המוצגת לעיל לא שונים בהרבה מהחומר הנלמד היום. על פניו, השינויים הם במינון ובהדגשים. אבל יש הבדל חשוב אחד והוא נושא הפרק הנוכחי – איך ללמד ולמה לצפות.

ראשית, למה אפשר לצפות: ניזכר בשתי הדרכים, שהוצגו קודם לכן, לרכוש ולעבד ידע. האחת, דרך האינטואיציה, על כל היתרונות שנצרפו דרך האבולוציה, יתרונות הנהפכים לעתים למגבלות קוגניטיביות. הדרך השנייה היא דרך הניתוח הפורמלי. אי אפשר לצפות שהחומר הפורמלי ייטמע במוח לרמה של "תשובה מהבטן". אבל יש בדרך זו יתרון של דיוק. חשוב שהתלמידים (והמורים) יטמיעו את ההבדל בין תשובה אינטואיטיבית לבין דיוק אפשרי. נושאים שאפשר לפתח בהם אינטואיציה יישארו במוח התלמיד לתקופות ארוכות. לא כך הדבר לגבי נושאים פורמליים. אבל אם בנוסף לאינטואיציה יקבל התלמיד כלים חישוביים ואנליטיים, ואלה יילמדו נכון, יוכל התלמיד לבדוק את המסקנות האינטואיטיביות שהגיע אליהן בכל מקרה ומקרה שימצא לנכון לעשות זאת, וכן לבצע חישובים נכונים, אם יש צורך בכך. אבל צריך להבין שהגישה לאלה תהיה דרך ניתוח ולא דרך הבנה אינטואיטיבית. נושאים אבסטרקטיים או פורמליים או לוגיים שאין אפשרות לפתח אינטואיציה לגביהם, יישארו במוח אך רק כזיכרון של אפשרות, ולא כנושא אופרטיבי. במידה ובהמשך הדרך יזדקק התלמיד לנושא הנלמד, אפשר לצפות שיידע כיצד לגשת לאינפורמציה ולהשתמש בה נכון. גם אם ייתקל התלמיד בנושא שלא למד בכיתה, העובדה שהוא שולט, במובן שזה עתה הסברתי, במספר נושאים אבסטרקטיים ולא אינטואיטיביים. תעזור לו שלא לפתח עוינות כלפי נושאים אחרים שיתקל בהם, למשל בלימודים גבוהים. לא פשוט להבחין בין המקרה בו תשובה אינטואיטיבית מספיקה לבין המקרה בו צריך להפעיל ניתוח מתמטי, הבחנה זו תלויה, בין השאר, בשימוש ובחשיבות הדיוק בתוצאה. אבל להכרה בעובדה כי שתי האפשרויות קיימות וצריך להחליט אם להשתמש בשתיהן או שמספיקה האינטואיציה, חשיבות לכשעצמה.

לעומת זאת, אם המערכת תתעקש כי התלמיד ישתמש בחומר האבסטרקטי הנלמד ברמה של זיכרון ואינטואיציה, ותצפה כי השימוש יהיה שוטף ונקי משגיאות, לא יהיה מנוס מכך שהתלמידים (למעט מספר קטן של תלמידים) יפתחו עוינות לחומר הנלמד, כפי שקורה היום לגבי רוב החומר שנלמד בבתי הספר.

ואיך ללמד? בכל הנושאים שמטרתם לתת לתלמידים כלים לתפקוד בחיי יומיום, צריך לבנות על החומר שהתלמיד כבר מכיר, לבנות על האינטואיציה שכבר במוחו ולבסס אותה. רק לאחר שהחומר מבוסס, אפשר לגשת לפן הפורמלי של המתמטיקה. לכל הנושאים שהצגתי לעיל כנושאי לימוד בסיסיים, יש מופעים או שיקופים בחיי יומיום (כך הם נבחרו) צריך ואפשר להתחיל את הלימוד בכל נושא ונושא בהתייחסות היומיומית לנושאים אלה, דרך עיתונים, דרך סיפורים, דרך שיחה כללית ולא

מתמטית. את המתמטיקה הרלבנטית יש להציג קודם כל בהתייחסות למופעים אלה, ולא כבדרך אגב כשימוש של המתמטיקה, אלא כמתמטיקה עצמה. אחרי שהקשר נוצר, אפשר לפתח את המתמטיקה הפורמלית הנדרשת, אבל צריך לזכור כי האינטואיציה שתלמיד מפתח יכול שתהיה שונה מעט מאשר האינטואיציה שהמורה מכוון אליה. צריך להיות סבלני. אם מה שהתלמיד תפס היא וואריאציה, אפילו לא מדויקת, של האינטואיציה של המורה, יש להרשות ולקבל את גרסת התלמיד. רק אם יש ממש סתירה בין מה שהתלמיד מבין ומה שהמורה מלמד יש לתקן ולהביא את התלמיד לגניזה ושינוי של האינטואיציה שלו. צריך לומר ולהזהיר כי לבסס אינטואיציה קשה הרבה יותר מאשר להציג חומר פורמלי, כפי שיודע כל מי שכתב מתמטיקה וניסה להסביר את הרקע והאינטואיציה שמאחורי הניסוחים היבשים. אבל אפשר לעשות זאת, ואפילו לכתוב מערכי שיעור שידריכו את המורה כיצד לרכוש בעצמו ולהעביר לתלמידים אינטואיציה נכונה, תוך התחשבות בידע שכבר בידי התלמיד. המטלה הזו, לדעתי, היא יותר אתגרית ומעניינת למורה מאשר לעבור על חומר פורמלי.

ואחזור ואדגיש: יש הבדל מהותי בין הפרקטיקה הנהוגה כיום, כלומר להציג מתמטיקה פורמלית ואחר כך להראות את השימושים שלה, לבין ההצעה שלי, לבנות את האינטואיציה על השימושים ואחר כך להציג את הפורמליזם. בשפה מתמטית: סדר ההוראה אינו קומוטטיבי. נחזור על הסיבה העיקרית להבדל: המוח לא יכול לקלוט באופן אינטואיטיבי נוסח פורמלי. ההטמעה של הפורמליזם מתאפשרת רק אם יש במוח מצע לקליטה בצורת שימוש קונקרטי. לכן סדר הדברים חשוב. יתר על כן, במוח יש יותר מערוץ אחד ללמידה. לכן אין עלינו להתפלא כאשר התלמידים מפגינים קושי במעבר בין ערוצים שונים. לדוגמא, המעבר בין תרגילים פורמליים לבין בעיות מילוליות הוא כנראה מעבר בין ערוצי למידה ועיבוד אינפורמציה שונים לחלוטין במוח, ואין להתפלא שמעבר זה קשה כל כך. (כיצד לעבור בצורה יעילה בין שני הערוצים הללו מהווה, לדעתי, אתגר מחקרי ראשון במעלה.) אבל אם מתחילים מהפורמליזם, הקליטה היא לא אינטואיטיבית, והמעבר בין תרגילים ובעיות מילוליות נעשה אפילו קשה יותר.

הנה כמה דוגמאות ללימוד נכון ושאינו נכון.

קודם כל לגבי הגילים הצעירים, מהגן ועד לפחות כתות ג ו-ד, ואולי יותר מכך (ועל כך הרחבתי בספר שלי). כאן אין כל צורך במתמטיקה פורמלית. אפשר אפילו לוותר על ספרים וחוברות, ולשאוב את כל הידע והפרקטיקה מהסובב אותנו ולהסתפק בדפי עבודה המותאמים לכל כיתה וכיתה. מרבית הילדים מגיעים לכתה א' עם ידע רב במנייה ופעולות אריתמטיות פשוטות ששאבו מסביבתם, עם או בלי עידוד של ההורים. הילדים חשופים למספרים ולפעולות אריתמטיות פשוטות בחיי יומיום, אם בהמתנה לאוטובוס, או בנרות חנוכה או בימי הולדת, או בסופרמרקט, או במשחקים שהם משחקים בחוץ, או בבית, משחקי קלפים-רביעיות למשל או אפילו מונופול, ויש ילדים שקולטים מהם מספרים שליליים מהשימוש במעליות המגיעות לקומות נמוכות מקומת הכניסה, וכיוצא בזאת. את זאת אפשר לעודד ועל מסד זה לרכוש עוד ועוד ידע "מן האוויר". אין כל רע בכך שהתלמידים שהשליטה שלהם בחומר עדיין לא מושלמת, ילמדו מחבריהם, אפילו על ידי חיקוי. אין כל יתרון בחומר המתודי שכלול היום בספרים או בחוברות. כמו שלא היה יתרון בשיטת הבדידים אין כל יתרון בתרגילים כמו "צבע באדום את כל הריבועים שבהם יש את המספר 4" שבהם מועסקים תלמידי כתה א' עד זרא. לאלה לא ברור אם הדגש הוא על המספר 4 או על הצבע האדום.

וצריך סבלנות וסובלנות. לא כל מה שהמתמטיקה האבסטרקטית מלמדת אותנו כנכון או לא נכון אכן רלבנטי לחיי יומיום. למשל, מה המשמעות של פעולת החילוק? את התרגיל "6 לחלק ל- 2" אפשר לפרש כשאלה כמה פעמים אוסף בן 2 פריטים כלול באוסף בן 6 פריטים, וגם כשאלה מה יהיה הגודל של כל אחת משתי קבוצות שמתקבלות על ידי חצייה של קבוצה בת 6 פריטים לשני חלקים שווים. יש סיבות טובות להעדיף את הפרשנות הראשונה (אז, למשל, ברורה המשמעות של 8 לחלק ל- $\frac{1}{2}$, כלומר כמה פעמים נכנס חצי ל- 8). אבל מה לעשות, בחיי יומיום, בעברית לפחות, לחלק 6

לשניים מתפרש בדרך כלל כחלוקה של 6 פריטים לשתי קבוצות. להעמיס על התלמידים את ההבדל הפורמלי שבין שתי הפרשנויות, ולציין כי אחת נכונה והשנייה לא, זו ברכה לבטלה אם לא גרוע מכך.

והדבר נכון גם לגבי חומר מתקדם. בתכנית הלימודים לחטיבות הביניים מומלץ להתייחס לסדרה כפונקציה המוגדרת על משתנה בדיד. זו אולי הגדרה נכונה (במסגרת מתמטית כלשהיא), ולפעמים מועילה, אבל מה התועלת בה לגבי תלמידי תיכון? האם כותבי תכנית הלימודים עצמם חושבים על סדרה כפונקציה כזו? מדוע לא מספיק לתת כמה דוגמאות של סדרות וכך ולהעביר את המסר מהי סדרה?

והדחף לבסס את הלימוד על תובנות שהושגו במתמטיקה גבוהה מביא אף לטעויות והטעיות. למשל, מרחב המדגם בהסתברות מוצג בכמה ספרי לימוד כאוסף כל התוצאות האפשריות של ניסוי. הגדרה זו היא מצומצמת מאוד בשימושיה, ומוסיפה מעט מאוד אם בכלל להבנת הנושא, ולבטח מחטיאה את המטרה המרכזית של המושג. כאשר הגדרה כזו משתרשת במוחם של המורים, למשל, היא מביאה למחסום של הבנה של מושגים יסודיים, כמו חוקי הגבול השונים. מרחב המדגם הוא מושג חשוב ביותר בתורת ההסתברות אבל תלמידי תיכון אינם בשלים אליו. כדאי שלא להזכיר אותו כלל. ההסתברות והסטטיסטיקה התפתחו יפה מאוד לפני שקולמוגורוב הציע את המסגרת של מרחבי מדגם ואפשר ללמד הסתברות וסטטיסטיקה ללא מרחבי מדגם. גם חוק בייס מוצג בתכנית הלימודים בצורה מצומצמת להסתברות מותנית. בעיקרו זה חוק קשה לשימוש ואולי לתפיסה, והצגת הפן הטריוויאלי שלו לא משמשת כל מטרה.

גם בגילאים גדולים יותר צריך לבסס את הלימוד על אינטואיציה שכבר קיימת או שאפשר לבנות אותה בהקשר של בעיה קונקרטית. נסתכל על בעיות קיצון. כאלה לא מופיעות בחיי יומיום בצורה שאנו מנתחים במתמטיקה, אבל אפשר לבנות את הקשר בין שני המופעים. אפשר, למשל, להתייחס לסיטואציה בה התלמיד עשוי להימצא ובה עליו להגיע מהר ככל האפשר ממקום בשדה חול למקום במשטח כבוש. לרוץ בקו ישר בין שתי הנקודות לא ימזער את זמן ההגעה וגם לסטות יותר מדי ימינה או שמאלה רק יגדיל את הזמן הדרוש. באיזה מקום באמצע נמצא המינימום, אפשר אז לפתח את נוסחת הזמן באופן מדויק, לקשר אותה למושג הנגזרת ואז למצוא את נקודת המינימום. לתלמידים הטובים אפשר להציג בשלב זה את עקרון פרמה. אבל לא הייתי בונה על כך את האינטואיציה, כי מה אינטואיטיבי בטענה שאור מגיע מנקודה לנקודה במסלול שממזער את הזמן? אפשר לבצע את הניתוח של נקודת קיצון גם לגבי סך הרווח שמוכר הארטיקים בים יקבל ממכירת מרכולתו כתגובה למחיר שידרוש. רמת הפירוט בכל דוגמא תהיה מתאימה לגיל ולרמת התלמידים, אבל צריך שהמושגים ייטמעו במוחם כבר בשלב הדוגמאות. רק לאחר שהמושגים יושבים היטב במוח התלמידים לגבי כמה דוגמאות, אפשר לגשת לבעיות קיצון אבסטרקטיות יותר. האבסטרקט ייקלט אז על בסיס הקונקרטי. היום, לעומת זאת, התהליך הפוך – קודם האבסטרקט ואחר כך "השימושים" . וכבר ראיתי ספר לימוד עם שאלה כגון: הרווח של סוחר ממכירת מוצר במחיר x הוא $4x - x^2$, מתי יהיה הרווח מקסימלי? לדעתי אין כאן שימוש אמתי שיעזור לתלמיד בחיי יומיום.

באופן דומה, אינטואיטיבי, אפשר גם להציג מהי נגזרת, ולהגיע בעזרת האינטואיציה לרמות די גבוהות. למשל, להסביר בעזרת נגזרת מדוע השינויים היומיים בזמני השקיעה והזריחה הם קטנים ביותר באמצע החורף ובאמצע הקיץ, ומהירים יותר באביב ובסתיו. כאשר מושגים כאלה מוטמעים אפשר לבנות עליהם את החשבון האינטגרלי והדיפרנציאלי כפעולות פורמליות. את ההגדרה הפורמלית של הנגזרת והאינטגרל אפשר להשאיר לשלב מאוחר יותר. כך גם עם משוואות דיפרנציאליות. (כדוקטורנט באוניברסיטה העברית התבקשתי להעביר את הקורס במתמטיקה לביולוגים שנה א'. הסכמתי בתנאי שאלמד בדרך שאני מוצא לנכון. בשיעור הראשון הסברתי מה היא משוואה דיפרנציאלית – בעזרת דוגמאות "מהחיים" כמובן - ואיך משתמשים בה. עד היום ניגשים אלי בוגרי הקורס ומספרים שמאז הם מבינים מהי משוואה דיפרנציאלית.)

וכאמור, חשוב להיות סבלנים, סובלניים וקשובים. וכבר ספרתי על אותה הרצאה מוזמנת בכנס שכותרתו הייתה "מה צריכים מורים למתמטיקה לדעת?" באותה הרצאה נטען כי חשוב למורים לאתר שגיאות אצל התלמידים. למשל, לשאלה "מהם המספרים הזוגיים?" ניתנה בספר מסוים התשובה: "אלה שבספרת היחידות רשום אחד מהמספרים 0, 2, 4, 6, או 8", ובהרצאה נטען כי זו תשובה שגויה. אני לא ראיתי כל שגיאה בתשובה, עד שהדבר הובהר על ידי המרצה: "הנה דוגמא נגדית: 32.7". אצל המרצה, אם לא התלווה התואר "טבעי" למילה מספר הרי מדובר "במספר ממשי". אצלי, ולדעתי אצל רוב הקהל, המוסכמה הזו לא הייתה קיימת. והיו דוגמאות נוספות דומות באותה הרצאה. מורים שילמדו מהרצאה כזו מהן שגיאות, רק יזיקו לתלמידיהם. באותה מידה, כאשר תלמיד נשאל "מהו ריבוע?" התשובה "מצולע בעל ארבע צלעות שוות" היא נכונה להבנתו של התלמיד. בשפת יומיום "מהו ריבוע?" מתפרש כ-"תאר ריבוע", ולא כ-"הגדר ריבוע" במשמעות המתמטית של הגדרה. וכך הלאה וכך הלאה.

והערה על השימוש בלמידה מקוונת. נושא הלמידה המקוונת התפתח ומתפתח מאוד. אבל לאכזבתי רוב הפיתוחים משתמשים במחשב ובאינטרנט ככלי עזר לשיפור ההוראה הסטנדרטית, שממשיכה להינתן במתכונת הקונספטואלית הנהוגה כיום. אני הייתי ממליץ להרחיב את השימוש בכלי החדש. לפני המצאת האינטרנט היינו פותחים אנציקלופדיה כדי ללמוד ערך זה או אחר. בתחילת עידן הרשת חיפשנו את הערך הרצוי באנציקלופדיה מקוונת. מאוחר יותר פנינו לוויקיפדיה. היום החיפוש שונה לחלוטין: מפעילים מכונת חיפוש, בדרך כלל גוגל, וקוראים את מה שעולה במחשב. אמנם צריך אז להפעיל שיקול דעת מהי התשובה המתאימה (ואני תמיד מופתע מחדש מהדיוק של התוצאות שהחיפוש מעלה), אך כמעט תמיד אפשר למצוא בין הדפים השונים העולים בחיפוש, אחד שמתאים לרמת הידע המתאימה. מדוע לא לשלב לימוד מתמטיקה בשיטות חיפוש ברשת? לתלמידים יהיה זה צעד טבעי.

והערה אחרונה לפרק זה: מה ההשלכות של התובנות שלעיל על הלימודים וצורת הלימוד באוניברסיטה? קודם כל, השיטה שאני מציג כאן לא תפגע ברמת המוכנות של התלמידים ללימודים גבוהים בהנדסה או במדעים, ואפילו תעלה את רמת המוכנות. לגבי הלימוד עצמו באוניברסיטאות, כבר היום רצוי היה שתלמידים במקצועות הצורכים מתמטיקה, כמו מדעים שונים, הנדסה, כלכלה, ילמדו מתמטיקה בקשר ישיר עם השימושים. הסטודנטים באוניברסיטאות מנוסים מספיק כדי שאפשר להציג לפניהם קודם את החומר הפורמלי והאבסטרקטי, ורק אחר כך לפנות לשימושים (שלא כפי שאני מציע לגבי תלמידים צעירים). אבל גם אצלם ללא הקשר לשימושים יהיה הלימוד ברכה לבטלה. לעומת זאת, המתמטיקה כמקצוע בפני עצמו דורשת לוגיקה ואבסטרקציה שקשה לכלל התלמידים. אלה באוניברסיטה שרוצים ללמוד מתמטיקה לשמה, אולי אפילו מתכוונים להיות מתמטיקאים, צריכים להסתגל לקשיים הקוגניטיביים שפרטתי קודם לכן (לוקח הרבה זמן ומאמץ לעשות זאת אבל אחרי תקופת ההסתגלות מתגלה להם העולם היפה להפליא של המתמטיקה). יתר על כן, ההכרות עם הכלים שפותחו במתמטיקה, אם יוצגו כלים אלה בזמן המתאים, תעזור גם לאלה שעיסוקם במדעי הטבע, ההנדסה והחברה. המתמטיקה כמקצוע, כולל מה שנקרא מתמטיקה שימושית, קרובה הרבה יותר לשיטת הלימוד הנוכחית בבתי הספר מאשר לשיטה שאני ממליץ עליה. לכן אין כל רע, ואני רואה בכך אפילו יתרון, כי לימודי המתמטיקה, למתמטיקאים, באוניברסיטאות יישארו כפי שהם.

7. האם אפשר לאמץ את ההצעות שלעיל

תשובתי היא כמובן חיובית, אבל צריך להתגבר על קשיים לא מעטים. לפני שאציין כמה מהם אוסיף כי אפשר גם לאמץ חלקים מתוך ההצעה, למשל ביסוס הלימוד על "דוגמא מפורטת תחילה ורק אחר כך הפורמליזם" אפשר שייעשה כבר היום על ידי כל מורה ומורה בנושאים שונים. אבל גם אימוץ ההצעה בשלמותה אפשרי.

אבל נזהיר כי ללמד על ידי הקניית אינטואיציה בדוגמא קונקרטית יהיה קשה למורה הרבה יותר מאשר הצגת הפורמליזם תחילה ואחר כך קישורו לדוגמא. הקושי שווה את המאמץ כי דרך הדוגמא יוכל מוחו של התלמיד לעכל גם את הפורמליזם. אבל הקושי קיים, ובוודאי בזמן הזה כאשר עדיין כמעט ולא מלמדים בשיטה זו.

לגבי הקשיים באימוץ השיטה שאני מציע: קושי אחד הוא שאנחנו כל כך רגילים לשיטת הלימוד הנוכחית עד כדי שקשה לנו אפילו לקבל שאינה מתאימה מבחינה קוגניטיבית. אני בטוח כי אם כי בכל נושא ונושא, התלמידים ילמדו באופן מפורט ומפורש דוגמא או שתיים מהחיים, יהיה להם קל יותר לעכל את הפורמליזם שיבוא בעקבות אלה. לדעתי, אלה הדוגלים בגישה ההפוכה, שהיא הנוכחית, לא מביאים בחשבון את הידע המתמטי שלהם עצמם, כלומר, הם מכירים את החומר ואינם זקוקים לדוגמאות כדי לבנות אינטואיציה, אינטואיציה החסרה לתלמידים. אבל התנגדות מצד חלק מהמורים תהיה. ניסיתי את הגישה שלעיל בכתה של מורים ותיקים יחסית הלומדים לתואר מוסמך. הם כל כך רגילים לשיטה הנוהגת עד שחלקם ביקש (אפילו דרש) להגיע מה שיותר מהר לנוסחאות. חלקם אפילו רצה כי הלימוד יעשה במתכונת שהם עצמם מלמדים לפיה, כלומר תרגילים ותשובות על ידי שימוש בנוסחה, כך שעליהם יהיה רק לצוות את הנוסחה לתרגיל הנכון. זו כמובן רעה חולה של שיטת הלימוד, והיא כנראה תוצאה של שיטת ההערכה של הלימוד הנהוגות היום (וזה נושא כבד לכשעצמו).

קושי אחר הוא השינוי שהמורים יצטרכו לעבור בגישתם לשיח עם התלמידים. הסובלנות המתבקשת בשיח זה מצריכה מידת ידע גדולה יותר, ובטחון עצמי בידע, מאשר על המורה להפגין היום. בהרבה פגישות עם מורי המורים ומפתחי התכניות נאמר לי כי רמת המורים אינה מספיקה כדי לבצע רפורמות כאלה או אחרות. אני כופר בכך, לפחות חלקית. הרי אותם מורים מתפקדים היטב – גם מבחינה מתמטית – בחיי היומיום. מדוע הם מאבדים את ביטחונם כאשר הם מגיעים לכתה? לדעתי השיטה הנוכחית, שאינה מתואמת עם הדרך שהמוח פועל, פוגעת בביטחון העצמי של המורים. בעוד שאני ורבים מחברי לא מהססים לכפור בדייקנות לכאורה של קביעה זו או אחרת בספרי הלימוד, והנובע ממנה לגבי לימוד המתמטיקה (ראה חלק מהדוגמאות שלעיל), הרי המורים "מתוכנתים" ללמוד – כלומר לזכור – את ההגדרות "המדויקות" הללו. הם מבטלים את שיקול הדעת שצריך להיות להם מפני "המומחה" למתמטיקה, או כותב הספר שהוא בדרך כלל מומחה מטעם עצמו. מתן עצמאות מחשבתית למורים יפתור חלק גדול "מבעיית המורים".

כאשר הקשיים שהצגתי ייפתרו, הדרך – אמנם ארוכה – תהיה סלולה לפיתוח התכנית כפי שהצעתי.

ישנם עוד קשיים, טכניים בעיקר. למשל, איך בוחנים את התקדמות התלמידים ואיכות ההוראה? איך אפשר יהיה למיין את התלמידים המועמדים ללימודים גבוהים? האם החלוקה שהורגלנו לה, לשלוש ארבע וחמש (ולאחרונה חמש פלוס) יחידות, תוכל להישאר פחות או יותר? ועוד שאלות טכניות שכאלה. אפשר לענות על כולן, אבל אין זה המקום לפרט, לפחות לא בשלב זה.